Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Complément à un Théorème de M. Hadwiger.
Autor: Karamata, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20695

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Complément à un Théorème de M. Hadwiger

Par J. KARAMATA

§ 1. Soit

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu \ , \quad \text{convergente pour } |t| < 1 \ ,$$

et

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Lorsque

$$n a_n = O(1) \ , \quad n \to \infty \ , \tag{1}$$

les termes de la suite s_n restent à une distance finie des valeurs de la fonction $F(t)$ et, comme l'a montré Hadwiger [1]), on peut déterminer la valeur la plus précise de la constante A, afin que

$$\limsup_{n=\infty} |F(t_n) - s_n| \leqslant A \limsup_{n=\infty} |n a_n| \ ,$$

en choisissant convenablement t_n de manière que $t_n \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Or, ce fait n'a plus lieu si la suite $n\, a_n$ n'est bornée que d'un côté, c'est-à-dire lorsqu'on remplace (1) par

$$n a_n > O(1) \ , \quad n \longrightarrow \infty \ . \tag{2}$$

---

[1]) *H. Hadwiger*, Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Commentarii Math. Helv. **16** (1943/44), p. 209—214 ;
Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art. Commentarii Math. Helv. **20** (1947), p. 319—332 ;
Über eine Konstante Tauberscher Art. Revista Hispano-Americana (4) VII (1947), p. 3—7.

Voir de même :

R. P. Agnew, Abel Transforms of Tauberian series, Duke Math. J. **12** (1945), p. 27—36.

Ph. Hartmann, Tauber's theorem and absolute constants, Amer. J. of Math. **69** (1947), p. 599—606.

A. Wintener, A Tauberian theorem, Commentarii Math. Helv. **20** (1947), p. 216.

Quoique de (2) et de

$$F(t) = O(1) \ , \quad t \to 1 \ ,$$

il résulte déjà que

$$s_n = O(1) \ , \quad n \to \infty \ , \ ^{2)}$$

l'exemple que nous allons donner montrera que dans ce cas, c'est-à-dire lorsque la condition (2) seule est remplie, les termes de la suite s_n peuvent s'écarter indéfiniment des valeurs de $F(t)$, quelle que soit la manière dont $t \to 1$.

En effet, soit

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{lorsque} \quad n \neq 2^{2^\nu} \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \ , \\ \lg 2 + \frac{1}{2} \lg n - \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad n = 2^{2^\nu} \ , \end{cases} \tag{3}$$

et

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu =$$

$$= \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2^{2\nu}} + \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu t^{2^{2\nu}} - \lg \frac{1}{1-t} \ . \tag{4}$$

Il est évident que la suite (3) satisfait à la condition (2), c'est-à-dire que l'on a

$$a_n \geqslant -\frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \ .$$

D'autre part

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \to \infty \quad \text{pour} \quad k = 2^{2^\nu} \to \infty \ ,$$

car, en posant

$$a = \tfrac{1}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 \ ,$$

on a

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad n = 1 \ , \\ a + \lg \lg 2^{2^\nu} + \lg 2^{2^\nu} - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\mu} & \text{pour} \quad 2^{2^\nu} \leqslant n < 2^{2^{\nu+1}} \ , \\ & (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Donc, pour $k = 2^{2^\nu}$

$$s_k = a + \lg \lg k + \lg k - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{1}{\mu} = \lg \lg k + a - C + o(1) \ , \ k \to \infty \ ,$$

C étant la constante d'Euler.

---

[2]) Voir, par ex., *J. Karamata*, Über einen Satz von Vijayaraghavan, Math. Zeit. 34 (1932), p. 737—740.

Par contre, la fonction $F(t)$, définie par (4), reste bornée supérieurement, comme nous le montrerons au § 2, car on a

$$\limsup_{t=1} F(t) = \tfrac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 \ . \tag{5}$$

Il en résulte donc que, dans ce cas,

$$s_n - F(t) \to \infty \quad \text{lorsque} \quad n = 2^{2^\nu} \to \infty \ ,$$

quelle que soit la manière dont $t \to 1$.

