

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	26 (1952)
<b>Artikel:</b>	Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen.
<b>Autor:</b>	Huber, Alfred
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-21268">https://doi.org/10.5169/seals-21268</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen

Von ALFRED HUBER, Zürich

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden einige Fragen aus folgender allgemeiner Problemstellung heraus behandelt: Eine Reihe von Sätzen über den Betrag einer analytischen Funktion  $f(z)$  können als Aussagen über die subharmonische Funktion  $\log |f(z)|$  gedeutet werden, und man kann fragen, ob solche Sätze auf allgemeinere subharmonische Funktionen ausgedehnt werden können.

Unter der Ordnung  $\varrho$  einer in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonischen Funktion  $u(z)$  verstehen wir die Größe

$$\varrho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} ,$$

wobei  $M(r) = \max_{|z|=r} u(z)$ .

Zunächst erweitern wir zwei Sätze von *A. S. Besicovitch* [2] über den Minimalbetrag ganzer analytischer Funktionen der Ordnung  $\varrho < 1$  auf allgemeine in der ganzen Ebene subharmonische Funktionen derselben Ordnung (Sätze 2 und 3). Dabei gehen wir von einem Darstellungssatz von *M. Heins* [10, p. 203] aus. Bis zu Hilfssatz D benutzen wir den Leitgedanken des *Wimanschen Beweises* [22] einer Vermutung von *Littlewood*. Eine zusätzliche Maßbetrachtung, die sich im Spezialfall der ganzen analytischen Funktionen sehr vereinfachen würde, liefert dann die obigenannten Sätze. Eine teilweise Übertragung der Sätze von *A. S. Besicovitch* auf eine spezielle Klasse von subharmonischen Funktionen hat *A. Dinghas* [8] im Jahre 1937 veröffentlicht, wobei er eine Abschätzungs-methode von *T. Carleman* [4] verwendete.

Dann beschränken wir uns auf eine spezielle Klasse von Funktionen

der Ordnung 0, indem wir die zusätzliche Voraussetzung  $M(r) = O(\log r)$  einführen. Es zeigt sich, daß über diese Funktionenklasse — die unter anderem die Funktionen der Form  $\log |P(z)|$  ( $P(z)$  = Polynom) in sich schließt — eine besonders weitgehende Aussage gemacht werden kann (Satz 6).

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit Problemen vom Phragmén-Lindelöfschen Typus im  $R_n$  ( $n \geq 2$ ). Wir betrachten dabei ein willkürliches, sich ins Unendliche erstreckendes Gebiet und benützen eine Abschätzungsmethode, die für  $n = 2$  von *T. Carleman* eingeführt, von *A. Dinghas* [6], [7], [8] und *A. Pfluger* [18] weiterentwickelt wurde. Wir wenden eine für den Fall harmonischer Funktionen im  $R_3$  von *H. Keller* [12] zuerst hergeleitete, zur Beziehung von *T. Carleman* [4] analoge Differentialungleichung (Formel 21) an und erweitern Sätze für den  $R_2$  von *A. Dinghas* [6] und *A. Pfluger* [18] auf den  $R_n$  ( $n \geq 2$ )<sup>1)</sup>. Die Spezialisierung auf den Fall genügend regulär berandeter Kegelgebiete liefert uns die Möglichkeit, die erhaltenen Resultate mit den Sätzen von *L. Ahlfors* und *M. Heins* [1], *J. Deny* und *P. Lelong* [5] und *J. Lelong-Ferrand* [14], [15] zu vergleichen.

Die Begriffe „monoton wachsend“ bzw. „monoton fallend“ sind stets im schwachen Sinne — „nicht abnehmend“ bzw. „nicht zunehmend“ — aufzufassen.

Unter  $mE$  ( $E$  = meßbare lineare Punktmenge) verstehen wir das lineare Lebesguesche Maß, unter  $m_e E$  ( $E$  = beliebige lineare Punktmenge) das äußere lineare Lebesguesche Maß von  $E$ .

Die in dieser Arbeit gültige Definition des „Graphs“ einer monotonen Funktion wurde dem Lehrbuch von *C. Carathéodory* entnommen [3, p. 161].

Für die Anregung zur vorliegenden Arbeit, sowie für viele wertvolle Ratschläge während ihrer Entstehung, bin ich Herrn Prof. Dr. *A. Pfluger* zu herzlichem Dank verpflichtet.

## I. Über die in der ganzen endlichen Ebene subharmonischen Funktionen, deren Ordnung kleiner als 1 ist

$u(z)$  sei eine in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonische Funktion der Ordnung  $\varrho$  ( $0 \leq \varrho < 1$ ). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir im folgenden stets annehmen, daß  $u(z)$  in einer gewissen Um-

<sup>1)</sup> Vor kurzem — nach beendigter Redaktion der vorliegenden Arbeit — hat *A. Dinghas* eine Verallgemeinerung seiner Abschätzung auf höherdimensionale Räume veröffentlicht [9].

gebung des Nullpunktes harmonisch und daß  $u(0) = 0$  sei [10, p. 202]. *M. Heins* [10, p. 203] hat bewiesen, daß sich dann  $u(z)$  in folgender Form durch ein Stieltjes-Integral darstellen läßt:

$$u(z) = \int \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) .$$

Die Integration ist über die ganze  $\zeta$ -Ebene zu erstrecken.  $\mu(e_\zeta)$  ist eine für alle beschränkten Borelmengen der  $\zeta$ -Ebene definierte, endliche, positive, vollständige additive Mengenfunktion. Neben  $u(z)$  betrachten wir die Funktion

$$\bar{u}(z) = \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{z}{t} \right| d\mu(t) ,$$

wobei  $\mu(t) = \mu[|\zeta| < t]$ .  $\bar{u}(z)$  ist ebenfalls subharmonisch in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene und besitzt dieselbe Ordnung wie  $u(z)$ . Um letzteres zu zeigen, beachte man, daß einerseits die Ungleichung  $\bar{\varrho} \geq \varrho$  unmittelbar aus der Definition von  $\bar{u}(z)$  folgt, und andererseits die Beziehung  $\bar{\varrho} \leq \varrho$  leicht aus der von *M. Heins* [10, p. 202] hergeleiteten Formel

$$\mu(t) = O(t^{\varrho+\varepsilon}) \quad (1)$$

(gültig für beliebiges  $\varepsilon > 0$ ) erhalten werden kann.

Es bezeichne

$$\begin{aligned} M(r) &= \max_{|z|=r} u(z) & m(r) &= \inf_{|z|=r} u(z) \\ \bar{M}(r) &= \max_{|z|=r} \bar{u}(z) & \bar{m}(r) &= \inf_{|z|=r} \bar{u}(z) \end{aligned}$$

**Hilfssatz A. Behauptung:**

$$\frac{\bar{m}(r)}{\bar{M}(r)} \leq \frac{m(r)}{M(r)} . \quad (2)$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \log \left| 1 - \left| \frac{z}{\zeta} \right| \right| &\leq \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \leq \log \left| 1 + \left| \frac{z}{\zeta} \right| \right| \\ \bar{m}(r) &= \int \log \left| 1 - \left| \frac{z}{\zeta} \right| \right| d\mu(e_\zeta) \leq u(z) \leq \int \log \left| 1 + \left| \frac{z}{\zeta} \right| \right| d\mu(e_\zeta) = \bar{M}(r) . \end{aligned}$$

Also  $\bar{m}(r) \leq m(r) \leq M(r) \leq \bar{M}(r)$ . Daraus folgt (2).

Auf Grund dieses Hilfssatzes dürfen wir uns in den folgenden Beweisen (mit Ausnahme desjenigen von Satz 5) stets von vornherein auf Funktionen beschränken, deren Massenbelegung ganz auf der negativen reellen Achse liegt:

$$u(z) = \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{z}{t} \right| d\mu(t) .$$

Wir definieren für  $\mu \geq 0$  eine monoton wachsende und nach oben halbstetige Funktion  $t(\mu)$ , indem wir setzen :

$$t(\mu_0) = \sup_{\mu(t_0) \leq \mu_0} t_0 .$$

$u(z)$  lässt sich damit durch das Riemann-Integral

$$u(z) = \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{z}{t(\mu)} \right| d\mu$$

darstellen.

Nun sei  $\varrho'$  eine beliebige, aber fest gewählte Zahl aus dem offenen Intervall  $(\varrho, 1)$ . Es bezeichne ferner  $\lambda$  eine vorläufig beliebige positive Konstante. Es sei  $a > 0$  so gewählt, daß  $\mu(a) > 0$ . Wir definieren :

$$\mu^*(t; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < a \\ \lambda t^{\varrho'} & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

und betrachten die subharmonische Funktion

$$u^*(z; \lambda) = \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{z}{t} \right| d\mu^*(t; \lambda) .$$

Es ist

$$M^*(r; \lambda) = \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{r}{t} \right| d\mu^*(t; \lambda) = \frac{\lambda \pi r^{\varrho'}}{\sin \pi \varrho'} + \lambda \cdot o(r^{\varrho'})$$

$$m^*(r; \lambda) = \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{r}{t} \right| d\mu^*(t; \lambda) = \lambda \pi r^{\varrho'} \cdot \operatorname{ctg} \pi \varrho' + \lambda \cdot o(r^{\varrho'}) .$$

Daraus folgt : Unabhängig von  $\lambda$  existiert eine Zahl  $R_0$  derart, daß :

$$m^*(r; \lambda) > (\cos \pi \varrho' - \varepsilon) M^*(r; \lambda) \quad (3)$$

für  $r \geq R_0$ .

Sei  $\bar{R} = \max [a + 1, R_0]$   
und

$$\lambda_0 = \max_{0 \leq t \leq \bar{R}} \left[ \frac{\mu(t+0)}{t^{\varrho'}} \right] . \quad (4)$$

Von nun an und mit Hilfssatz D bedeute  $\lambda$  zunächst eine feste Konstante aus dem Intervall  $0 < \lambda \leq \lambda_0$ . Wir verzichten infolgedessen während dieser Betrachtungen darauf, die Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$  durch die Bezeichnung zu betonen.

Wir bezeichnen mit  $t^*(\mu)$  die für  $\mu > 0$  eindeutige Umkehrfunktion von  $\mu^*(t)$ . Aus (4) folgt :

$$t^*(\mu) \geq t(\mu) \quad \text{für} \quad 0 < \mu \leq \mu^*(\bar{R}) , \quad (5)$$

Aus (1) folgt, daß für genügend große  $\mu$  die Ungleichung gilt :

$$t^*(\mu) \leq t(\mu) . \quad (6)$$

**Hilfssatz B.** Es existiert eine Zahl  $R$  mit folgenden Eigenschaften

$$1) \quad \int_{\mu}^{\mu(R)} \log \frac{1 + \frac{R}{t(\mu)}}{1 + \frac{R}{t^*(\mu)}} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R)) \quad (7)$$

$$2) \quad \int_{\mu(R)}^{\mu} \log \frac{1 + \frac{R}{t(\mu)}}{1 + \frac{R}{t^*(\mu)}} d\mu \leq 0 \quad (\mu \geq \mu(R)) \quad (8)$$

$$3) \quad \mu(R) = \mu^*(R) \quad (9)$$

*Beweis.* Es gibt eine Zahl  $\mu_1$  derart, daß erstens aus  $0 < \mu < \mu_1$  stets die Gültigkeit von (5) folgt und zweitens  $\mu_1$  die größte Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Ferner existiert eine Zahl  $\mu_2$  derart, daß erstens aus  $\mu > \mu_2$  die Gültigkeit von (6) folgt und zweitens  $\mu_2$  die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Wir führen folgende Abkürzungen ein :

$$\Phi(A, f(\mu); \mu) = \frac{1 + \frac{A}{f(\mu)}}{1 + \frac{A}{t^*(\mu)}} ,$$

$$R_I = t^*(\mu_1) , \quad R_{II} = t^*(\mu_2) .$$

Man sieht leicht ein, daß für beliebiges  $R > 0$  gilt :

$$\int_{\mu}^{\mu_1} \log \Phi(R, t; \mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_1) \quad (10)$$

und

$$\int_{\mu_2}^{\mu} \log \Phi(R, t; \mu) d\mu \leq 0 \quad (\mu \geq \mu_2) \quad (11)$$

Ist  $\mu_1 = \mu_2$ , so ist nichts mehr zu beweisen. Sei also  $\mu_1 < \mu_2$ . Dann bilden diejenigen Punkte des Intervalls  $\mu_1 < \mu < \mu_2$ , für die  $t(\mu) < t^*(\mu)$  ist, eine nicht leere offene Menge 0, denn die Funktion  $t(\mu) - t^*(\mu)$  ist nach oben halbstetig. 0 kann als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen offenen Intervallen aufgefaßt werden. Zu jeder vorgegebenen

natürlichen Zahl  $n$  gibt es eine aus endlich vielen dieser Intervalle bestehende offene Punktmenge  $0_n$ , die folgende Bedingung erfüllt:

$$m(0 - 0_n) < \frac{1}{n \cdot \log \left( 1 + \frac{R_{II}}{R_I} \right)} . \quad (12)$$

