Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 25 (1951)

Artikel: Metrisches Feld und skalares Materiefeld.

Autor: Fink, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20693

Metrisches Feld und skalares Materiefeld

Von K. Fink, Bern

§ 1. Einleitung

In der Mie-Hilbertschen Theorie der Materie[1]) ist das Wirkungsprinzip

$$\delta J = 0$$

mit dem Wirkungsintegral

$$J = \int W \sqrt{-\mathrm{G}}\, dx$$

Ausgangspunkt für die Herleitung der Gravitations- und Materiegleichungen. Das metrische Feld wird durch die Gravitationspotentiale

$$G_{\varrho\sigma} = G_{\varrho\sigma}(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

der metrischen Grundform

$$\dot{s}^2 = G_{\varrho\sigma}\, \dot{x}_\varrho\, \dot{x}_\sigma\ ,$$

das materielle Feld durch das Vektorpotential

$$\Phi_\varrho = \Phi_\varrho(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

beschrieben. Die invariante Weltfunktion W hängt von den $G_{\varrho\sigma}$, ihren ersten und zweiten Ableitungen nach den Weltkoordinaten und von den materiellen Feldgrößen ab. J selbst ist eine Integralinvariante. Das Wirkungsprinzip sagt aus, daß bei unabhängiger Variation der Zustandsgrößen das Wirkungsintegral stationär sein soll. Dies ergibt ein vollständiges System von Gravitations- und Materiegleichungen. Die Weltfunktion kann in zwei Teile

$$W = R + \varkappa M$$

zerlegt werden, von denen der Riemannsche Krümmungsskalar R von den materiellen Zustandsgrößen und die materielle Wirkungsfunktion M von den Ableitungen der $G_{\varrho\sigma}$ unabhängig ist.

---

[1]) *D. Hilbert*, Grundlagen der Physik, 1. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1915

Es ist nicht gelungen, eine Weltfunktion aufzufinden, die auf Grund der zugehörigen Differentialgleichungen das materielle Geschehen und die Materie selbst befriedigend beschreibt. Man ist immer noch auf den phänomenologischen Energie-Impuls-Tensor angewiesen, der sich bekanntlich nicht auf eine Wirkungsfunktion M zurückführen läßt.

W. Scherrer, Bern, hat schon vor längerer Zeit auf die Möglichkeit, die Materie durch eine skalare Funktion zu beschreiben, hingewiesen[2]). Es ist von Interesse, zu untersuchen, was sich aus der Verbindung von $\dot{s}^2$ mit der skalaren Funktion ohne Einführung eines Vektorfeldes ergibt.

In dieser Arbeit soll die mit Hilfe des Gradienten der invarianten Funktion $S = S(x_0, x_1, x_2, x_3)$ gebildete Wirkungsfunktion

$$M = 2 \frac{\omega}{\varkappa} \nabla S \tag{1}$$

mit Hilfe der Mie-Hilbertschen Methoden untersucht werden. Mit ∇S wird der erste Beltramische Operator

$$\nabla S \equiv G^{\varrho\sigma} \frac{\partial S}{\partial x_\varrho} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} \tag{2}$$

bezeichnet.

Das statisch-zentralsymmetrische Feld läßt sich exakt bestimmen. Es zeigt sich, daß Lösungen mit endlicher, aber negativer Gesamtenergie existieren. Anschließend wird das kosmologische Problem auf Grund dieser Wirkungsfunktion behandelt.

In einer neueren Arbeit[3]) hat W. Scherrer den in wesentlicher Hinsicht erweiterten Ansatz

$$\delta \int \left\{ (R - 2\Lambda)\, \psi^2 + 4\omega G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right\} \sqrt{-G}\, dx = 0$$

behandelt. Wie mir Herr Scherrer mitteilte, ergeben sich für die Grenze $\omega \to \infty$ Lösungen, die den unsrigen entsprechen.