Dans cet exemple, quoique $F(t)$ soit bornée supérieurement, la suite s_n ne l'est pas, mais son ordre de grandeur dans la direction positive est au plus celui de $\lg \lg n$, c'est-à-dire

$$s_n < \lg \lg n + O(1) \ , \quad n \to \infty \ .$$

Or ce fait a lieu même dans le cas général et, lorsque (2) et (5) sont satisfaits, l'inégalité précédente fournit l'ordre de croissance maximale de la suite s_n dans la direction positive.

Nous allons, en effet, démontrer au § 3 le théorème suivant :

De

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu < O(1) \ , \quad t \to 1 \ , \tag{6}$$

et

$$n a_n \geqslant - W \ , \quad n \geqslant 1 \ , \tag{7}$$

il résulte

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant W \lg \lg n + O(1) \ , \quad n \to \infty \ . \tag{8}$$

Dans l'inégalité (8) *on ne peut remplacer* $W \lg \lg n$ *par aucun terme qui tend vers l'infini moins rapidement.*

§ 2. Pour démontrer l'affirmation (5) posons

$$- \lg t = \frac{1}{x} \ , \quad k = k_\nu = 2^{2^\nu} \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

et

$$F(t) = F(e^{-\frac{1}{x}}) = G(x) \ . \tag{9}$$

On aura alors, d'après (4) ,

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x) + \lg\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) , \tag{10}$$

avec

$$G_1(x) = \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu e^{-\frac{k_\nu}{x}} ,$$

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k_\nu}{x}} ,$$

et la relation à démontrer (5) se réduit à

$$G(x) \leqslant \tfrac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1) , \quad x \longrightarrow \infty . \tag{11}$$

Considérons en premier lieu la fonction $G_1(x)$. En remarquant que

$$k_{\nu+1} = k_\nu^2 , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

on peut poser

$$x = k_n^{1+r} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < 1 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et l'on aura

$$G_1(k_n^{1+r}) = \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^\nu \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} 2^\nu \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^{n-\nu} \exp(-k_{n-\nu} k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{n+\nu} \exp(-k_{n+\nu} k_n^{-1-r}) \right\} =$$

$$= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^{-\nu} \exp(-k_n^{2^{-\nu}-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \exp(-k_n^{2^\nu-1-r}) \right\} =$$

$$= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \exp(-k_n^{-r}) + \sum_{\nu=1}^{n} 2^{-\nu} + 2 \exp(-k_n^{1-r}) \right\} + o(1) , n \longrightarrow \infty .$$

Ainsi,

$$G_1(x) = G_1(k_n^{1+r}) =$$

$$= 2^{n-1} \lg 2 \{1 + \exp(-k^{-r}) + 2 \exp(-k_n^{1-r})\} - \tfrac{1}{2} \lg 2 + o(1) ,$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$ quel que soit

$$0 \leqslant r < 1 ,$$

et cette relation, en tenant compte de

$$2^{2^n} = k_n = k \ ,$$

peut être mise sous la forme

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r}) + 2\exp(-k^{1-r})}{2(1+r)} \lg x - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1)\,,\ x \to \infty\,.$$

Or, lorsque $k \to \infty$ le facteur de $\lg x$ reste inférieur à 1 toutes les fois que $0 < \varepsilon < r < 1 - \varepsilon$ et ne peut $\to 1$ que lorsque $r \to 0$ de manière que $k^{-r} \to 0$, $k \to \infty$. Mais, dans ce cas, $\exp(-k^{1-r}) \to 0$ plus vite que $\lg x$. On obtient ainsi pour $G_1(x)$ l'expression

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r})}{2(1+r)} \lg x - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \quad x \to \infty \ ,$$

que l'on peut encore mettre sous la forme

$$G_1(x) = \lg x - \frac{\lg k}{2}\{1 + 2r - \exp(-k^{-r})\} - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1)\,,\ x \to \infty \ . \tag{12}$$