Wir definieren:

$$t_n(\mu) = \begin{cases} t^*(\mu) & \text{auf } 0 - 0_n , \\ t(\mu) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$t_n(\mu)$  wächst monoton. Wir zeigen nun zunächst: Es gibt ein  $R_n$  derart, daß

$$\int_{\mu}^{\mu(R_n)} \log \Phi(R_n, t_n; \mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R_n)) , \quad (13)$$

$$\int_{\mu(R_n)}^{\mu} \log \Phi(R_n, t_n; \mu) d\mu \leq 0 \quad (\mu \geq \mu(R_n)) . \quad (14)$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Funktion

$$f(\mu) = \int_{\mu_1}^{\mu} \log \Phi(R_I, t_n; \mu) d\mu \quad (\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2) .$$

In einer gewissen Umgebung von  $\mu_1$  ist

$$f(\mu) \leq 0 . \quad (15)$$

Gilt (15) im ganzen Intervall  $(\mu_1, \mu_2)$ , so brauchen wir nur  $R_n = R_I$  zu setzen, und die Ungleichungen (13) und (14) sind erfüllt. Andernfalls sei  $\mu_3$  die untere Grenze aller  $\mu$  mit der Eigenschaft, daß  $f(\mu) > 0$ . Wie man leicht einsieht, muß  $\mu_3$  auf der abgeschlossenen Hülle  $\bar{0}_n$  von  $0_n$  liegen. Es sei  $\mu_4$  der vom Nullpunkt weiter entfernte Endpunkt desjenigen Intervalls von  $\bar{0}_n$ , dem  $\mu_3$  angehört. Es ist

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \log \Phi(R_I, t_n; \mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) .$$

Daraus folgt

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \log \Phi(t^*(\mu_4), t_n; \mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) . \quad (16)$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mu}^{\mu_4} \log \Phi(R_I, t_n; \mu) d\mu = \int_{\mu}^{\mu_4} \log \left( 1 + \frac{R_I \left( \frac{1}{t_n} - \frac{1}{t^*} \right)}{1 + \frac{R_I}{t^*}} \right) d\mu \\ &\leq \int_{\mu}^{\mu_4} \frac{R_I \left( \frac{1}{t_n} - \frac{1}{t^*} \right)}{1 + \frac{R_I}{t^*}} d\mu \quad (\mu \leq \mu_4) . \end{aligned}$$

Somit

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \frac{\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t^*}}{1 + \frac{R_I}{t^*}} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) . \quad (17)$$

Da die Funktion

$$\frac{1}{1 + \frac{t^*(\mu_4)}{t_n(\mu)}}$$

im Intervall  $0 < \mu \leq \mu_4$  monoton wachsend, positiv und beschränkt ist, folgt aus (17) unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \frac{\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t^*}}{\left(1 + \frac{t^*(\mu_4)}{t_n}\right)\left(1 + \frac{R_I}{t^*}\right)} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) . \quad (18)$$

(18) ist äquivalent mit

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \frac{\psi(\mu)}{1 + \psi(\mu)} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) ,$$

wobei

$$\psi(\mu) = \frac{(t^*(\mu_4) - R_I)\left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t^*}\right)}{\left(1 + \frac{t^*(\mu_4)}{t^*}\right)\left(1 + \frac{R_I}{t_n}\right)} .$$

Es ist  $1 + \psi(\mu) > 0$ . Wir dürfen also schließen

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \log(1 + \psi(\mu)) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) .$$

Also

$$\int_{\mu}^{\mu_4} \log \Phi(t^*(\mu_4), t_n; \mu) d\mu \geq \int_{\mu}^{\mu_4} \log \Phi(R_I, t_n; \mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu_4) ,$$

womit (16) bewiesen ist. Wir betrachten nun

$$g(\mu) = \int_{\mu_4}^{\mu} \log \Phi(t^*(\mu_4), t_n; \mu) d\mu .$$

Ist  $g(\mu) \leq 0$  für  $\mu_4 \leq \mu \leq \mu_2$ , so brauchen wir nur  $R_n = t^*(\mu_4)$  zu setzen, und es gelten die Beziehungen (13) und (14). Andernfalls wiederholen wir unsere Schlußweise. Da die Menge  $\bar{\Omega}_n$  aus endlich vielen Intervallen besteht, finden wir nach endlich vielen Schritten ein  $R_n$  derart, daß (13) und (14) erfüllt sind.

Aus (13) folgt

$$\int_{\mu}^{\mu(R_n)} \log \Phi(R_n, t; \mu) d\mu + \int_{[0-0_n] \cap (\mu, \mu(R_n))} \log \frac{1 + \frac{R_n}{t_n}}{1 + \frac{R_n}{t}} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R_n)).$$

Unter Anwendung von (12) schließt man

$$\int_{\mu}^{\mu(R_n)} \log \Phi(R_n, t; \mu) d\mu \geq -\frac{1}{n} \quad (\mu \leq \mu(R_n)). \quad (19)$$

Ganz analog erhält man aus (12) und (14) :

$$\int_{\mu(R_n)}^{\mu} \log \Phi(R_n, t; \mu) d\mu \leq +\frac{1}{n} \quad (\mu \geq \mu(R_n)). \quad (20)$$

Die beschränkte Zahlenfolge  $\{R_n\}$  enthält eine konvergente Teilfolge  $\{R_{n_k}\}$ . Sei

$$R = \lim_{n_k \rightarrow \infty} R_{n_k}. \quad (21)$$

Da die Funktion  $\log \Phi(R, t; \mu)$  beschränkt ist, folgt aus (19) und (21) die Beziehung (7) und aus (20) und (21) die Ungleichung (8).  $\mu(t)$  ist im Punkte  $t = R$  stetig und es gilt (9), da sich sonst leicht ein Widerspruch zu (7) oder (8) konstruieren lässt.

**Hilfssatz C. Voraussetzungen.**  $R$  sei die im Hilfssatz B auftretende Zahl. Die Zahl  $\alpha$  erfülle folgende Bedingung

$$\alpha > \left[ \frac{d\mu^*}{dt} \right]_{t=R}.$$

*Behauptungen :*

$$\text{I. } \int_{\mu}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\frac{R}{t^*} + 1} d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R)) \quad (22)$$

$$\int_{\mu(R)}^{\mu} \frac{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{t}}{1 + \frac{R}{t}} d\mu \geq 0 \quad (\mu \geq \mu(R)) \quad (23)$$

II. Es gibt ein  $\delta > 0$  derart, daß aus  $|t - R| < \delta$  folgt :

$$\left| \frac{\mu(t) - \mu(R)}{t - R} \right| < 3\alpha.$$

III.  $\left| \frac{t(\mu) - t^*(\mu)}{t(\mu) - R} \right|$  ist beschränkt für  $\mu \neq \mu(R)$ .

IV. Ist  $\mu(t)$  im Punkte  $t = R$  differenzierbar, so gilt außerdem :

$$0 \leq \left[ \frac{d\mu}{dt} \right]_{t=R} \leq \left[ \frac{d\mu^*}{dt} \right]_{t=R}.$$

*Beweis.* I. Die Ungleichung (7) läßt sich in folgender Form schreiben

$$\int_{\mu}^{\mu(R)} \log \left( 1 + \frac{R \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^*} \right)}{\frac{R}{t^*} + 1} \right) d\mu \geq 0 . \quad (\mu \leq \mu(R)) .$$

Daraus folgt unmittelbar (22). Analog erhält man (23) aus (8).

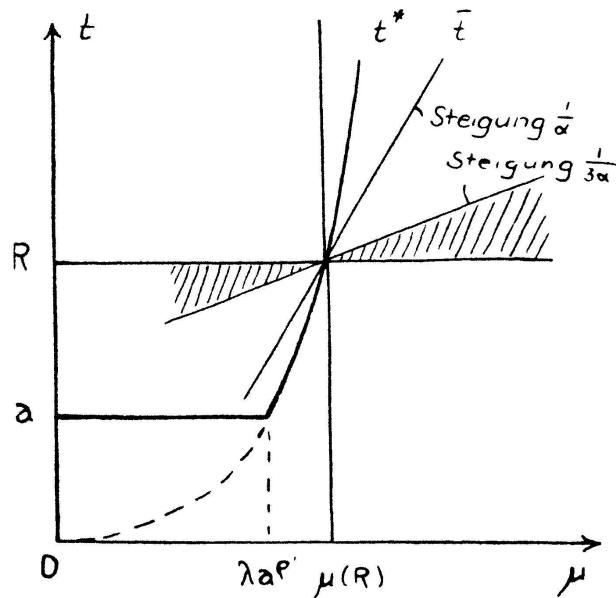


Fig. 1

II. Der Beweis erfolgt indirekt und unter getrennter Behandlung der beiden Fälle  $t < R$  und  $t > R$ .

a)  $t < R$ .

$$\text{Sei } \bar{t}(\mu) = \frac{1}{\alpha} [\mu - \mu(R)] + R .$$

Falls die Behauptung nicht stimmt, gibt es beliebig nahe bei  $\mu(R)$   $\mu$ -Werte ( $\mu < \mu(R)$ ) derart, daß der Punkt  $(\mu, t(\mu))$  in den in Fig. 1 schraffierten Winkelraum fällt. Dann existiert aber ein  $\mu'$ , das folgende Bedingungen erfüllt:

$$1) \quad \lambda a^{\alpha'} < \mu' < \mu(R) . \quad 3) \quad 2 \leq \frac{R}{t^*(\mu')} + 1 < 4 \quad \text{für } \mu' \leq \mu \leq \mu(R) .$$

$$2) \quad \left| \frac{t(\mu') - \bar{t}(\mu')}{t(\mu') - R} \right| > 2 \quad 4) \quad t^*(\mu) < \bar{t}(\mu) \quad \text{für } \mu' \leq \mu \leq \mu(R) .$$

Sei  $\Delta = \frac{\mu(R) - \mu'}{3}$ . Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{\mu'}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\frac{R}{t^*} + 1} d\mu < \int_{\mu'}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{\bar{t}(\mu' + 2\Delta)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu)}}{\frac{R}{t^*(\mu)} + 1} d\mu \\ & < \frac{1}{4} \int_{\mu'}^{\mu' + 2\Delta} \left( \frac{1}{\bar{t}(\mu' + 2\Delta)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu)} \right) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\mu' + 2\Delta}^{\mu(R)} \left( \frac{1}{\bar{t}(\mu' + 2\Delta)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu)} \right) d\mu \\ & < - \frac{\alpha \Delta^2}{4(\alpha R - \Delta)^2} . \end{aligned}$$

Dies widerspricht aber (22).

b)  $t > R$ .

Falls die Behauptung falsch ist, gibt es beliebig nahe bei  $\mu(R)$   $\mu$ -Werte ( $\mu > \mu(R)$ ) derart, daß der Punkt  $(\mu, t(\mu))$  in den in Fig. 1 schraffierten abgeschlossenen Winkelraum fällt. Dann existiert aber ein  $\mu''$ , das folgenden Bedingungen genügt:

$$1) \quad \mu(R) < \mu'' < \mu(R) + R\alpha \quad 3) \quad 2 \geq \frac{R}{t(\mu)} + 1 > \frac{4}{3} \quad \text{für } \mu(R) \leq \mu \leq \mu''$$

$$2) \quad \left| \frac{t(\mu'') - \bar{t}(\mu'')}{t(\mu'') - R} \right| > 2 \quad 4) \quad t^*(\mu) > \bar{t}(\mu) \quad \text{für } \mu(R) \leq \mu \leq \mu''$$

Sei  $\Delta = \frac{\mu'' - \mu(R)}{3}$ . Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{\mu(R)}^{\mu''} \frac{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{t}}{1 + \frac{R}{t}} d\mu < \int_{\mu(R)}^{\mu''} \frac{\frac{1}{\bar{t}(\mu)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu(R) + \Delta)}}{1 + \frac{R}{t(\mu)}} d\mu \\ & < \frac{3}{4} \int_{\mu(R)}^{\mu(R) + \Delta} \left( \frac{1}{\bar{t}(\mu)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu(R) + \Delta)} \right) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\mu(R) + \Delta}^{\mu''} \left( \frac{1}{\bar{t}(\mu)} - \frac{1}{\bar{t}(\mu(R) + \Delta)} \right) d\mu \\ & < \frac{\Delta \alpha}{8} \left[ \frac{3}{R\alpha} - \frac{7}{R\alpha + \Delta} - \frac{4}{R\alpha + 3\Delta} \right] < 0. \end{aligned}$$

Dies widerspricht aber (23).