§ 2. Die Feldgleichungen

Die zu lösende Variationsaufgabe mit der speziellen materiellen Wirkungsfunktion M lautet:

$$\delta \int_{\mathfrak{G}} \{R + 2\omega \nabla S\} \sqrt{-G}\, dx = 0 \ . \tag{3}$$

[2]) Verhandlungen der S.N.G., Basel 1941. H. P. A. XXII, 1949.
[3]) Erscheint demnächst in den H. P. A.

Integriert wird über ein beschränktes Weltgebiet $\mathfrak{G}$. Die Weltkoordinaten sind $x_0 = \mathrm{ct}, x_1, x_2, x_3$; dx steht für $dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$. Die $G_{\varrho\sigma}$ sind die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform

$$\dot{s}^2 \equiv G_{\varrho\sigma}\, \dot{x}_\varrho\, \dot{x}_\sigma$$

vom Trägheitsindex drei. G bezeichnet die zur Matrix der $G_{\varrho\sigma}$ gehörige Determinante. ω ist eine Konstante. Der Riemannsche Krümmungsskalar wird definiert durch

$$R \equiv G^{\varrho\sigma} R_{\varrho\sigma}$$

mit

$$R_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\varrho\lambda}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\varrho\sigma}}{\partial x_\lambda} + \Gamma^\lambda_{\varrho\mu}\, \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\varrho\sigma}\, \Gamma^\mu_{\lambda\mu} .$$

Die $\Gamma^\varrho_{\sigma\tau}$ sind die Christoffelschen Symbole. Die Gravitationspotentiale $G^{\varrho\sigma}$ und die Materiefunktion S sind die zu variierenden Zustandsgrößen. Vorausgesetzt wird das Verschwinden der Variationen auf dem Rande von $\mathfrak{G}$.

Es erweist sich als vorteilhaft, die Variationsaufgabe durch direktes Ausführen der Variationen zu lösen, ohne die allgemeinen Lagrange-Gleichungen zu verwenden. Nach Weyl[4]) vereinfacht sich das Variationsproblem durch Elimination der in $R\sqrt{-G}$ steckenden Divergenz. Wir definieren die Größen:

$$Q \equiv G^{\varrho\sigma}\{\Gamma^\lambda_{\varrho\sigma}\, \Gamma^\mu_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\varrho\mu}\, \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\}$$

$$P^\sigma \equiv G^{\varrho\sigma}\, \Gamma^\lambda_{\varrho\lambda} - G^{\varrho\lambda}\, \Gamma^\sigma_{\varrho\lambda} .$$

Die Berechnung liefert dann die Aufspaltung

$$R\sqrt{-G} \equiv \frac{\partial P^\sigma \sqrt{-G}}{\partial x_\sigma} + Q\sqrt{-G} .$$

Bei der Variation und Integration über $\mathfrak{G}$ läßt sich der erste Teil der rechten Seite in ein Oberflächenintegral verwandeln und liefert keinen Beitrag. Die vereinfachte Variationsaufgabe lautet jetzt:

$$\delta \int_{\mathfrak{G}} \{Q + 2\omega \nabla S\} \sqrt{-G}\, dx = 0 . \tag{4}$$

Aus der Variation der $G^{\varrho\sigma}$ folgen die zehn Feldgleichungen der Gravitation:

---

[4]) *Weyl*, Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., S. 238.

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} R G_{\varrho\sigma} = -\omega \left\{ 2 \frac{\partial S}{\partial x_\varrho} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} - \nabla S \cdot G_{\varrho\sigma} \right\} . \tag{5}$$

Durch Vergleich mit den Einsteinschen Gleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} R G_{\varrho\sigma} = -\varkappa T_{\varrho\sigma}$$

ergibt sich für den Energie-Impuls-Tensor:

$$T_{\varrho\sigma} = \frac{\omega}{\varkappa} \left\{ 2 \frac{\partial S}{\partial x_\varrho} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} - \nabla S G_{\varrho\sigma} \right\} . \tag{6}$$

Die Variation von S ergibt die Feldgleichungen der Materie:

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_\varrho} \right) \equiv \square S = 0 . \tag{7}$$

Aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung

$$D_\varrho (R^\varrho_\sigma - \tfrac{1}{2} \delta^\varrho_\sigma R)$$

folgt der Erhaltungssatz

$$D_\varrho T^\varrho_\sigma = 0 . \tag{8}$$

Diese vier Identitäten, deren Existenz schon aus einem allgemeinen Theorem der Variationsrechnung[1]) folgt, gewährleisten die der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegende Freiheit der Koordinatentransformation.

