

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Bemerkung zum Typenproblem.  
**Autor:** Wittich, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21274>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Bemerkung zum Typenproblem

Von HANS WITTICH in Karlsruhe

Eine beliebige offene Riemannsche Fläche  $F$  werde durch eine Folge von Teilgebieten  $F_n \subset F_{n+1}$  mit folgenden Eigenschaften ausgeschöpft: 1) Der Rand  $C_n$  von  $F_n$  setzt sich aus endlich vielen geschlossenen, stückweise analytischen Kurven zusammen, und  $C_0, C_1, \dots$  sind punktfremd. 2)  $F - F_n$  besteht aus einer Anzahl von nichtkompakten Gebieten. 3) Für jedes kompakte Teilgebiet  $\bar{F} \subset F$  gilt von einem bestimmten  $n$  an  $\bar{F} \subset F_n$ . L. Sario<sup>1)</sup> bewies den Satz: Wenn eine Ausschöpfung von  $F$  existiert, für welche das Produkt  $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$  der Minimalmoduln  $\mu_n$  divergiert, dann ist der Rand von  $F$  hebbare. Aus diesem allgemeinen Hebbareitkriterium ergibt sich das Typenkriterium: Eine einfach zusammenhängende offene Riemannsche Fläche  $F$  ist dann und nur dann vom Grenzpunkttypus, wenn eine Ausschöpfung  $F_n$  von  $F$  existiert, für welche  $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$  divergiert. Die im Anschluß an diesen Satz naheliegende Frage, ob zu jeder zulässigen Ausschöpfung  $F_n$  einer Fläche  $F$  vom parabolischen Typus ein divergentes Modulprodukt gehört, ist zu verneinen, wie durch eine Konstruktion von L. Sario<sup>2)</sup> gezeigt wurde. Hier soll eine Fläche vom parabolischen Typus, bei der ein früher abgeleitetes Kriterium<sup>3)</sup> versagt, im Zusammenhang mit den Bemerkungen von L. Sario betrachtet werden.

Die zu betrachtenden einfach zusammenhängenden offenen Flächen  $F$  seien nur über den Grundpunkten  $w = a_j = \exp j \cdot 2\pi i/q$ ,  $j = 1, \dots, q$ , verzweigt und frei von algebraischen Windungspunkten. Für die Darstellung von  $F$  durch einen Streckenkomplex  $\mathfrak{S}$  werden als Gliedkurven

<sup>1)</sup> L. Sario, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 50.

<sup>2)</sup> L. Sario, Sur le problème du type des surfaces de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) S. 1109.

<sup>3)</sup> H. Wittich, Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen, Math. Z. 45 (1939). Im folgenden zitiert mit (T).

die Halbstrahlen  $\arg w = (2j - 1)\pi/q$ , als Innen- bzw. Außenknoten  $w = 0$  bzw.  $w = \infty$ , als Zerschneidungskurve  $\mathfrak{c}$  der Kreis  $|w| = 1$  gewählt. Ist die Anzahl der Knotenpunkte mit Generationszahlen  $\leq n$  gleich  $\sigma(n)$ , wobei jeder Knoten einfach gezählt wird, so ist für den Grenzpunkttypus der Fläche  $F$  die Divergenz der Reihe  $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$  hinreichend. Nach der in (T) angegebenen Vorschrift werden für  $n = 1, 2, \dots$  geschlossene, stückweise analytische Kurven  $\Gamma_n$  im schlichten konformen Bild der Fläche konstruiert, wobei  $\Gamma_n$  alle Knoten der  $n$ -ten Generation trägt und nur diese. Die  $w$ -Bilder  $C_n$  dieser Kurven  $\Gamma_n$  beranden Flächenstücke  $F_n$ , die eine zulässige Ausschöpfung der Fläche  $F$  leisten. Zufolge der an  $F$  gestellten Bedingungen ist das Gebiet  $E_n = F_{n+1} - F_n$  stets zweifach zusammenhängend und lässt sich schlicht konform in  $1 < |Z| < \mu_n$  abbilden, wobei  $C_n$  in  $|Z| = 1$  übergehen soll. Lässt man für  $F$  unendlich viele algebraische Windungspunkte zu, so können die Gebiete  $E_n$  komplizierteres Verhalten aufweisen.