III. Falls die Behauptung nicht richtig wäre, müßte die Funktion  $t(\mu)$  für beliebig nahe bei  $\mu(R)$  liegende  $\mu$ -Werte in den in Fig. 1 schraffierten Winkelraum eindringen. Also könnte derselbe Widerspruch wie im Beweise zu II konstruiert werden.

IV. Falls

$$\left[ \frac{d\mu}{dt} \right]_{t=R} > \left[ \frac{d\mu^*}{dt} \right]_{t=R}$$

wäre, müßte für eine gewisse Rechtsumgebung von  $\mu = \mu(R)$   $t(\mu)$  kleiner als  $t^*(\mu)$  sein. Damit ergibt sich ein Widerspruch zu (23).

**Hilfssatz D.** *Voraussetzung:*  $R$  sei die im Hilfssatz B auftretende Zahl.

*Behauptung:*

$$m(R) > (\cos \pi \varrho' - \varepsilon) M(R). \quad (24)$$

*Beweis.* Sei

$$\chi_n(\mu) = \min \left[ n, \frac{1}{\frac{R}{t(\mu)} - 1} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Da  $\chi_n(\mu)$  beschränkt, monoton wachsend und positiv ist für  $0 \leq \mu \leq \mu(R)$ , folgt aus (22) unter Benützung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\int_{\mu}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\frac{R}{t^*} + 1} \chi_n(\mu) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R); n = 1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

Da

$$\left| \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\left( \frac{R}{t^*} + 1 \right) \left( \frac{R}{t} - 1 \right)} \right| < \frac{1}{R} \left| \frac{t - t^*}{t - R} \right|, \quad (\mu \leq \mu(R))$$

folgt aus Hilfssatz C III die gleichmäßige Beschränktheit der Integranden in (25). Somit ist

$$\int_{\mu}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\left( \frac{R}{t^*} + 1 \right) \left( \frac{R}{t} - 1 \right)} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu}^{\mu(R)} \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^*}}{\frac{R}{t^*} + 1} \chi_n d\mu \geq 0$$

$$(\mu \leq \mu(R)). \quad (26)$$

Sei ferner

$$\lambda_n(\mu) = \min \left[ n, \frac{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{t}}{1 - \frac{R}{t}} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Da  $\lambda_n(\mu)$  beschränkt, monoton fallend und positiv ist für  $\mu \geq \mu(R)$ , folgt aus (23) unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\int_{\mu(R)}^{\mu} \frac{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{t}}{1 + \frac{R}{t}} \lambda_n d\mu \geq 0 \quad (\mu \geq \mu(R); n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

Aus der Ungleichung

$$\left| \frac{\frac{1}{t^{*2}} - \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{R^2}{t^2}} \right| < \frac{2}{R^2} \left| \frac{t - t^*}{t - R} \right| \quad (\mu \geq \mu(R))$$

und aus Hilfssatz C III folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Integranden von (27). Daraus schließt man

$$\int_{\mu(R)}^{\mu} \frac{\frac{1}{t^{*2}} - \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{R^2}{t^2}} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu(R)}^{\mu} \frac{\frac{1}{t^*} - \frac{1}{t}}{1 + \frac{R}{t}} \lambda_n d\mu \geq 0 \quad (\mu \geq \mu(R)) \quad (28)$$

(26) und (28) sind äquivalent zu

$$\int_{\mu}^{\mu(R)} \frac{\vartheta(\mu)}{1 + \vartheta(\mu)} d\mu \geq 0 , \quad \text{wobei} \quad \vartheta(\mu) = \frac{2 \left( \frac{R}{t} - \frac{R}{t^*} \right)}{\left( \frac{R}{t} + 1 \right) \left( \frac{R}{t^*} - 1 \right)} \quad (\mu \leq \mu(R)) \quad (29)$$

und

$$\int_{\mu(R)}^{\mu} \frac{\eta(\mu)}{1 + \eta(\mu)} d\mu \geq 0 , \quad \text{wobei} \quad \eta(\mu) = \frac{\frac{R^2}{t^{*2}} - \frac{R^2}{t^2}}{1 - \frac{R^2}{t^{*2}}} \quad (\mu \geq \mu(R)) \quad (30)$$

Da  $1 + \vartheta(\mu) > 0$  und  $1 + \eta(\mu) > 0$ , folgt aus (29) und (30)

$$\int_{\mu}^{\mu(R)} \log (1 + \vartheta(\mu)) d\mu \geq 0 \quad (\mu \leq \mu(R)) \quad (31)$$

$$\int_{\mu(R)}^{\mu} \log (1 + \eta(\mu)) d\mu \geq 0 \quad (\mu \geq \mu(R)) \quad (32)$$

Daraus folgen

$$\int_0^{\mu(R)} \log \frac{\frac{R}{t} - 1}{\frac{R}{t} + 1} d\mu \geq \int_0^{\mu(R)} \log \frac{\frac{R}{t^*} - 1}{\frac{R}{t^*} + 1} d\mu \quad (33)$$

$$\int_{\mu(R)}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{R^2}{t^2} \right) d\mu \geq \int_{\mu(R)}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{R^2}{t^{*2}} \right) d\mu . \quad (34)$$

Aus (7) und (8) folgt

$$2 \int_0^{\mu(R)} \log \left( 1 + \frac{R}{t} \right) d\mu \geq 2 \int_0^{\mu(R)} \log \left( 1 + \frac{R}{t^*} \right) d\mu , \quad (35)$$

$$-2 \int_{\mu(R)}^{\infty} \log \left(1 + \frac{R}{t}\right) d\mu \geq -2 \int_{\mu(R)}^{\infty} \log \left(1 + \frac{R}{t^*}\right) d\mu . \quad (36)$$

Durch Addition von (33), (34) und (35) erhalten wir

$$m(R) + M(R) \geq m^*(R) + M^*(R) . \quad (37)$$

Addition von (33), (34) und (36) ergibt

$$m(R) - M(R) \geq m^*(R) - M^*(R) . \quad (38)$$

Aus (37) und (38) folgt

$$m(R) - m^*(R) \geq k [M(R) - M^*(R)] \quad (-1 \leq k \leq +1) . \quad (39)$$

Setzt man  $k = \cos \pi \varrho' - \varepsilon$  und kombiniert man (39) mit (3), so erhält man sofort (24). q. e. d.

Läßt man  $\lambda$  eine Nullfolge durchlaufen, so strebt  $R(\lambda)$  gegen unendlich. Da man ferner  $\varrho'$  beliebig nahe bei  $\varrho$  und  $\varepsilon$  beliebig klein wählen kann, erhalten wir als Korollar zu Hilfssatz D :

**Satz 1.** Ist  $u(z)$  eine in der ganzen  $z$ -Ebene subharmonische Funktion der Ordnung  $\varrho$  ( $0 \leq \varrho < 1$ ), so gilt

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{M(r)} \geq \cos \pi \varrho .$$

Dieser Satz ist eine Erweiterung eines bekannten Satzes aus der Theorie der ganzen analytischen Funktionen, welcher von *J. E. Littlewood* vermutet und von *G. Valiron* [21] und *A. Wiman* [22] unabhängig gleichzeitig zum erstenmal bewiesen wurde. Ein weiterer Beweis ist in einer von *G. Pólya* [19] später veröffentlichten Arbeit enthalten. Die Grundidee unseres Beweises von Hilfssatz D ist diejenige des Beweises von *A. Wiman*.

**Satz 2.** Sei  $u(z)$  eine in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonische Funktion der Ordnung  $\varrho$  ( $0 \leq \varrho < 1$ ); es sei ferner  $1 > \varrho' > \varrho$ . Dann ist

$$\text{Obere Dichte } E \{m(r) > M(r) \cos \pi \varrho'\} \geq 1 - \frac{\varrho}{\varrho'} . \quad (40)$$

(Anmerkung: Unter der obigen Dichte einer meßbaren Punktmenge  $E$  auf der  $r$ -Achse versteht man die Größe

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} m [E \cap (0, r)] .$$

Auch dieser Satz ist bekannt, wenn man sich auf Funktionen der Form  $\log |f(z)|$  ( $f(z) = \text{ganze analytische Funktion}$ ) beschränkt. Er wurde im Jahre 1927 von *A. S. Besicovitch* [2; Theorem I] bewiesen. Im Jahre 1937 gelang es *A. Dinghas*, einen Teil der Aussage auf eine allgemeinere Funktionenklasse auszudehnen [8; Satz III], wobei er eine Methode von *T. Carleman* [4] anwendete.

Zum Beweise betrachten wir in der  $(t, \mu)$ -Ebene die Graphen der Funktionen  $\mu(t)$  und  $\mu^*(t; \lambda)$ ,  $(0 \leq \lambda \leq \lambda_0)$  (vgl. Fig. 2).

Wir definieren  $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Sei  $t_n$  der kleinste,  $t'_{n-1}$  der größte aller  $t$ -Werte, die die Ungleichung  $\mu(t-0) \leq \mu^*(t; \lambda_n) \leq \mu(t+0)$  befriedigen.

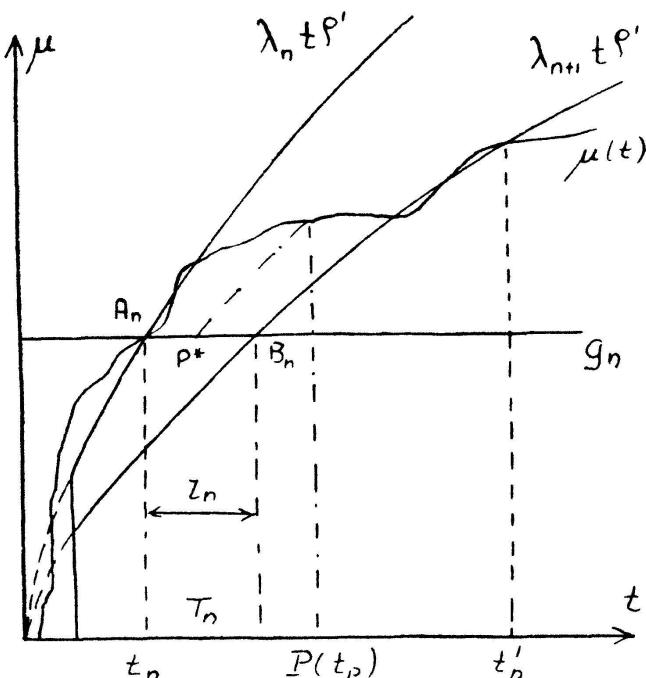


Fig. 2

gehen, mit  $g_n$  und erhalten eine Menge  $P^* \subset g_n$ . Wir definieren:  $A^* = \bigcup_{P \in A} P^*$ . Diese Abbildung führt Intervalle in Intervalle über.

Für jedes  $\lambda$  aus dem Intervall  $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$  gibt es einen Wert  $t = R(\lambda)$ , für den die Hilfssätze B, C und D gelten. Es sei mit  $D_n$  die Menge dieser  $t$ -Werte bezeichnet. Aus den vorangehenden Hilfssätzen folgt:  $D_n^* = \text{Strecke } A_n B_n$ , also

$$m D_n^* = l_n. \quad (41)$$

Die Funktion  $\mu(t)$  ist monoton und deshalb fast überall auf  $(t_n, t'_n)$  differenzierbar. Es sei  $\Phi$  die Menge derjenigen Punkte von  $D_n$ , in denen  $\mu(t)$  nicht differenzierbar ist. Es ist  $m \Phi = 0$ .

Wir betrachten die Parallelen  $g_n$  zur  $t$ -Achse durch den Punkt  $A_n (t_n, \lambda_n t_n^{q'})$ . Es sei  $B_n$  der Schnittpunkt von  $g_n$  mit der Parabel  $\lambda_{n+1} t^{q'}$ . Mit  $l_n$  sei die Länge des Intervalls  $A_n B_n$  und mit  $T_n$  dessen Projektion auf die  $t$ -Achse benannt.

Jeder Punktmenge  $A \subset (t_n, t'_n)$  ordnen wir eine Menge  $A^* \subset g_n$  zu nach folgender Vorschrift: Sei  $P$  (Abszisse  $t_P$ ) ein Punkt von  $A$ . Wir schneiden alle diejenigen Parabeln, die durch die Punkte  $(t_P, \mu)$ ,  $\mu(t_P - 0) \leq \mu \leq \mu(t_P + 0)$ ,

Zu jedem beschränkten Gebiet  $G$  des ersten Quadranten der  $(t, \mu)$ -Ebene, das sowohl von der  $t$ - als auch von der  $\mu$ -Achse einen positiven Abstand besitzt, gibt es zwei positive Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  derart, daß stets  $\alpha > \tau > \beta$ , wobei  $\tau$  die Steigung der Tangente unseres Parabelfeldes in einem beliebigen Punkte von  $G$  darstellt. Daraus und aus Hilfssatz C II folgt:

Zu jedem Punkte  $P \in \Phi$  gibt es eine Zahl  $\delta(P) > 0$  derart, daß

$$\left| \frac{\mu(t_P) - \mu(t)}{t_P - t} \right| < 3\alpha \quad \text{für} \\ |t - t_P| < \delta(P) \quad (\text{Umgebung } U(P))$$

und: Ist  $I$  ein Teilintervall von  $U(P)$ , das  $P$  enthält, so gilt

$$mI^* < \frac{3\alpha}{\beta} mI = k \cdot mI .$$

Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  — und damit auch  $k$  — können so gewählt werden, daß sie für alle Punkte  $P \in \Phi$  dieselben sind.

