

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni.  
**Autor:** Bäbler, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21269>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni

Von F. BÄBLER, Zürich

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn R. Cantoni (*Una rete speciale Periodico di Matematica*, Serie IV, Vol. 29, pag. 37—41) bezieht sich auf einen regulären kubischen Graphen  $G$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1). Er läßt sich nicht ohne Selbstüberschneidungen auf eine Kugel zeichnen.
- (2). Seine Zerfällung in drei Faktoren 1. Grades ist nicht möglich. Diese Zerfällbarkeit ist für einen regulären kubischen Graphen, der einer Einteilung der Kugel in Länder entspricht, bekanntlich mit der Gültigkeit des 4-Farbensatzes äquivalent. Die Eigenschaft (2) drückt also aus, daß kubische Regularität allein jedenfalls für die erwähnte Zerfällbarkeit nicht ausreicht.

Herr Cantoni unterdrückt seinen Beweis für (2) mit der Bemerkung, der Beweisgang sei zwar offenkundig, aber infolge der vielen a priori bestehenden Möglichkeiten mühsam. Dieser Umstand scheint die folgenden Überlegungen zu rechtfertigen.

Man kann nach Herrn Cantoni einen Graphen erhalten, welcher dem abstrakten Inzidenzschema von  $G$  entspricht, indem man von zwei regulären 5-Ecken  $I$  und  $II$  ausgeht, deren Umkreismittelpunkte zusammenfallen, und die so liegen, daß jeder Radius durch eine Ecke des größern, etwa  $II$ , auch durch eine Ecke des kleinern geht. In beiden werden die Ecken der Reihe nach so mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 versehen, daß auf jedem Radius zwei gleiche Ziffern liegen. Nach dem Schema: (0, 0); (1, 2); (2, 4); (3, 1); (4, 3) werden die Ecken von  $I$  und  $II$  durch fünf weitere Kanten  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4$  verbunden. Dabei ist die erste Ziffer jedes Paares eine Ecke auf  $I$ . Die neuen Kanten werden insgesamt mit  $\{k\}$  bezeichnet. Ecken von  $G$  sind nur die Ecken von  $I$  und  $II$ .

Um (2) zu beweisen, kann man etwa von den Faktoren 1. Grades von  $G$  ausgehen, das heißt jenen Systemen von paarweise fremden Kanten,

die jede Ecke aus  $G$  genau einmal enthalten. Jeder Faktor 2. Grades,  $F_2$ , entsteht ja durch Herausheben der Kanten eines Faktors  $F_1$ , exklusive Ecken aus  $G$ . Indem man bemerkt, daß ein  $F_1$  höchstens zwei Kanten von  $I$  oder  $II$  haben kann, reduziert man die Disjunktion auf drei Fälle.

- a) Es sei  $F_1 = \{k\}$ .  $F_2$  ist dann  $I + II$ .
- b)  $F_1$  enthalte nur eine Seite,  $s$ , von  $I$ . Dann müssen die Kanten  $k'$ ,  $k'' = \{k\}'$  aus  $\{k\}$ , die nicht in den Randpunkten von  $s$  entspringen auch zu  $F_1$  gehören. Nach der Struktur von  $G$  enthält aber jede Seite von  $II$  mindestens einen Endpunkt einer Kante aus  $\{k\}'$ , das heißt ein solcher Faktor 1. Grades existiert nicht. Da ein  $F_1$ , welcher eine einzige Seite von  $II$  enthielte, auch eine einzige Seite von  $I$  enthalten müßte, gibt es keine Faktoren 1. Grades, welche nur eine Seite von  $I$  bzw.  $II$  enthalten.
- c)  $F_1$  enthält zwei (nicht benachbarte) Seiten  $a$  und  $b$  von  $I$ . Die Kante  $k_i$  aus  $\{k\}$ , welche von derjenigen Ecke  $i$  von  $I$  ausgeht, die nicht mit  $a$  oder  $b$  inzident ist, muß dann auch zu  $F_1$  gehören. Die beiden nicht benachbarten Kanten  $a^*$  und  $b^*$  auf  $II$ , welche den Randpunkt  $i^*$  von  $k_i$  nicht enthalten, bilden mit  $a$ ,  $b$  und  $k_i$  zusammen  $F_1$ . Es gibt fünf solche Faktoren.

Entfernt man einen von ihnen aus  $G$ , so bleiben zwei Fünfecke übrig. Beweis:  $F_2$  enthält die beiden von der Ecke  $i$  ausgehenden Seiten  $c$ ,  $d$  auf  $I$ , sowie die von ihren Endpunkten  $i$  ausgehenden Kanten  $k_j$  und  $k_h$  aus  $\{k\}$ . Nach der Struktur von  $G$  begrenzen deren Endpunkte  $j^*$  und  $h^*$  auf  $II$  eine Seite  $l^*$ , die weder mit  $a^*$  noch mit  $b^*$  identisch sein kann, da sonst entweder  $b^*$  oder  $a^*$  mit dem Endpunkt  $i^*$  von  $k_i$  inzident sein müßte.  $l^*$  gehört also zu  $F_2$ , w. z. b. w.

(1) kann man etwa so einsehen.  $I$  und  $II$  zusammen mit den beiden von derselben Seite von  $I$  ausgehenden Kanten  $k_m$  und  $k_n$  zerlegen die Kugelfläche in vier getrennte Gebiete. Entfernt man aus  $I + II + k_n + k_m$  die beiden auf  $II$  liegenden, von der Ecke  $A$  ausgehenden Kanten, welche als 2. Randpunkte die Ecken  $m^*$  bzw.  $n^*$  von  $k_m$  bzw.  $k_n$  besitzen, so liegt  $A$  isoliert im Innern eines einfachen Polygons  $III$  und muß mit einer Ecke  $E$  auf  $I$  außerhalb  $III$  durch eine Kante verbunden werden.

(Eingegangen den 21. September 1951.)