§ 3. Das statisch-zentralsymmetrische Feld

Wir geben dem Linienelement

$$\dot{s}^2 \equiv G_{\varrho\sigma}(x_0, x_1, x_2, x_3)\, \dot{x}_\varrho \dot{x}_\sigma$$

durch Zerspaltung in Raum und Zeit die Gestalt

$$\dot{s}^2 \equiv f^2(x_1, x_2, x_3)\, \dot{x}_0^2 - g_{kl}(x_1, x_2, x_3)\, \dot{x}_k \dot{x}_l \quad (k, l = 1, 2, 3) .$$

Wegen der räumlichen Zentralsymmetrie läßt sich dieses mit Hilfe der Polarkoordinaten r, ϑ, φ in der Schwarzschildschen Form

$$\dot{s}^2 \equiv f^2(r)\, \dot{x}_0^2 - g^2(r)\, \dot{r}^2 - r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \tag{9}$$

anschreiben. Die zu bestimmenden Funktionen f und g hängen nur von der einzigen Variabeln r ab.

Die Tafel der Gravitationspotentiale lautet:

$$\boxed{\begin{array}{ll} G_{00} = f^2 & G_{\varrho\sigma}\underset{\varrho\neq\sigma}{=} 0 \\ G_{11} = -g^2 & \\ G_{22} = -r^2 & G^{\varrho\varrho} = \dfrac{1}{G_{\varrho\varrho}} \\ G_{33} = -r^2 \sin^2\vartheta & \end{array}} \tag{10}$$

Die Materiefunktion S hängt natürlich auch nur von r ab. Die Berechnung der materiellen Wirkungsfunktion nach (1) ergibt

$$M = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{2}{g^2} S'^2 . \tag{11}$$

Der Strich bezeichnet die Ableitung nach r. Für Q erhalten wir nach Beifügung des für Polarkoordinaten notwendigen Zusatzes $^2/r^2$:

$$Q = \frac{2}{r^2}\left(1 + \frac{2rf' + f}{fg^2}\right) .$$

Mit

$$\sqrt{-G} = r^2 fg \sin\vartheta \tag{12}$$

lautet jetzt die Variationsaufgabe unter Weglassung der Zeit- und Winkelvariabeln:

$$\delta\int\left\{fg + \frac{2rf' + f}{g} - \omega r^2 \frac{f}{g} S'^2\right\} dr = 0 . \tag{4'}$$

Durch Variieren der Funktionen f, g und S erhalten wir das System der Lagrange-Differentialgleichungen:

$$2\left(\frac{r}{g}\right)' - \left(g + \frac{1}{g}\right) + \omega r^2 \frac{S'^2}{g} = 0 \tag{13$_1$}$$

$$2\frac{rf'}{g^2} - f\left(1 - \frac{1}{g^2}\right) - \omega r^2 \frac{fS'^2}{g^2} = 0 \tag{13$_2$}$$

$$\left(r^2 \frac{fS'}{g}\right)' = 0 . \tag{13$_3$}$$

Die Integration der dritten Gleichung ergibt

$$S' = \frac{g}{f}\frac{A}{r^2} . \tag{14}$$

Die Integrationskonstante A hat für unser Problem eine der elektrischen Ladung analoge Bedeutung. Wir nennen sie „S-Ladung". Wir bilden die Kombinationen