Sei nun  $O$  eine offene Menge von beliebig kleinem Maß, welche  $\Phi$  enthält.  $O$  ist Vereinigungsmenge abzählbar vieler offener Intervalle:  $O = \bigcup_k I_k$ . Die Menge  $(I_k \cap \Phi)$  läßt sich durch abzählbar viele [3, p. 46] der  $U(P)$ 's überdecken:  $\{U(P_{kj})\}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Wir dürfen dabei verlangen:  $P_{kj} \in I_k$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Sei

$$R = \bigcup_{k,j} (I_k \cap U(P_{kj})) .$$

$R$  ist offen und es ist  $\Phi \subset R \subset O$ . Also

$$\Phi^* \subset R^* \tag{42}$$

$$m R \leq m O \tag{43}$$

$R$  ist Vereinigungsmenge abzählbar vieler offener Intervalle:  $R = \bigcup_h I'_h$ . Sei  $I''_h \subset I'_h$  ein abgeschlossenes Intervall derart, daß

$$m(I'_h - I''_h) < \frac{1}{l \cdot 2^h} \quad (l = \text{natürliche Zahl}) .$$

$I''_h$  wird durch endlich viele der  $(I_k \cap U(P_{kj}))$  ( $k, j = 1, 2, 3, \dots$ ) überdeckt. Wir dürfen annehmen, daß  $I''_h$  die entsprechenden Punkte  $P_{kj}$

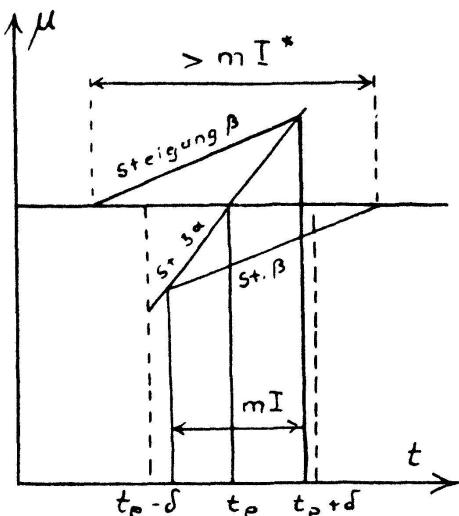


Fig. 3

ebenfalls enthält; durch eine eventuelle Vergrößerung von  $I''_h$  lässt sich dies jedenfalls erreichen. Man überlegt sich leicht, daß  $m I''_h^* < k m I''_h$ . Also  $m(\bigcup_h I''_h^*) \leq \sum_h m I''_h^* < k \sum_h m I''_h = k m(\bigcup_h I''_h)$ . Für  $l \rightarrow \infty$  strebt  $\bigcup_h I''_h$  gegen  $R$ ,  $\bigcup_h I''_h^*$  gegen  $R^*$ , und es folgt:

$$m R^* < k m R . \quad (44)$$

Da 0 von beliebig kleinem Maß sein kann, folgt aus (42), (43) und (44)

$$m \Phi^* = 0 . \quad (45)$$

Es sei

$$\Delta = D_n - \Phi . \quad (46)$$

Die Steigung der Tangenten des Parabelfeldes ist eine stetige Funktion in der  $(t, \mu)$ -Ebene. Wir bezeichnen mit  $\gamma$  die Steigung der durch den Punkt  $(t_P, \mu(t_P))$ ,  $(t_P \in \Delta)$  gehenden Parabel in diesem Punkt. Aus Obigem und aus Hilfssatz C IV folgt, daß zu jedem Punkt  $P \in \Delta$  eine Zahl  $\delta(P) > 0$  existiert derart, daß

- 1) das Graph der Funktion  $\mu(t)$  für  $|t - t_P| < \delta(P)$  in den in Fig. 4 schraffierten abgeschlossenen Winkelraum fällt,
- 2) die Steigung der Tangenten des Parabelfeldes im Rechteck  $ABCD$  (siehe Fig. 4) größer als  $\frac{3}{4} \gamma$  ist.

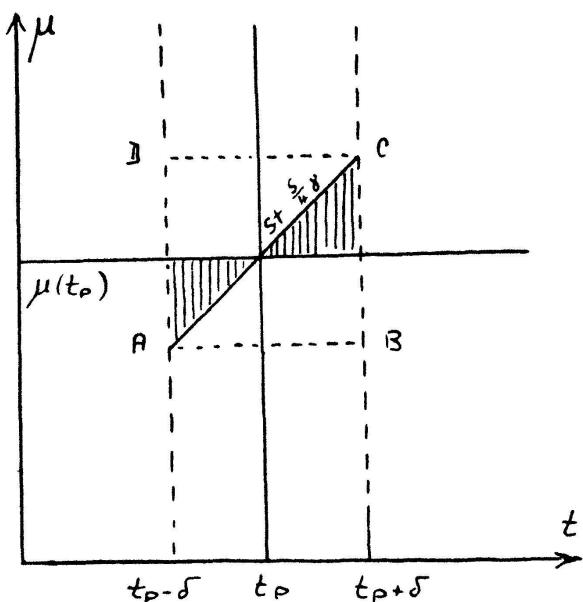


Fig. 4

Nach leichter Abschätzung findet man: Ist

$$I \subset U(P) \{ |t - t_P| < \delta(P) \}$$

ein Intervall, das den Punkt  $P$  enthält, dann gilt

$$m I^* \leq m I .$$

Sei nun  $0$  eine beliebige offene Menge, die  $\Delta$  enthält.  $0$  ist Vereinigungsmenge abzählbar vieler Intervalle:  $0 = \bigcup_k I_k$ . Die Menge  $(I_k \cap \Delta)$  wird durch abzählbar viele der  $U(P)$ 's überdeckt [3, p. 46]:  $\{U(P_{kj})\} (j = 1, 2, 3, \dots)$ .

Wir dürfen verlangen, daß  $P_{kj} \in I_k$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). Sei  $R = \bigcup_{k,j} (I_k \cap U(P_{kj}))$ .  $R$  ist offen und es ist  $\Delta \subset R \subset 0$ , also

$$\Delta^* \subset R^* , \quad (47)$$

$$m R \leq m 0 . \quad (48)$$

$R$  ist Vereinigungsmenge abzählbar vieler offener Intervalle  $R = \bigcup_h I'_h$ . Sei  $I''_h \subset I'_h$  ein abgeschlossenes Intervall derart, daß

$$m(I'_h - I''_h) < \frac{1}{l \cdot 2^h} \quad (l = \text{natürliche Zahl}).$$

$I''_h$  wird durch endlich viele der  $(I_k \cap U(P_{kj}))$  ( $k, j = 1, 2, 3, \dots$ ) überdeckt. Wir dürfen annehmen, daß  $I''_h$  die entsprechenden Punkte  $P_{kj}$  ebenfalls enthält; durch eine eventuelle Vergrößerung von  $I''_h$  läßt sich dies jedenfalls erreichen. Man sieht leicht ein, daß  $m I''_h^* \leq m I''_h$ . Also  $m(\bigcup_h I''_h^*) \leq \sum_h m I''_h^* \leq \sum_h m I''_h = m(\bigcup_h I''_h)$ . Für  $l \rightarrow \infty$  strebt  $\bigcup_h I''_h$  gegen  $R$ ,  $\bigcup_h I''_h^*$  gegen  $R^*$ , und es folgt

$$m R^* \leq m R . \quad (49)$$

Da  $(m 0 - m_e \Delta)$  beliebig klein gemacht werden kann, folgt aus (47), (48) und (49)

$$m_e \Delta^* \leq m_e \Delta . \quad (50)$$

Aus (46), (50), (45) und (41) folgt

$$m_e D_n = m_e \Delta \geq m_e \Delta^* = m_e D_n^* = l_n . \quad (51)$$

Es sei  $E_\varepsilon$  die Menge der  $t$ -Werte, für die die Ungleichung

$$m(t) > (\cos \pi \varrho' - \varepsilon) M(t)$$

richtig ist. Die Mengen  $(0, r) \cap E_\varepsilon$  ( $r > 0$ ) sind meßbar.  $E_{\varepsilon n}$  bezeichne die Menge derjenigen Punkte von  $E_\varepsilon$ , die die Bedingung

$$\lambda_{n+1} < \frac{\mu(t)}{t^{\varrho'}} \leq \lambda_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

erfüllen.  $E_{\varepsilon n}$  ist meßbar und, da  $D_n \subset E_{\varepsilon n}$ , gilt unter Berücksichtigung von (51)

$$m T_n \leq m_e D_n \leq m E_{\varepsilon n} .$$

Da  $\bigcup_n E_{\varepsilon n} \subset E_\varepsilon$ , und da die  $E_{\varepsilon n}$  fremd zueinander sind, folgt: Obere Dichte  $E_\varepsilon \geq$  Obere Dichte  $[\bigcup_n T_n]$ .

Von der letztern Größe hat aber A. S. Besicovitch [2, Paragraph 10] gezeigt, daß sie  $\geq 1 - \frac{\varrho}{\varrho'}$  ist. Somit gilt: Obere Dichte  $E_\varepsilon \geq 1 - \frac{\varrho}{\varrho'} .$

Hieraus folgert man leicht die Behauptung des Satzes 2.

Falls  $\varrho = 0$  ist, kann  $\varrho' > 0$  beliebig klein gewählt werden. Wir erhalten also als Korollar zu Satz 2 (vgl. [2 ; Theorem 3]):

**Satz 3.** Für jede in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonische Funktion der Ordnung 0 gilt :

$$\text{Obere Dichte } E \{m(r) > (1 - \varepsilon) M(r)\} = 1 .$$

Folgende Verschärfung eines Satzes von *A. Dinghas* [8 ; Satz II] ist ebenfalls ein Korollar zu Satz 2 :

**Satz 4.** Die Funktion  $u(z)$  sei in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonisch, nicht konstant und von der Ordnung  $\varrho < \frac{1}{2}$ .  $a$  sei eine beliebige Konstante. Dann ist

$$\text{Obere Dichte } E \{m(r) \geq a\} \geq 1 - 2\varrho .$$

Dieser Satz wird im zweiten Teil noch etwas verschärft werden (Satz 4).

Von nun an beschränken wir uns auf eine spezielle Klasse von Funktionen der Ordnung 0, indem wir folgende Voraussetzung machen :  $M(r) = O(\log r)$ . Es wird sich zeigen, daß über diese Funktionenklasse eine Aussage gemacht werden kann, welche über Satz 3 hinausgeht (Satz 6).

Wir benötigen vorerst einen Hilfssatz :

**Hilfssatz E. Voraussetzung :**  $y = f(x)$  sei eine für  $x \geq 0$  definierte, monoton wachsende Funktion, welche die Ungleichung

$$0 \leq f(x) < M < \infty \quad (52)$$

erfülle und deren Graph in der  $(x, y)$ -Ebene mit  $G$  bezeichnet sei. Ferner sei  $K$  eine beliebig vorgegebene positive Zahl.  $E$  bezeichne die Menge aller Punkte  $x_P$  der  $x$ -Achse mit folgender Eigenschaft : Es existiert ein Punkt  $Q(x_Q, y_Q) \in G$  ( $x_Q \neq x_P$ ) so, daß

$$\left| \frac{y_Q - f(x_P)}{x_Q - x_P} \right| \geq K . \quad (53)$$

*Behauptung :*

$$mE < \infty . \quad (54)$$

*Beweis.*  $E$  ist eine Vereinigungsmenge von Intervallen und infolgedessen meßbar. Sei  $E_1$  (respektive  $E_2$ ) die Menge derjenigen Punkte  $x_P \in E$ , bei denen für den in der Voraussetzung auftretenden Punkt  $Q$  zusätzlich  $x_Q > x_P$  (respektive  $x_Q < x_P$ ) verlangt werden darf. Es ist  $E = E_1 \cup E_2$ , somit

$$mE \leq m_e E_1 + m_e E_2 . \quad (55)$$

Zunächst zeigen wir

$$m_e E_1 < \infty . \quad (56)$$

Wir ordnen jedem Punkt  $x_P \in E_1$  eine Zahl  $\varphi(x_P)$  zu nach folgender Vorschrift:  $\varphi(x_P) = \max [x_Q - x_P]$ , wenn  $Q$  alle Punkte von  $G$  durchläuft, welche (53) erfüllen. Es ist  $0 < \varphi(x_P) < \frac{M}{K}$ . Mit  $A_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) werde die Menge aller Punkte  $x_P \in E_1$  bezeichnet, für die gilt

$$\frac{M}{K} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \varphi(x_P) < \frac{M}{K} \cdot \frac{1}{n} . \quad (57)$$

Sei  $x_1$  ein Punkt von  $A_1$ , der von der untern Grenze dieser Menge um weniger als  $\frac{M}{2K}$  entfernt ist. Wir definieren auf der  $x$ -Achse das Intervall  $I_1[x_1 - \varphi(x_1) < x < x_1 + \varphi(x_1)]$  und auf der  $y$ -Achse  $I_1^*[f(x_1) < y < f(x_1) + K\varphi(x_1)]$ . Aus (52) und (57) folgt  $A_1 \subset I_1$ .