En dérivant $\qquad 1 + 2r - \exp(-k^{-r})$

par rapport à r, on voit que cette expression prend sa plus petite valeur lorsque

$$\exp(-k^{-r}) = \tfrac{1}{2}\lg k \cdot k^{-r} \ ,$$

c'est-à-dire pour

$$k^{-r} = \frac{2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k) \ , \quad k \to \infty \ ,$$

ou bien pour

$$r = \frac{\lg\lg k - \lg 2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k) \ , \quad k \to \infty \ ,$$

et l'on en déduit que

$$1 + 2r - \exp(-k^{-r}) > \frac{2}{\lg k}\{\lg\lg k - \lg 2\} + O(\lg^{-2} k)\,,\ k \to \infty \ .$$

Il en résulte donc, d'après (12), que

$$G_1(x) < \lg x - \lg\lg k + \lg 2 - \tfrac{1}{2}\lg 2 + O(\lg x \lg^{-2} k) =$$
$$< \lg x - \lg\lg x + \lg(1+r) + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \ x \to \infty \ ,$$

c'est-à-dire

$$G_1(x) < \lg x - \lg\lg x + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \quad x \to \infty \ . \tag{13}$$

Pour évaluer la fonction

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k_\nu}{x}} ,$$

remarquons que par les mêmes considérations on peut déduire que

$$G_2(x) = G_2(k^{1+r}) = \lg 2 \{n + \exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1) =$$
$$= \lg\lg x - \lg\lg 2 - \lg(1+r) + \lg 2 \{\exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1)$$

et que l'expression $G_2(x) - \lg\lg x$, tend vers sa plus grande valeur lorsque $r \to 0$ et $k^{-r} \to 0$.

On en conclut ainsi que

$$G_2(x) < \lg\lg x + \lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) , \quad x \to \infty . \tag{14}$$

Enfin, en introduisant dans (10) les valeurs obtenues par (13) et (14) et en remarquant que

$$\lg(1 - e^{-\frac{1}{x}}) = -\lg x + o(1) , \quad x \to \infty ,$$

on obtient finalement

$$G(x) < \lg x - \lg\lg x + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) +$$
$$+ \lg\lg x + \lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) - \lg x + o(1) =$$
$$< \tfrac{3}{2}\lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) , \quad x \to \infty ,$$

ce qui démontre la relation (11) et, d'après (9), l'affirmation (5), car du calcul précédent il résulte que dans cette dernière relation $\frac{3}{2}\lg 2 - \lg\lg 2$ ne peut être remplacé par une valeur plus petite.

§ 3. Pour démontrer encore le théorème énoncé au début, posons, d'après (6) et (7),

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu \leqslant M \quad \text{et} \quad a_n \geqslant -\frac{W}{n} , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Il en résulte

$$M \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu > \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu + \frac{W}{\nu}\right) t^\nu - W \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} t^\nu >$$

$$> t^n \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu + \frac{W}{\nu}\right) - W \lg \frac{1}{1-t} =$$

$$> t^n s_n + W\left(t^n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \lg \frac{1}{1-t}\right) ,$$

c'est-à-dire

$$s_n < M t^{-n} + W\left(t^{-n} \lg \frac{1}{1-t} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right) .$$

En posant, dans cette inégalité,

$$t = 1 - \frac{1}{n \lg n} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \lg n + C + o(1) ,$$

on obtient

$$s_n < M\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} + W\left\{\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} (\lg n + \lg \lg n) - h_n\right\} =$$

$$< M + O\left(\frac{1}{\lg n}\right) + W\left\{\lg \lg n + O\left(\frac{\lg \lg n}{\lg n}\right) + \right.$$

$$\left. + \lg n \left[\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} - 1\right] - C + o(1)\right\} =$$

$$< M + W\{\lg \lg n + 1 - C\} + o(1) =$$

$$< W \lg \lg n + M + W(1 - C) + o(1) , \quad n \to \infty ,$$

ce qui démontre le théorème.

Quant au fait que dans cette dernière relation on ne peut remplacer $W \lg \lg n$ par une fonction qui croît moins rapidement, cela résulte de l'exemple traité aux §§ 1 et 2.

(Reçu le 15 septembre 1949.)