

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Zur elementaren Flächentheorie.
Autor: Scherrer, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21267>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur elementaren Flächentheorie

Von W. SCHERRER, Bern

Die Krümmungslinien liefern bekanntlich ein Parameternetz, dessen man sich bei zahlreichen Fragen der elementaren Flächentheorie mit Vorteil bedient.

Darüber hinaus aber erweist es sich als vorteilhaft, zur expliziten Bearbeitung einer Raumfläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \quad (1)$$

mit der Normalen

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \quad (2)$$

nicht das traditionelle Dreibein

$$\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{N}, \quad (3)$$

sondern das Dreibein

$$\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v, \mathfrak{N} \quad (4)$$

zu benutzen.

Dies läuft dann darauf hinaus, daß man primär das Normalenbild (2) als Vektorfunktion

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u, v) \quad (5)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathfrak{N}^2 = 1 ; \quad (6b) \quad \mathfrak{N}_u \mathfrak{N}_v = 0 \quad (6a)$$

vorgibt und sekundär den Flächenvektor (1) mittels der *Rodrigues*-schen Gleichungen bestimmt.

Da diese Methode in dem traditionellen Lehrgang nicht verwendet wird, seien hier ihre Hauptformeln kurz zusammengestellt.

Setzen wir

$$e^2 = \mathfrak{N}_u^2 ; \quad g^2 = \mathfrak{N}_v^2 \quad (7)$$

so erhalten wir folgendes System von Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_{uu} &= \frac{e_u}{e} \mathfrak{N}_u - \frac{e e_v}{g^2} \mathfrak{N}_v - e^2 \mathfrak{N} \\
\mathfrak{N}_{uv} &= \frac{e_v}{e} \mathfrak{N}_u + \frac{g_u}{g} \mathfrak{N}_v \\
\mathfrak{N}_{vv} &= -\frac{g g_u}{e^2} \mathfrak{N}_u + \frac{g_v}{g} \mathfrak{N}_v - g^2 \mathfrak{N}
\end{aligned} \quad . \quad (8)$$

Als Integrabilitätsbedingung des Systems (8) erhält man die Relation

$$\frac{1}{e g} \left[\left(\frac{g_u}{e} \right)_u + \left(\frac{e_v}{g} \right)_v \right] + 1 = 0 \quad , \quad (9)$$

welche natürlich nichts anderes als die *Gaußsche* Gleichung für das Normalenbild darstellt.

Nachdem so ein Normalenbild mit orthogonalem Parameternetz konstituiert ist, gewinnt man nun den Ortsvektor vermittle der *Rodrigues*-schen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u &= -\varrho \mathfrak{N}_u \\
\mathfrak{x}_v &= -\sigma \mathfrak{N}_v
\end{aligned} \quad , \quad (10)$$

wobei ϱ und σ die Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Als Integrabilitätsbedingungen des Systems (10) ergeben sich

$$\begin{aligned}
\varrho_v &= -(\varrho - \sigma) \frac{e_v}{e} \\
\sigma_u &= -(\sigma - \varrho) \frac{g_u}{g}
\end{aligned} \quad . \quad (11)$$

Das System (11) zur Bestimmung von ϱ und σ kann separiert werden in die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho_{uv} + (\text{Lg } e)_v \varrho_u - \left[\text{Lg } \left(\frac{e_v}{e g} \right) \right]_u \varrho_v &= 0 \\
\sigma_{uv} + (\text{Lg } g)_u \sigma_v - \left[\text{Lg } \left(\frac{g_u}{e g} \right) \right]_v \sigma_u &= 0
\end{aligned} \quad . \quad (12)$$

Die konkrete Bestimmung einer Fläche gestaltet sich nun folgendermaßen:

Den Ausgangspunkt bildet eine Lösung von (9). Gestützt auf sie gewinnt man vermittle (8) das Normalenbild \mathfrak{N} und vermittle (11) respektive (12) die Hauptkrümmungsradien ϱ und σ . Das System (10) schließlich liefert zuletzt den Ortsvektor \mathfrak{x} .

Durch diese Methode kann man zahlreiche Probleme der Theorie der Raumflächen, wie etwa Minimalflächen, Flächen mit ebenen Krümmungslinien, Flächen konstanter *Gaußscher* Krümmung usw. einheitlich in Angriff nehmen. Als weiteres Beispiel erwähne ich die Bestimmung aller derjenigen Flächen, für welche die Stützfunktion eine Funktion des Radius ist. Diese Bestimmung ist ausgeführt in der Dissertation des Herrn H. Schindler [Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius].

(Eingegangen den 21. November 1951.)