Sei  $x_2$  ein Punkt von  $A_2 - (A_2 \cap I_1)$ , der von der untern Grenze dieser Menge um weniger als  $\frac{M}{3K}$  entfernt ist. Wir definieren auf der  $x$ -Achse das Intervall  $I_2[x_2 - \varphi(x_2) < x < x_2 + \varphi(x_2)]$  und auf der  $y$ -Achse  $I_2^*[f(x_2) < y < f(x_2) + K\varphi(x_2)]$ . Sei  $x_3$  ein Punkt von  $A_2 - (A_2 \cap \bigcup_{k=1}^2 I_k)$ , der von der untern Grenze dieser Menge um weniger als  $\frac{M}{3K}$  entfernt ist. Wir definieren auf der  $x$ -Achse das Intervall  $I_3[x_3 - \varphi(x_3) < x < x_3 + \varphi(x_3)]$  und auf der  $y$ -Achse  $I_3^*[f(x_3) < y < f(x_3) + K\varphi(x_3)]$ . Aus (52) und (57) folgt:  $A_2 \subset \bigcup_{k=1}^3 I_k$  usf. Ist eine der Mengen  $A_1, A_1 - (A_2 \cap I_1), \dots$  leer, so fällt das zugehörige Intervall  $I_k$  einfach weg.

Man überlegt sich leicht, daß

$$E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad (58)$$

$$m I_k = \frac{2}{K} m I_k^* \quad (59)$$

$$I_k^* \cap I_j^* = 0 \quad \text{für} \quad k \neq j \quad (60)$$

Aus (58), (59) und (60) folgt:

$$m_e E_1 \leq m \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m I_k = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^{\infty} m I_k^* \leq \frac{2M}{K} < \infty . \quad (61)$$

Auf analoge Weise zeigt man

$$m_e E_2 < \infty . \quad (62)$$

Aus (55), (61) und (62) folgt die Behauptung.

**Satz 5.** Innerhalb der Klasse der in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonischen Funktionen von der Ordnung  $\varrho < 1$  ist die Aussage  $M(r) = O(\log r)$  äquivalent mit der Beschränktheit der Mengenfunktion  $\mu(e_\zeta)$ , und zwar gilt dann  $M(r) \sim C \log r$ , wobei  $C = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)$ .

*Beweis.* Sei  $M(r) = O(\log r)$ . Dann gilt für genügend große  $r$  und eine geeignete Konstante  $A$

$$\int_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt \leq M(r) < A \cdot \log r .$$

(Die linke Ungleichung folgt aus den Formeln (2.3) und (2.4) der Arbeit von *M. Heins* [9].) Daraus folgt für genügend große  $t$ :

$$\mu(t)[t - \log t] \leq \int_t^{et} \frac{\mu(t)}{t} dt < A \cdot t .$$

Also ist  $\mu(t)$  beschränkt.

Sei umgekehrt  $\mu(t)$  beschränkt und  $C = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)$ .  $\varepsilon > 0$  sei vorgegeben. Wir wählen  $r_0$  so groß, daß  $\mu(r_0) > C - \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann folgt für  $r > r_0^{2C/\varepsilon}$

$$M(r) \geq \int_{r_0}^r \frac{\mu(t)}{t} dt \geq \left( C - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\log r - \log r_0) > (C - \varepsilon) \log r . \quad (63)$$

Wir dürfen ohne Verlust an Allgemeinheit voraussetzen, daß  $u(z)$  in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes  $|z| < a$ ,  $a > 0$ , harmonisch sei. Somit ist

$$M(r) \leq \int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{r}{t} \right| d\mu(t) \leq \int_0^a \log \left| 1 + \frac{r}{a} \right| d\mu < (C + \varepsilon) \log r \quad (64)$$

für genügend große  $r$ .

Aus (63) und (64) folgt  $M(r) \sim C \log r$ .

**Satz 6. Voraussetzung:**  $M(r) = O(\log r)$ .  $\varepsilon$  sei eine beliebig vorgegebene positive Zahl.

*Behauptung:* Es gilt  $m(r) > (1 - \varepsilon) M(r)$  mit Ausnahme höchstens einer Menge von  $r$ -Werten von endlichem Maß.

*Beweis.* Wir dürfen uns nun wieder auf Funktionen beschränken, deren Masse auf der negativen reellen Achse liegt (vgl. Hilfssatz A). Es sei  $C = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)$ . Wir setzen  $A = C \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ . Ferner sei  $R_0 = t(A)$ . Wir betrachten die Funktion  $t^*(\mu; r) = \mu - \mu(r) + r$ . Es gibt eine Zahl  $R_1$  derart, daß

$$\int_A^C \log \left| 1 - \frac{r}{t^*(\mu; r)} \right| d\mu > -\frac{\varepsilon}{2} M(r) \quad \text{für } r > R_1. \quad (65)$$

Denn eine leichte Rechnung ergibt für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\int_A^C \log \left| 1 - \frac{r}{t^*(\mu; r)} \right| d\mu = o(1) - \frac{C \varepsilon}{4} \log r,$$

woraus man unter Beziehung von Satz 5 sofort (65) erhält. Ferner existiert eine Zahl  $R_2$  derart, daß

$$\log \left| 1 - \frac{r}{t(A)} \right| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \log \left(1 + \frac{r}{t(A)}\right) \quad \text{für } r > R_2. \quad (66)$$

Wir setzen

$$R = \max [C, R_0, R_1, R_2]. \quad (67)$$

Auf Grund von Hilfssatz E gilt für alle  $r$ , mit Ausnahme von höchstens einer Menge  $E$  von endlichem Maß:

$$t^*(\mu; r) \geq t(\mu) \quad \text{für } A \leq \mu < \mu(r), \quad (68)$$

$$t^*(\mu; r) \leq t(\mu) \quad \text{für } \mu(r) \leq \mu \leq C.$$

Für alle Werte von  $r$ , die größer als  $R$  sind, und die nicht in  $E$  liegen, gilt wegen (67), (66), (68) und (65):

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^A \log \left| 1 - \frac{r}{t} \right| d\mu + \int_A^C \log \left| 1 - \frac{r}{t} \right| d\mu > \\ &> \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \int_0^A \log \left| 1 + \frac{r}{t} \right| d\mu + \int_A^C \log \left| 1 - \frac{r}{t^*} \right| d\mu > \\ &> M(r) \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} M(r) > M(r) (1 - \varepsilon). \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

## II. Einige Sätze vom Phragmén-Lindelöfschen Typus im $R_n$ ( $n \geq 2$ )

Die Problemstellung von *Phragmén* und *Lindelöf*, formuliert für den Fall subharmonischer Funktionen im  $R_n$ , ist bekanntlich folgende :

In einem Gebiet  $\Omega$  ist eine subharmonische Funktion  $u$  gegeben. Diese sei in der Umgebung aller Randpunkte mit Ausnahme eines Punktes  $A$  beschränkt. Dann ist  $u$  entweder in ganz  $\Omega$  beschränkt, oder  $u$  muß bei geeigneter Annäherung an  $A$  mit einer gewissen Mindeststärke gegen Unendlich streben. Dieses Mindestwachstum hängt von der Beschaffenheit des Gebietes  $\Omega$  in der Umgebung von  $A$  ab.

Als Ausnahmepunkt nehmen wir hier stets den unendlichfernen Punkt an. Es bedeutet dies keinen Verlust an Allgemeinheit, da man durch eine Kelvin-Transformation den Fall eines im Endlichen gelegenen Randpunktes ohne Schwierigkeit auf den unsrigen zurückführen kann.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein :

$$\begin{aligned} O(P; r) &= \mathbf{U}[Q \mid PQ < r] & F(P; r) &= \mathbf{U}[Q \mid PQ \leq r] \\ O_r &= O(O; r) & F_r &= F(O; r) \\ S(P; r) &= \mathbf{U}[Q \mid PQ = r] & S_r &= S(O; r) \end{aligned}$$

Jeder offenen Menge  $\omega$  auf  $S_r$  ordnen wir auf folgende Weise eine Konstante  $\alpha(\omega) \geq 0$  zu, die wir die charakteristische Konstante von  $\omega$  nennen wollen : Sei  $\omega^*$  irgendein reguläres (mit analytischen Rändern versehenes) Gebiet, das in  $\omega$  enthalten ist. Unter  $\lambda_1^*$  wollen wir den kleinsten Eigenwert des folgenden Problems verstehen :  $\Delta u + \lambda^* u = 0$  in  $\omega^*$ ,  $u = 0$  auf dem Rand,  $u \not\equiv 0$ , zweimal stetig differenzierbar in  $\omega^*$ , stetig auf dem Rand.  $\Delta =$  Beltrami-Operator.  $\lambda_1^*$  ist gleich dem Minimum des Quotienten

$$\frac{r^2 \int_{\omega^*} |\operatorname{grad} f|^2 dS_r}{\int_{\omega^*} f^2 dS_r},$$

wobei alle diejenigen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen  $f$  zur Konkurrenz zugelassen sind, welche in  $\omega^*$  nicht identisch null sind und auf dem Rand von  $\omega^*$  verschwinden. Wir definieren :  $\lambda_1 = \inf_{\omega^*} \lambda_1^*$ . Dabei soll  $\omega^*$  alle regulären Gebiete durchlaufen, welche in  $\omega$  enthalten sind. Unter der charakteristischen Konstanten  $\alpha(\omega)$  soll die nichtnegative Lösung der Gleichung  $x(x + n - 2) = \lambda_1$  verstanden werden. (So ist beispielsweise die charakteristische Konstante einer Halbkugel gleich 1, diejenige einer Vollkugel gleich 0, diejenige eines Kreis-

bogenstückes vom Zentriwinkel  $\varphi$  im  $R_2$  gleich  $\frac{\pi}{\varphi}$  usw.) Aus  $\omega_1 \subset \omega_2$  folgt  $\alpha(\omega_1) \geq \alpha(\omega_2)$ . Ist  $\Omega$  ein Kegelgebiet im  $R_n$ , so ist  $\alpha(\Omega \cap S_r)$  unabhängig von  $r$ , denn  $\alpha$  ist invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen.

Es stellt sich hier die Frage nach einer einfachen Charakterisierung derjenigen offenen Mengen  $\omega$ , für die  $\alpha(\omega) = 0$ . Man überlegt sich leicht, daß  $\alpha(\omega) > 0$  für unzusammenhängende Mengen  $\omega$ . Also dürfen wir uns auf Gebiete beschränken.

*Definition.* Wir sagen, der Rand  $\gamma$  des Gebietes  $\omega$  besitze die Kapazität null, falls folgender Sachverhalt zutrifft: Sei  $\{\omega_k\}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) eine monoton wachsende Folge von regulären Gebieten, welche  $\omega$  ausschöpft;  $\gamma_k$  sei der Rand von  $\omega_k$ . Wir wählen einen Punkt  $P \in \omega_1$  und eine solche Zahl  $\varrho > 0$ , daß  $(S_r \cap F(P; \varrho)) \subset \omega_1$ .  $\varphi_k$  sei die Lösung des folgenden Randwertproblems  $\Delta \varphi_k = 0$  in  $\omega_k^* = \omega_k - (S_r \cap F(P; \varrho))$ ,  $\varphi_k = 0$  auf  $\gamma_k$ ,  $\varphi_k = 1$  auf  $(S_r \cap S(P; \varrho))$ ,  $\varphi_k$  zweimal stetig differenzierbar in  $\omega_k^*$ , stetig auf dem Rand,  $\Delta$  = Beltrami-Operator. Die Funktion  $\varphi_k$  – das harmonische Maß von  $(S_r \cap S(P; \varrho))$  in bezug auf  $\omega_k$  – macht das Dirichletintegral  $I_k = \int_{\omega_k^*} |\operatorname{grad} \varphi_k|^2 dS_r$  bei den gegebenen

Randwerten zu einem Minimum. Die Folge  $I_k$  nimmt monoton ab. Falls  $I_k \searrow 0$ , heiße  $\gamma$  von der Kapazität null. Andernfalls sagen wir,  $\gamma$  sei von positiver Kapazität. Diese Definition ist von der speziellen Wahl von  $\{\omega_k\}$ ,  $P$  und  $\varrho$  unabhängig (vgl. zum Beispiel *R. Nevanlinna* [17]).