Durch die Bilder der Gliedkurven wird der Kreisring  $1 < |Z| < \mu_n$  in Teilgebiete zerlegt, nämlich in  $v(n)$  Vierecke  $\mathfrak{V}_j$ , in Dreiecke  $\mathfrak{D}_j$  und in Zweiecke  $\mathfrak{Z}_j$  mit den Ecken (das sind Bilder von Knotenpunkten) auf  $|Z| = 1$  und  $|Z| = \mu_n$  (Fig. 1 und 2). Diese Gebiete lassen sich

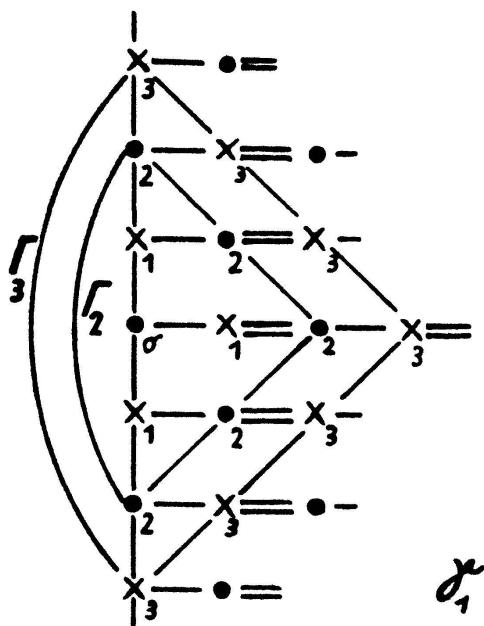


Fig.1

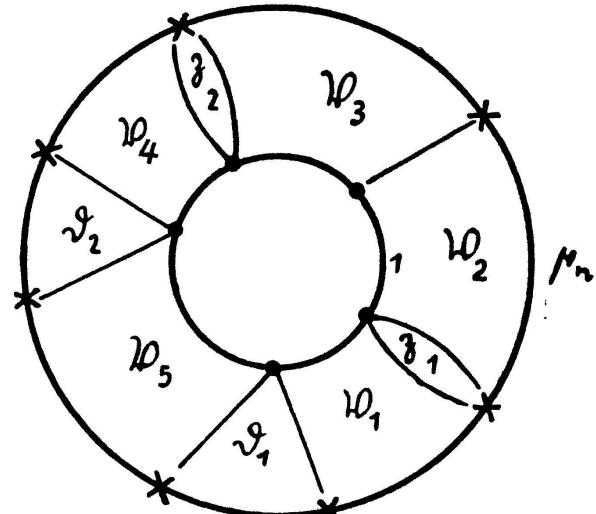


Fig.2

elementar quasikonform mit beschränktem Dilatationsquotienten  $Q$  in einfache Gebiete abbilden. Durch  $\zeta_j = g_j(Z)$  werden die logarithmischen Elementargebiete, denen ein Viereck  $\mathfrak{V}$  oder ein Dreieck  $\mathfrak{D}$  angehört, in  $\Re \zeta_j > 0$  abgebildet, wobei der bei der Ausschöpfung zuerst er-

faßte Knoten auf dem Rande des Elementargebietes nach  $\zeta_j = 0$  kommt. Haben die den auf  $|Z| = 1$  gelegenen Ecken des Vierecks entsprechenden Knoten im Streckenkomplex von dem  $\zeta_j = 0$  zugeordneten Knoten den Knotenabstand  $k_j$ , so geht  $\mathfrak{B}_j$  durch  $\zeta_j = g_j(Z)$  in das Gebiet  $k_j < |\zeta_j| < k_j + 1$ ,  $|\arg \zeta_j| < \pi/2$  über. Die  $\zeta_j$ -Bilder der in  $\mathfrak{B}_j$  gelegenen Teilbögen  $\alpha_j$  von  $|Z| = R$ ,  $1 \leq R \leq \mu_n$ , haben also eine Gesamtlänge  $\geq \pi k_j$ . Aus

$$\pi \sum_{j=1}^v k_j \leq \sum_1^v \int_{\alpha_j} \left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right| |d \log Z|$$

folgt wegen  $\sum_{j=1}^{v(n)} \int_{\alpha_j} |d \log Z| \leq 2\pi$  nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\pi}{2} \left( \sum_{j=1}^{v(n)} k_j \right)^2 \leq \sum_1^{v(n)} \int_{\alpha_j} \left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right|^2 |d \log Z|$$

und nach Integration nach  $\log R$ ,  $1 \leq R \leq \mu_n$ , zusammen mit

$$\left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right|^2 \leq Q \frac{[d\zeta_j]}{[d \log Z]} \quad ^4)$$

$$\frac{\pi}{2} \left( \sum_1^v k_j \right)^2 \log \mu_n \leq Q \sum_1^v \int [d\zeta_j] = \pi Q \sum_1^v (2k_j + 1) \leq 3Q\pi \sum_1^v k_j ,$$