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left\{f\cdot(13_1)+g\cdot(13_2)\right\} &\equiv \frac{f}{g}+r\left(\frac{f}{g}\right)'-fg=0 \\ -\frac{g^2}{2r}\left\{f\cdot(13_1)-g\cdot(13_2)\right\} &\equiv (fg)' - \omega r f g S'^2 = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{15}$$

Wir setzen

$$p\equiv f\cdot g \qquad q\equiv\frac{f}{g} . \tag{16}$$

Mit

$$h\equiv r\cdot q \tag{17}$$

verwandelt sich (15) in

$$\begin{aligned} h'-p &= 0 \\ p'-\omega r p S'^2 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

(16), (17) in (14) eingesetzt ergibt

$$r^2 S'^2 = \frac{A^2}{h^2} . \tag{19}$$

Aus (18) erhalten wir mit (19) für h die Differentialgleichung

$$r h'' + \omega A^2 \left(\frac{1}{h}\right)' = 0 . \tag{20}$$

Durch Einführen der neuen unabhängigen Variabeln

$$s\equiv \ln r \tag{21}$$

erhält (20) die Gestalt

$$\underline{\ddot{h}-\dot{h} = -\omega A^2\left(\frac{\dot{1}}{h}\right)},$$

wobei der Punkt die Ableitung nach s bezeichnet. Eine erste Integration liefert

$$\dot{h} = -\omega A^2\frac{1}{h}+h+2B . \tag{22}$$

Die Integrationskonstant $2B$ hat den Charakter einer Länge. Mit

$$h+B\equiv u \tag{23}$$

folgt aus (22)

$$\underline{ds=\frac{(u-B)\,du}{u^2-(B^2+\omega A^2)}} . \tag{24}$$

Für die Integration von (24) unterscheiden wir auf Grund der Diskriminante

$$B^2 + \omega A^2 = D \tag{25}$$

drei Fälle:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \underline{B^2 + \omega A^2 > 0} \\ \text{II.} & \underline{B^2 + \omega A^2 = 0} \\ \text{III.} & \underline{B^2 + \omega A^2 < 0} \end{array} \tag{26}$$

Fall I:

Wir führen ein

$$\frac{B}{+\sqrt{D}} = \beta \qquad \frac{A}{+\sqrt{D}} = \alpha \ , \tag{27}$$

wobei gilt

$$\beta^2 + \omega\,\alpha^2 = 1 \ .$$

Mit

$$u \equiv +\sqrt{D} \cdot y \tag{28}$$

folgt aus (24)

$$s = \int \frac{y - \beta}{y^2 - 1}\, dy \ . \tag{29}$$

Die Integration ergibt

$$s - \ln a = \tfrac{1}{2} \{ (1 - \beta) \ln | y - 1 | + (1 + \beta) \ln | y + 1 | \} .$$

Wir ersetzen s wieder durch r und erhalten für r als Funktion von y

$$\underline{r = a \cdot \left| \frac{y - 1}{y + 1} \right|^{\frac{1-\beta}{2}} \cdot | y + 1 |} \ . \tag{30}$$

Fall II:

Mit

$$u \equiv By \tag{31}$$

erhalten wir aus (24)

$$s = \int \frac{y - 1}{y^2}\, dy = \ln | y | + \frac{1}{y} \ . \tag{32}$$

Daraus folgt

$$\underline{r = a \cdot | y | \cdot e^{\frac{1}{y}}} \ . \tag{33}$$

Fall III:

Wir setzten

$$\frac{B}{+\sqrt{-D}} = \beta' \qquad \frac{A}{+\sqrt{-D}} = \alpha' \ . \tag{34}$$

Mit

$$u \equiv +\sqrt{-D} \cdot y \tag{35}$$

folgt aus (24)

$$s = \int \frac{y - \beta'}{y^2 + 1} dy \ . \tag{36}$$

Die Integration ergibt

$$s - \ln a = \tfrac{1}{2} \ln (y^2 + 1) - \beta' \operatorname{arc\,tg} y \ . \tag{37}$$