Es sei  $\bar{\gamma}$  das Bild von  $\gamma$  bei stereographischer Projektion von  $S_r$  auf den  $R_{n-1}$  von einem Punkte des Gebietes  $\omega$  aus.  $\bar{\gamma}$  ist – nach der im  $R_{n-1}$  üblichen Definition – gleichzeitig mit  $\gamma$  von der Kapazität null bzw. von positiver Kapazität. Zum Beweise beachte man folgende Transformationseigenschaft des Dirichlet-Integrals: Sei  $f$  eine auf einem beschränkten Gebiete  $G \subset O_M$  des  $R_{n-1}$  definierte und stetig differenzierbare Funktion,  $\bar{f}$  deren stereographische Verpflanzung auf das Gebiet  $\bar{G} \subset S_r$ . Es gilt die Ungleichung

$$\left( \frac{2r^2}{M^2 + r^2} \right)^{n-3} \int_G |\operatorname{grad} f|^2 dG \leq \int_{\bar{G}} |\operatorname{grad} \bar{f}|^2 dS_r \leq 2^{n-3} \int_G |\operatorname{grad} f|^2 dG . \quad (1)$$

Aus  $\operatorname{cap} \gamma = 0$ , also  $I_k \searrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , folgt unter Anwendung von (1), daß das Dirichlet-Integral der stereographisch verpflanzten Funktion (Projektionszentrum  $P$ ) ebenfalls gegen null streben muß. Also  $\operatorname{cap} \bar{\gamma} = 0$ . Analog schließt man in der umgekehrten Richtung.

**Satz 1.** Die charakteristische Konstante  $\alpha$  eines Gebietes  $\omega$  ist dann und nur dann gleich null, wenn die Kapazität des Randes  $\gamma$  von  $\omega$  verschwindet.

*Beweis.* Wir dürfen den Kugelradius normieren:  $r = 1$ . Sei  $S = S_1$ . Im  $R_2$  ist der Satz trivial: Schon wenn  $\gamma$  aus nur einem Punkt besteht, ist  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\text{cap } \gamma > 0$ . Im folgenden sei also  $n \geq 3$ .

I. Sei  $\text{cap } \gamma = 0$ . Unter Verwendung der oben eingeführten Bezeichnungen definieren wir

$$w_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{auf } \omega_k^*, \\ 1 & \text{auf } (F(P; \varrho) \cap S) \end{cases}.$$

Es ist  $\int_{\omega_k} |\text{grad } w_k|^2 dS = \int_{\omega_k^*} |\text{grad } \varphi_k|^2 dS \searrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$ . Da

$\int_{\omega_k} w_k^2 dS$  größer als eine von  $k$  unabhängige positive Konstante ist, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\omega_k} |\text{grad } w_k|^2 dS}{\int_{\omega_k} w_k^2 dS} = 0$$

und daraus folgt  $\alpha(\omega) = 0$ .

II. Sei  $\text{cap } \gamma > 0$ .  $\{\omega_k\}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) sei eine monoton wachsende Folge von regulären Gebieten, welche  $\omega$  ausschöpft. Zu  $\omega_k$  gehören der Rand  $\gamma_k$ , der Eigenwert  $\lambda_k$  und die durch die Bedingungen  $u_k > 0$ ,

$\int_{\omega_k} u_k^2 dS = 1$  eindeutig festgelegte Eigenfunktion  $u_k$ . Wir müssen zeigen, daß die monoton fallende Folge  $\{\lambda_k\}$  nicht gegen null konvergiert. Wir wählen einen beliebigen Punkt  $P \in \omega_1$ . Eine der beiden folgenden Aussagen muß zutreffen:

- (a) Es gibt zwei positive Zahlen  $\varrho$  und  $\eta$  derart, daß
  - 1)  $(F(P; \varrho) \cap S) \subset \omega_1$ ,
  - 2)  $u_k(Q) \geq \eta \quad \text{für } Q \in (F(P; \varrho) \cap S) \quad \text{und } k = 1, 2, 3, \dots$
- (b) Es gibt eine gegen  $P$  konvergierende Punktfolge  $\{P_k\}$  derart, daß  $\liminf_{k \rightarrow \infty} u_k(P_k) = 0$ .

Wir betrachten zuerst den Fall (a). In  $\omega_k$  definieren wir folgende Funktionen:

$$\bar{u}_k = \min [u_k, \eta]$$

$$v_k = \begin{cases} \eta & \text{auf } (F(P; \varrho) \cap S) \\ \eta \cdot \varphi_k & \text{auf } \omega_k^* = \omega_k - (F(P; \varrho) \cap S) \end{cases}$$

Es ist

$$\int_{\omega_k} |\operatorname{grad} u_k|^2 dS \geq \int_{\omega_k} |\operatorname{grad} \bar{u}_k|^2 dS \geq \eta^2 \int_{\omega_k^*} |\operatorname{grad} \varphi_k|^2 dS \geq C > 0 ,$$

wobei die Konstante  $C$  als von  $k$  unabhängig gewählt werden kann, weil  $\operatorname{cap} \gamma > 0$ . Daraus folgt aber, wenn man die Normierung von  $u_k$  beachtet  $\inf_k \lambda_k \geq C > 0$ . q. e. d.

Im Falle (b) führen wir die Annahme  $\lambda_k \searrow 0$  ad absurdum. Durch Auswahl einer Teilfolge  $\{u_{n_k}\}$  — und die entsprechende  $\{P_{n_k}\}$  — können wir erreichen, daß  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k}(P_{n_k}) = 0$ . Wir denken uns eine solche Teilfolge ausgewählt, die wir neu numerieren und wieder  $\{u_k\}$  — und entsprechend  $\{P_k\}$  — nennen.

Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:  $\Pi(M; s)$  sei die  $(n-2)$ -dimensionale Untersphäre von  $s$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem sphärischen Radius  $s$ ,  $\Phi(M; s)$  die entsprechende abgeschlossene Kugel,  $I(s)$  deren Inhalt,  $C_k(M; s)$  bzw.  $A_k(M; s)$  das arithmetische Mittel von  $u_k$  über  $\Pi(M; s)$  bzw.  $\Phi(M; s)$ ,  $\sigma_n$  die Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel.

Sei  $M \in \omega_1$  ein beliebiger Punkt,  $s_0 > 0$  eine solche Zahl, daß  $\Phi(M; s_0) \subset \omega_1$ . Wir wenden für das durch  $\Pi(M; \varepsilon)$  und  $\Pi(M; s_0)$ ,  $0 < \varepsilon < s_0$ , begrenzte Ringgebiet  $R$  die Greensche Formel

$$\int_R (u_k \Delta v - v \Delta u_k) dS = \int_{\text{Rand } R} \left( v \frac{\partial u_k}{\partial n_i} - u_k \frac{\partial v}{\partial n_i} \right) d\sigma \quad (2)$$

an, wobei wir für  $v(Q)$  die Greensche Funktion  $g(M; Q)$  — bezüglich  $\Delta u = 0$  und  $\Phi(M; s_0)$  — einsetzen:

$$n = 3: \quad v(Q) = \frac{1}{2\pi} [\log r_0 - \log r_Q]$$

$$n > 3, \text{ gerade: } v(Q) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{m=0}^{n-3} \binom{n-3}{m} \frac{r_0^{2m-n+3} - r_Q^{2m-n+3}}{2m-n+3}$$

$$n > 3, \text{ ungerade: } v(Q) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq \frac{n-3}{2}}}^{n-3} \binom{n-3}{m} \frac{r_0^{2m-n+3} - r_Q^{2m-n+3}}{2m-n+3} + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \left( \frac{n-3}{2} \right) [\log r_0 - \log r_Q]$$

$$\left( r_0 = \operatorname{tg} \frac{s_0}{2}, r_Q = \operatorname{tg} \frac{s_Q}{2}, s_Q = \text{sphärischer Abstand der Punkte } M \text{ und } Q \right) .$$

Da  $\Delta u_k + \lambda u_k = 0$ ,  $\Delta v = 0$  in  $R$ ,  $v = 0$  auf  $\Pi(M; s_0)$ , ergibt (2) für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_k \int_{\Phi(M; s_0)} v u_k dS = u_k(M) - C_k(M; s_0) . \quad (3)$$

Daraus folgt

$$u_k(M) \geq A_k(M; s_0) \geq C_k(M; s_0) . \quad (4)$$

Das Integral in (3) integrieren wir zuerst über  $s_Q = \text{const.}$ :

$$\lambda_k \int_{\Phi(M; s_0)} v u_k dS = \lambda_k \int_0^{r_0} v(r) C_k(M; s(r)) dS(r) \leq \lambda_k L u_k(M) , \quad (5)$$

wobei  $L = \int_{\Phi(M; s_0)} v dS$  eine von  $k$  und  $M$  unabhängige Konstante ist. Aus (3) und (5) erhalten wir  $(1 - \lambda_k L) u_k(M) \leq C_k(M; s_0)$ , und, da  $\lambda_k \searrow 0$ , schließen wir:

Zu vorgegebenem  $s_0 > 0$  gibt es zwei positive Zahlen  $k_0(s_0)$  und  $H(s_0)$  mit folgender Eigenschaft: Es ist

$$u_k(M) \leq H \cdot C_k(M; s_0) \leq H \cdot A_k(M; s_0) \quad (6)$$

für beliebiges  $k \geq k_0$  und jeden Punkt  $M$ , falls nur  $\Phi(M; s_0) \subset \omega_{k_0}$ .

Nun betrachten wir wieder den Punkt  $P$ . Es sei  $s_0 > 0$  so gewählt, daß  $\Phi(P; 3s_0) \subset \omega_1$ . Ferner sei  $k_1$  so groß, daß erstens  $k_1 \geq k_0(s_0)$ , und zweitens  $P \in \Phi(P; s_0)$  für  $k \geq k_1$ . Durch Anwendung der Ungleichungen (4) und (6) erhalten wir für  $k \geq k_1$ :

$$u_k(P) \geq A_k(P; 2s_0) \geq \frac{I(s_0)}{I(2s_0)} A_k(P; s_0) \geq \frac{I(s_0)}{H \cdot I(2s_0)} u_k(P) .$$

Daraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(P) = 0 . \quad (7)$$

Für einen beliebigen Punkt  $Q \in \Phi(P; 2s_0)$  gilt

$$u_k(P) \geq A_k(P; 3s_0) \geq \frac{I(s_0)}{I(3s_0)} A_k(Q; s_0) \geq \frac{I(s_0)}{H \cdot I(3s_0)} u_k(Q) . \quad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt, daß  $\{u_k\}$  in  $\Phi(P; 2s_0)$  gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

$\varepsilon > 0$  sei vorgegeben. Wir wählen  $k$  so groß, daß  $u_k(Q) < \varepsilon$  für  $Q \in \Phi(P; 2s_0)$ . Wir definieren

$$u_k^*(Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } Q \in \Phi(P; s_0) \\ \min \left[ u_k, \frac{\varepsilon}{s_0} (s_Q - s_0) \right] & \text{für } Q \in (\Phi(P; 2s_0) - \Phi(P; s_0)) \\ u_k & \text{für } Q \in (\omega_k - \Phi(P; 2s_0)) \end{cases}$$

Infolge der Normierung von  $u_k$  ist

$$\int_{\omega_k^*} u_k^{*2} dS \geq 1 - \varepsilon I(2s_0) \quad (\omega_k^* = \omega_k - \Phi(P; s_0)) . \quad (9)$$

Ferner gilt

$$\int_{\omega_k^*} |\operatorname{grad} u_k^*|^2 dS \leq \int_{\omega_k} |\operatorname{grad} u_k|^2 dS + \left(\frac{\varepsilon}{s_0}\right)^2 [I(2s_0) - I(s_0)] . \quad (10)$$

Aus  $\varepsilon \rightarrow 0$  (und damit  $k \rightarrow \infty$ ) folgt mit der Annahme  $\lambda_k \searrow 0$  sowie den Beziehungen (9) und (10) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\omega_k^*} |\operatorname{grad} u_k^*|^2 dS}{\int_{\omega_k^*} u_k^{*2} dS} = 0 .$$

Also würde die charakteristische Konstante des Gebietes

$$\omega^* = \omega - \Phi(P; s_0) ,$$

dessen Komplement bezüglich  $S$  innere Punkte enthält, verschwinden ; dies ist offenbar falsch. q. e. d.

Sei nun  $\Omega$  ein beliebiges, sich ins Unendliche erstreckendes Gebiet im  $R_n$  mit dem Rand  $\Gamma$ . Wir setzen zur Abkürzung  $\alpha(r) = \alpha(\Omega \cap S_r)$ .

**Satz 2. Voraussetzungen :**

- 1)  $u(P)$  sei eine in  $\Omega$  subharmonische Funktion,
- 2)  $\lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ P \in \Omega; Q \in \Gamma}} \sup u(P) \leq 0$ .