da  $k_j \geq 1$ . Danach gilt

$$\log \mu_n \leq 6Q \frac{1}{\sum_1^v k_j} \leq \frac{6Q}{\sigma(n)} = \frac{B}{\sigma(n)} ,$$

weil  $\sum_1^{v(n)} k_j \geq \sigma(n)$  erfüllt ist, also

$$\log \prod_{n=1}^N \mu_n \leq B \sum_{n=1}^N 1/\sigma(n) .$$

Entsprechend zeigt man unter Verwendung der in (T) angegebenen Konstruktionen, daß die Beziehung

$$A \sum_1^N 1/\sigma(n) \leq \log \prod_1^N \mu_n$$

besteht,  $A$  eine positive Konstante.  $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$  und  $\prod_1^\infty \mu_n$  zeigen also gleiches Konvergenzverhalten. Dieselbe Beziehung

---

<sup>4)</sup>  $[dz]$  = Flächenelement in der  $z$ -Ebene.

$$A \sum_1^N 1/\sigma(n) \leq \log \prod_1^N \mu_n \leq B \sum_1^N 1/\sigma(n)$$

gilt auch noch für Flächen  $F$  mit endlich vielen algebraischen Windungspunkten, wie man durch passende Wahl von  $F_0$  erkennt. Danach gibt es zu jeder Fläche  $F$  der betrachteten Klasse, die zum parabolischen Typus gehört und die Eigenschaft  $\sum_1^\infty 1/\sigma(n) < \infty$  hat, eine zulässige Ausschöpfung mit konvergentem Modulprodukt. Für die von  $w = \exp(e^z)$  (bzw. einer linearen Transformierten) erzeugte Fläche mit dem Streckenkomplex  $\mathfrak{S}_1$  (Fig. 1) ist wegen  $\sigma(n) = (n+1)^2 \prod_1^\infty \mu_n$  konvergent.

Weitere Flächen mit derselben Eigenschaft sind die durch  $w = \exp(e^{P(z)})$ ,  $P(z)$  Polynome, erzeugten Flächen. Man kann auch endlich viele komplexe  $\mathfrak{S}_1$  mittels endlich vieler algebraischer Elementargebiete zu einem neuen Streckenkomplex  $\mathfrak{S}$  zusammenfügen, der eine Fläche vom Grenzpunkttypus mit  $\sum_1^\infty 1/\sigma(n) < \infty$  definiert (Fig. 3).

Für Flächen  $F$  mit endlich vielen logarithmischen und algebraischen Windungspunkten lassen sich die Moduln  $\mu_n$ , bezogen auf generationsweise Ausschöpfung, so genau nach beiden Seiten abschätzen, daß man in Verbindung mit dem Modulsatz Ordnung und Defekte der diese Flächen erzeugenden Funktionen berechnen kann. Für Flächen mit endlich vielen periodischen Enden ist  $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$  divergent, gibt also die genaue Typenaussage. Wegen der unendlich vielen algebraischen Windungspunkte weicht aber die in (T) benutzte Ausschöpfung von der in der Wertverteilungslehre üblichen durch  $|z| = r \rightarrow \infty$  so stark ab, daß man zur Bestimmung von Ordnung, Defekten und Indizes der Erzeugenden eine erhebliche Abänderung der Ausschöpfung vornehmen muß.

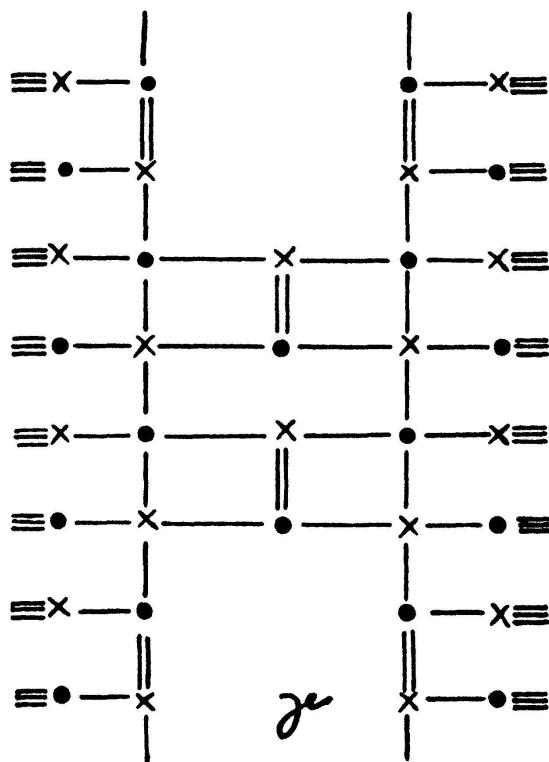


Fig. 3

(Eingegangen den 3. März 1952.)