*Behauptung.* Es gilt entweder :

$$u(P) \leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

oder : Es existieren zwei positive Zahlen  $C$  und  $r_0$  derart, daß

$$M^2(r) \geq \frac{C}{r^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} e^{\int_{r_0}^{\varrho} \alpha(\xi) d \log \xi} d \log \varrho , \quad (12)$$

wobei  $M(r) \geq \sup_{P \in (\Omega \cap S_r)} u(P)$ .

Für den Fall  $n = 2$  ist dieser Satz bereits bekannt. A. Dinghas hat die Abschätzung (12) für Funktionen der Form  $\log |f(z)|$  ( $f(z) = \text{ana-}$

lytische Funktion) in einem von zwei analytischen Kurvenbogen begrenzten Gebiete bewiesen [6], wobei er eine Methode von *T. Carleman* [4] benützte. Später hat *A. Pfluger* eine kürzere Herleitung gefunden und dabei allgemeinere Gebiete betrachtet [18]<sup>2)</sup>.

Unsere Beweismethode ist analog derjenigen von *T. Carleman* und *A. Dinghas*. Sie beruht auf der Auswertung der Differentialungleichung (21) für das durch Formel (13) definierte Mittel  $m(r)$ . Die Beziehung (21) wurde für den Fall harmonischer Funktionen im  $R_3$  erstmals durch *H. Keller* aufgestellt [12]. *H. Keller* hat auch das Anwachsen des entsprechenden, über eine Schar von parallelen ebenen Schnitten erstreckten Mittels untersucht und dabei unter anderem eine zu [12] analoge Abschätzung gefunden [11, p. 34].

Nun erfordert aber diese Methode eine starke Regularität sowohl von der betrachteten Funktion als auch vom Rande ihres Definitionsbereiches. Deshalb schalten wir einen Grenzübergang dazwischen: Wir betrachten eine Folge von durch Mittelbildung regularisierten Funktionen, welche in regulär begrenzten Gebieten definiert sind und schließen dann aus den Eigenschaften der Funktionen der Folge auf die gesuchte Eigenschaft der Grenzfunktion.

Wir nehmen an, daß (11) nicht erfüllt sei, und zeigen, daß daraus die Richtigkeit von (12) folgt.

Es gebe also einen Punkt  $P_0 \in \Omega$  derart, daß  $u(P_0) > 0$ . Wir betrachten die im ganzen  $R_n$  subharmonische Funktion

$$v = \begin{cases} \max [u - \eta, 0] & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } C \Omega \end{cases}$$

wobei wir im  $R_2$  für die Konstante  $\eta = \max [R_0, M(R_0)] - R_0$  sei ein willkürlich gewählter Radius derart, daß  $S_{R_0} \cap \Omega \neq 0$  — und im  $R_n$  ( $n \geq 3$ )  $\eta = \frac{u(P_0)}{2}$  setzen. Wir definieren:

$$m(r) = \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(\Omega \cap S_r)} v^2 dS_r \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

wobei  $\sigma_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$  die Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel darstellt.  $m(r)$  ist eine monoton wachsende Funktion, denn  $v^2$  ist eben-

---

<sup>2)</sup> Kürzlich hat *A. Dinghas* die Formel (12) unter gewissen Regularitätsbedingungen auch für allgemeine  $n$  bewiesen [9].

falls im ganzen  $R_n$  subharmonisch. Es gibt ein  $R > 0$  derart, daß

$$m(R) > 0 . \quad (14)$$

Für  $n \geq 3$  folgt dies unmittelbar aus der Wahl der Konstanten  $\eta$ . Würde im Falle  $n = 2$  die Funktion  $m(r)$  nie positiv werden, so würde daraus die Beschränktheit von  $u$  folgen. Dann wäre aber die in der ganzen endlichen Ebene subharmonische Funktion

$$u_\varepsilon = \begin{cases} \max [u - \varepsilon, 0] & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } C\Omega \end{cases} \quad (\varepsilon > 0)$$

beschränkt, somit eine Konstante. Also  $u_\varepsilon \equiv 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Daraus würde folgen:  $u \leq 0$  in  $\Omega$ . Somit wäre (11) erfüllt, was aber im Widerspruch zur Beweisannahme steht.

Sei nun  $R < R_1 < R_2 < \dots$  eine gegen  $+\infty$  konvergierende Folge von  $r$ -Werten. Zu jedem Punkte von  $\Gamma \cap F_{R_l}$  gibt es eine Kugelumgebung, innerhalb welcher  $v = 0$  ist. Es genügt eine endliche Anzahl  $U_1, \dots, U_{v_l}$  dieser Umgebungen, um  $\Gamma \cap F_{R_l}$  zu überdecken. Sei  $C_l$  der Rand von  $(\Omega \cap O_{R_l}) - \bigcup_{k=1}^{v_l} U_k$  und  $a_l$  der (positive) Abstand von  $C_l$  und  $\Gamma \cap F_{R_l}$ . Wir wählen

$$\varrho_1 = \frac{a_1}{6}, \quad \varrho_l = \min \left[ \frac{1}{l}, \frac{a_l}{6}, \varrho_1, \dots, \varrho_{l-1} \right] \quad (l = 2, 3, \dots)$$

und bezeichnen mit  $v_l$  die dreifach über eine Vollkugel vom Radius  $\varrho_l$  gemittelte Funktion  $v$ . (Für dieses Mittelungsverfahren sowie die Eigenschaften der gemittelten Funktionen vgl. [20, p. 11].) Die Funktionen  $v_l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ) sind zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren

$$m_l^2(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(\Omega \cap S_r)} v_l^2 dS_r . \quad (15)$$

Für  $l \rightarrow \infty$  gilt  $\varrho_l \searrow 0$ , somit  $v_l \searrow v$ . Daraus folgt

$$m_l(r) \searrow m(r) \quad \text{für} \quad l \rightarrow \infty . \quad (16)$$

Zu jedem Punkt von  $\Gamma \cap F_{R_l}$  gibt es eine Umgebung, innerhalb welcher  $v_l = 0$  ist. Eine endliche Anzahl  $V_1, \dots, V_{\mu_l}$  dieser Umgebungen genügt, um  $\Gamma \cap F_{R_l}$  zu überdecken. Sei  $G_l$  ein reguläres Gebiet im  $R_n$  derart, daß  $((\Omega \cap O_{R_l}) - \bigcup_{k=1}^{\mu_l} V_k) \subset G_l \subset (\Omega \cap O_{R_l})$ . In der folgenden Abschätzung wird mehrfach stillschweigend davon Gebrauch gemacht, daß  $v_l$  und  $\text{grad } v_l$  in allen Randpunkten von  $G_l$  verschwinden, die nicht zu  $S_{R_l}$  gehören.

Sei  $r \leq R_i$ . Durch Differentiation von (15) erhalten wir

$$m_i(r) m'_i(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} dS_r = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} (|\operatorname{grad} v_i|^2 + v_i \Delta v_i) dG_i . \quad (17)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} (r^{n-1} m_i(r) m'_i(r))' &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{(G_i \cap S_r)} (|\operatorname{grad} v_i|^2 + v_i \Delta v_i) dS_r, \\ &\geq \frac{1}{\sigma_n} \left\{ \int_{(G_i \cap S_r)} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r} \right)^2 dS_r + \int_{(G_i \cap S_r)} |\operatorname{grad}_s v_i|^2 dS_r \right\} , \end{aligned} \quad (18)$$

denn  $v_i \Delta v_i \geq 0$ . Unter  $\operatorname{grad}_s v_i$  soll dabei die an  $S_r$  tangentiale Komponente von  $\operatorname{grad} v_i$  verstanden werden.  $(G_i \cap S_r)$  besteht aus endlich vielen regulären Gebieten  $\omega_{i1}, \dots, \omega_{im}$  und es gilt zufolge der Definition von  $\alpha(r)$ :

$$\frac{r^2 \int_{\omega_{ii}} |\operatorname{grad}_s v_i|^2 dS_r}{\int_{\omega_{ii}} v_i^2 dS_r} \geq \alpha(\alpha + n - 2) \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

Daraus folgt

$$\int_{(G_i \cap S_r)} |\operatorname{grad}_s v_i|^2 dS_r \geq \alpha(r)(\alpha(r) + n - 2) r^{-2} \int_{(G_i \cap S_r)} v_i^2 dS_r . \quad (19)$$

Aus (17) erhält man unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} (m_i(r) m'_i(r))^2 &= \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} dS_r \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} v_i^2 dS_r \right) \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r} \right)^2 dS_r \right) , \end{aligned}$$

Also

$$(m'_i(r))^2 \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{(G_i \cap S_r)} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r} \right)^2 dS_r . \quad (20)$$

Aus (18), (19) und (20) erhalten wir

$$(r^{n-1} m_i(r) m'_i(r))' \geq r^{n-1} (m'_i(r))^2 + \alpha(\alpha + n - 2) r^{n-3} m_i^2(r)$$

und nach kurzer Umformung, wobei wir benützen, daß  $m_i(r) > 0$  in dem Intervall, das wir später betrachten werden:

$$r^2 m''_i(r) + r(n-1) m'_i(r) \geq \alpha(r)(\alpha(r) + n - 2) m_i(r) . \quad (21)$$

Die Transformation

$$r = e^t, \quad m_l(r) = e^{\frac{1}{2}[\Phi(t) - (n-2)t]}$$

ergibt aus (21) nach leichter Rechnung ( $\cdot$  = Ableitung nach  $t$ ):

$$\dot{\Phi}^2 + 2\ddot{\Phi} \geq 4\alpha(\alpha + n - 2) + (n - 2)^2.$$

Daraus folgt

$$\left( \dot{\Phi} + \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} \right)^2 \geq (2\alpha + n - 2)^2$$

und deshalb

$$\dot{\Phi} + \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} = \frac{d}{dt} \left( \log \frac{de^\Phi}{dt} \right) \geq 2\alpha + n - 2.$$

Wir kehren zu den ursprünglichen Variablen zurück:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left\{ \log \left[ r \cdot \frac{d(m_l^2(r) r^{n-2})}{dr} \right] \right\} \geq 2\alpha(r) + n - 2.$$

Nun können wir leicht integrieren:

$$m_l^2(r) r^{n-2} \geq m_l^2(r_0) r_0^{n-2} + \frac{(m_l^2(r) r^{n-2})'_{r=r_0}}{r_0^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} e^{2 \int_{r_0}^{\xi} \alpha(\xi) d \log \xi} d \log \varrho$$

$$(r_0 \leq r \leq R_l; \quad l = 1, 2, 3, \dots). \quad (22)$$

Wir unterscheiden die Fälle  $n = 2$  und  $n \geq 3$ :

a)  $n = 2$ . Infolge der Konstruktion der Funktion  $v$  ist  $m(R_0) = 0$ ,  $m(R) > 0$ . Aus (16) folgt, daß  $m_l^2(R) - m_l^2(R_0) > \frac{m^2(R)}{2}$  für genügend große  $l$  ( $l > l_0$ ). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $l > l_0$  ein  $R_l^*$  ( $R_0 \leq R_l^* \leq R$ ) so, daß

$$(m_l^2(r))'_{r=R_l^*} = \frac{m_l^2(R) - m_l^2(R_0)}{R - R_0} \geq \frac{m^2(R)}{2(R - R_0)},$$

Also folgt aus (22):

$$m_l^2(r) \geq (m_l^2(r))'_{r=R_l^*} \int_{R_l^*}^r e^{2 \int_{r_0}^{\xi} \alpha(\xi) d \log \xi} d \log \varrho \geq C \int_{r_0}^r e^{2 \int_{r_0}^{\xi} \alpha(\xi) d \log \xi} d \log \varrho, \quad (l > l_0; \quad r_0 \leq r \leq R_l), \quad (23)$$

wobei  $C = \frac{m^2(R)}{2(R - R_0)}$  und  $r_0 = R$  von 1 unabhängige Konstanten sind.

b)  $n \geq 3$ . Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $l$  ein  $R_l^*$  ( $R \leq R_l^* \leq R + 1$ ) derart, daß

$$(m_l(r)r^{n-2})'_{r=R_l^*} = m_l(R+1)(R+1)^{n-2} - m_l(R)R^{n-2} \geq m(R)[(R+1)^{n-2} - R^{n-2}] .$$

Wir wenden (22) an:

$$\begin{aligned} m_l^2(r) &\geq \frac{(m_l(r)r^{n-2})'_{r=R_l^*}}{r^{n-2}R_l^{*n-2}} \int_{R_l^*}^r \varrho^{n-2} \cdot e^{\frac{2 \int_{\xi}^{\varrho} \alpha(\xi) d \log \xi}{R_l^*}} d \log \varrho \\ &\geq \frac{C}{r^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} \cdot e^{\frac{2 \int_{\xi}^{\varrho} \alpha(\xi) d \log \xi}{r_0}} d \log \varrho, \quad (l = 1, 2, 3, \dots; r_0 \leq r \leq R_l) \end{aligned} \quad (24)$$

wobei  $C = m(R) \left[ 1 - \left( \frac{R}{R+1} \right)^{n-2} \right]$  und  $r_0 = R + 1$  von 1 unabhängige Konstanten sind.

Aus den Definitionen von  $M(r)$ ,  $v(P)$  und  $m(r)$  folgt unmittelbar

$$M^2(r) \geq m^2(r) . \quad (25)$$

Aus (16), (23), (24) und (25) ergibt sich (12). q. e. d.

Aus der Differentialungleichung (21) schließt man unmittelbar auf eine bemerkenswerte Eigenschaft der Funktion

$$\mu(r) = \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\Omega \cap S_r} \dot{u}^2 dS_r \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei } \dot{u} = \max [0, u] .$$

Es ist nämlich  $m_l(r)$  für  $n = 2$  eine konvexe Funktion von  $\log r$ , für  $n \geq 3$  eine konvexe Funktion von  $\frac{1}{r^{n-2}}$ . (Zur Verifikation ersetze man in (21) die rechte Seite durch null.) Daraus folgt dieselbe Eigenschaft für  $m(r)$ . Nun lassen wir  $\eta$  eine Nullfolge durchlaufen und erhalten das Resultat:

$\mu(r)$  ist für  $n = 2$  eine konvexe Funktion von  $\log r$ , für  $n \geq 3$  eine konvexe Funktion von  $\frac{1}{r^{n-2}}$ .

Um diese Eigenschaft der Funktion  $\mu(r)$  zu zeigen, wäre der Umweg über die Beziehung (21) nicht notwendig gewesen. Aus (18) und (20) schließt man direkt auf

$$(r^{n-1} m_l(r) m_l'(r))' \geq r^{n-1} (m_l'(r))^2$$

und damit auf :

$$\frac{d^2m_t(\xi)}{d\xi^2} \geq 0 , \quad \text{wobei} \quad \xi = \begin{cases} \log r & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{r^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 . \end{cases}$$

Damit hat man im Wesentlichen eine Methode von *R. Nevanlinna* [16, p. 4] angewandt.

Im Folgenden bezeichne  $\kappa$  eine beliebige positive Konstante. Unter  $E_\kappa$  wollen wir die Menge aller  $r$ -Werte verstehen, für die  $\alpha(r) \geq \kappa$  ist.  $\Phi_\kappa(r)$  sei die charakteristische Funktion von  $E_\kappa$ . Wir führen das logarithmische Maß von  $E_\kappa \cap (r_1, r_2)$  ein :

$$\lambda_\kappa(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \Phi_\kappa(\varrho) d \log \varrho .$$

**Satz 3. Voraussetzungen :**

- 1)  $u(P)$  sei subharmonisch in  $\Omega$ ,
- 2)  $\limsup_{\substack{P \rightarrow Q \\ P \in \Omega; Q \in \Gamma}} u(P) \leq 0$ ,
- 3)  $\liminf_{r \rightarrow \infty} e^{-\kappa \lambda_\kappa(1, r)} M(r) \leq 0$ .

*Behauptung :*  $u \leq 0$  in  $\Omega$ .

Dieser Satz ist eine Erweiterung eines für  $n = 2$  von *A. Pfluger* [18] ausgesprochenen Satzes auf höhere Dimensionen. Analog zum Fall der Ebene führen wir ihn auf Satz 2 zurück.

Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Wir wenden auf  $u(P)$  den Satz 2 an : Es gibt zwei positive Konstanten  $C$  und  $r_0$  derart, daß

$$M^2(r) \geq \frac{C}{r^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} e^{2 \int_{r_0}^{\varrho} \alpha(\xi) d \log \xi} d \log \varrho \geq \frac{C}{r^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} e^{2 \kappa \lambda_\kappa(r_0, \varrho)} d \log \varrho .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} [e^{-\kappa \lambda_\kappa(1, r)} M(r)]^2 &\geq \frac{C e^{-2 \kappa \lambda_\kappa(1, r_0)}}{r^{n-2}} \int_{r_0}^r \varrho^{n-2} e^{-2 \kappa \lambda_\kappa(\varrho, r)} d \log \varrho \\ &\geq \frac{C e^{-2 \kappa \lambda_\kappa(1, r_0)}}{n - 2 + 2\kappa} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n-2+2\kappa} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

denn es ist  $\lambda_\kappa(\varrho, r) \leq \log r - \log \varrho$ . Lassen wir  $r \rightarrow \infty$  streben, so erhalten wir einen Widerspruch zu Voraussetzung 3). Damit ist der Satz bewiesen.

**Satz 3** gibt zu verschiedenen Folgerungen Anlaß (vgl. *A. Pfluger* [18]):  
Zunächst bemerken wir, daß wir für den Fall  $n = 2$  eine Verschärfung von Satz 4 (Teil I) erhalten:

**Satz 4.** Die Funktion  $v(z)$  sei in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene subharmonisch, nicht konstant und von der Ordnung  $\varrho < \frac{1}{2}$ .  $a$  sei eine beliebige Konstante. Dann ist:

$$\text{Untere logarithmische Dichte } E \{m(r) \geq a\} \geq 1 - 2\varrho. \quad (26)$$

(Unter der untern logarithmischen Dichte einer meßbaren Punktmenge  $E$  auf der  $r$ -Achse versteht man die Größe

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\log R} \int_1^R \Phi(r) d \log r,$$

wobei  $\Phi(r)$  die charakteristische Funktion von  $E$  bedeutet; analog definiert man die obere logarithmische Dichte.) Dieser Satz ist für den Fall ganzer Funktionen erstmals von *B. Kjellberg* [13, p. 20] bewiesen worden.

Zum Beweis betrachte man die Funktion  $u = v - a$  in dem Gebiet  $\Omega$ , in dem sie positiv ist. Wir wenden Satz 3 an ( $\varkappa = \frac{1}{2}$ ). Da die Voraussetzungen 1) und 2) erfüllt sind, die Behauptung hingegen nicht, darf die Voraussetzung 3) ebenfalls nicht zutreffen. Dies führt auf die Ungleichung (26).

Die beiden folgenden Sätze sind ebenfalls leicht zu beweisende Korollare zu Satz 3 und gelten für alle  $n$ :

**Satz 5.** Ist  $u(P)$  eine in  $\Omega$  subharmonische Funktion der Ordnung  $\varrho$ , so gilt für die obere logarithmische Dichte  $\bar{\lambda}_\varkappa$  der Menge  $E_\varkappa$  die folgende Ungleichung:

$$\bar{\lambda}_\varkappa = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda_\varkappa(1, r)}{\log r} \leq \frac{\varrho}{\varkappa}.$$

**Satz 6. Voraussetzungen:**

- 1)  $u(P)$  sei eine in  $\Omega$  subharmonische Funktion,
- 2)  $\alpha(r) \geq \alpha_0 > 0$  für genügend große  $r$ ,
- 3)  $\limsup_{\substack{P \rightarrow Q \\ P \in \Omega; Q \in \Gamma}} u(P) \leq 0$ ,
- 4)  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha_0}} \leq 0$ .

*Behauptung:*  $u(P) \leq 0$  in  $\Omega$ .

Satz 6 lässt sich unter anderem auf Kegelgebiete anwenden. Da der Fall genügend regulär berandeter Kegelgebiete mit andern Methoden schon eingehend untersucht worden ist, haben wir hier eine Vergleichsmöglichkeit: Unser Satz ist eine Verschärfung einer im Jahre 1947 von *J. Deny* und *P. Lelong* bewiesenen Aussage [5, p. 104]. Im Jahre 1949 veröffentlichten *L. Ahlfors* und *M. Heins* [1] (für den Fall  $n = 2$ ) und *J. Lelong-Ferrand* [14] [15] (für allgemeines  $n$ ) Untersuchungen, in denen die Wertverteilung dieser Funktionen schärfer erfaßt wird, als dies mit der hier verwendeten Methode möglich ist. Letztere besitzt dafür den Vorteil, auf willkürliche Gebiete anwendbar zu sein.

**Satz 7.** Unter den in einem Kegelgebiet  $\Omega$  subharmonischen und nicht beschränkten Funktionen  $u$ , welche die Voraussetzung

$$\limsup_{P \rightarrow Q; P \in \Omega; Q \in \Gamma} u(P) \leq 0$$

erfüllen, gibt es dann und nur dann solche von beliebig niedriger Wachstumsordnung  $\varrho$ , falls die Kapazität des Randes  $\Gamma$  von  $\Omega$  verschwindet.

*Beweis.* *J. Deny* und *P. Lelong* haben bewiesen [5, p. 94], daß  $\text{cap } \Gamma = 0$  im  $R_n$  äquivalent ist mit  $\text{cap}(\Gamma \cap S) = 0$  auf  $S$ , und nach Satz 1 ist dies äquivalent mit  $\alpha(\Omega \cap S) = 0$ .

Ist  $\text{cap } \Gamma > 0$ , also  $\alpha(\Omega \cap S) > 0$ , so folgt aus Satz 6 die Existenz einer positiven Mindestwachstumsordnung.

Ist  $\text{cap } \Gamma = 0$ , also  $\alpha(\Omega \cap S) = 0$ , so gibt es reguläre Teilgebiete  $\omega^*$  von  $(\Omega \cap S)$  mit beliebig kleiner charakteristischer Konstante  $\alpha^*(\omega^*)$ . Sei  $u^*(Q)$  die entsprechende Eigenfunktion. Setzen wir

$$u = \begin{cases} u^* & \text{auf } \omega^* \\ 0 & \text{auf } (\Omega \cap S) - \omega^* \end{cases},$$

so erfüllt die Funktion  $r_P^{\alpha^*} \cdot u(\bar{P})$  ( $r_P = OP$ ,  $\bar{P} = (S \cap \text{Gerade } OP)$ ) die Voraussetzungen und ist von der Ordnung  $\alpha^*$ . q. e. d.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *L. Ahlfors and M. Heins*: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle, *Ann. Math.* (2) 50 (1949) 341—346.
- [2] *A. S. Besicovitch*: On integral functions of order less than 1. *Math. Ann.* 97 (1927) 677—695.
- [3] *C. Carathéodory*: Vorlesungen über reelle Funktionen. Teubner 1927.
- [4] *T. Carleman*: Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 196 (1933).
- [5] *J. Deny et P. Lelong*: Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, *Bull. Soc. Math. France* 75 (1947) 89—112.
- [6] *A. Dinghas*: Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman, *Math. Zeitschr.* 41 (1936) 713—716.
- [7] *A. Dinghas*: Sur une généralisation du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors, *Bull. Soc. Math. France* 64 (1936) 216—219.
- [8] *A. Dinghas*: Über das Minimum einer Klasse von subharmonischen Funktionen, *S.-B. Preuß. Akad. Wiss.* 1937, 193—205.
- [9] *A. Dinghas*: Sur quelques théorèmes du type de Phragmén-Lindelöf dans la théorie des fonctions harmoniques de plusieurs variables, *C. R. Acad. Sci. Paris* 232 (1951).
- [10] *M. Heins*: Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues, *Ann. Math.* 49 (1948) 200—213.
- [11] *H. Keller*: Über das Anwachsen von Potentialfunktionen im dreidimensionalen Raum, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Serie A, I, Nr. 83.
- [12] *H. Keller*: Sur la croissance des fonctions harmoniques s'annulant sur la frontière d'un domaine non borné, *C. R. Acad. Sci. Paris* 231 (1950).
- [13] *B. Kjellberg*: On certain integral and harmonic functions, *Dissert. Uppsala* 1948.
- [14] *J. Lelong-Ferrand*: Etude des fonctions surharmoniques positives dans un cylindre ou dans un cône, *C. R. Acad. Sci. Paris* 229 (1949).
- [15] *J. Lelong-Ferrand*: Extension du théorème de Phragmén-Lindelöf-Heins aux fonctions sousharmoniques dans un cône ou dans un cylindre, *C. R. Acad. Sci. Paris* 229 (1949).
- [16] *R. Nevanlinna*: Über Mittelwerte von Potentialfunktionen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Serie A, I, Nr. 57.
- [17] *R. Nevanlinna*: Eindeutige analytische Funktionen, Springer 1936.
- [18] *A. Pfluger*: Des théorèmes du type de Phragmén-Lindelöf, *C. R. Acad. Sci. Paris* 229 (1949).
- [19] *G. Pólya*: On the minimum modulus of integral functions of order less than unity, *J. London Math. Soc.* 1 (1926).
- [20] *T. Radó*: Subharmonic functions, Springer 1937.
- [21] *G. Valiron*: Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière, *Thèse, Toulouse* 1914.
- [22] *A. Wiman*: Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen der Höhe Null, *Math. Ann.* 76 (1915) 197—211.

(Eingegangen den 3. August 1951.)