Mit $s = \ln r$ erhalten wir

$$\underline{r = a \cdot \sqrt{y^2 + 1} \cdot e^{-\beta' \operatorname{arctg} y}} \ . \tag{38}$$

Die Berechnung von p und q auf Grund von (17), (18), (23) liefert:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & \underline{p = \dfrac{\sqrt{D}}{r} \cdot \dfrac{y^2 - 1}{y - \beta}} & \underline{q = \dfrac{\sqrt{D}}{r} \cdot (y - \beta)} \\ \mathrm{II} & \underline{p = \dfrac{B}{r} \cdot \dfrac{y^2}{y - 1}} & \underline{q = \dfrac{B}{r} \cdot (y - 1)} \\ \mathrm{III} & \underline{p = \dfrac{\sqrt{-D}}{r} \cdot \dfrac{y^2 + 1}{y - \beta'}} & \underline{q = \dfrac{\sqrt{-D}}{r} \cdot (y - \beta')} \ . \end{array} \tag{39}$$

Aus

$$f^2 = pq \qquad g^2 = \frac{p}{q}$$

erhalten wir auf Grund von (30), (33), (38) und (39) folgende Lösungen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathrm{I} & f^2 = \dfrac{D}{a^2} \cdot \left(\dfrac{y - 1}{y + 1}\right)^{\beta} & g^2 = \dfrac{y^2 - 1}{(y - \beta)^2} \\ \mathrm{II} & f^2 = \dfrac{B^2}{a^2} \cdot e^{-\frac{2}{y}} & g^2 = \dfrac{y^2}{(y - 1)^2} \\ \mathrm{III} & f^2 = \dfrac{-D}{a^2} \cdot e^{2\beta' \operatorname{arctg} y} & g^2 = \dfrac{y^2 + 1}{(y - \beta')^2} \end{array}} \tag{40}$$

§ 4. Diskussion der Lösungen

In § 2 wurde das Linienelement in der Form

$$\dot{s}^2 \equiv f^2(r)\,\dot{x}_0^2 - g^2(r)\,\dot{r}^2 - r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)$$

vorausgesetzt. Wir führen

$$\dot{\sigma}^2 \equiv \dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

als Abkürzung ein. Die Variable r, der „Radius", hat keine ausgezeichnete geometrische Bedeutung. Durch die Formeln (30), (33) und (38) haben wir y an Stelle von r eingeführt. Das Linienelement heißt dann:

$$\dot{s}^2 \equiv \bar{f}^2(y)\,\dot{x}_0^2 - \bar{g}^2(y)\,\dot{y}^2 - r^2(y)\,\dot{\sigma}^2\ . \tag{41}$$

$\bar{f}^2(y) = f^2(r[y])$ ist durch (40) gegeben. Mit $\bar{g}^2(y)$ ist der Ausdruck $g^2(r[y])\left(\dfrac{dr}{dy}\right)^2$ bezeichnet.

Die metrischen Koeffizienten enthalten noch eine willkürliche Konstante a. Diese wird durch eine Grenzbedingung für das räumlich Unendliche fixiert. Wir fordern, daß das Linienelement (41) mit r gegen Unendlich in das der speziellen Relativitätstheorie mit $f^2 \equiv g^2 \equiv 1$ übergehe. Die Funktion $r(y)$ spielt also im räumlich Unendlichen die Rolle des euklidischen Radius. Durch diese Grenzbedingung ist unser Problem erst vollständig bestimmt.

Es ist jetzt der Variationsbereich von y zu bestimmen, in welchem einerseits die Maßbestimmung sich regulär verhält und andererseits die Grenzbedingung sich durch spezielle Wahl von a erfüllen läßt. Wir untersuchen die drei Fälle I, II und III gesondert.

Fall I:

Für $y \geqq 1$ erhalten wir mit

$$r' = a \cdot \frac{y-\beta}{y-1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}$$

für das Linienelement (41):

$$\dot{s}^2 \equiv \frac{D}{a^2}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\beta}\dot{x}_0^2 - a^2\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{\beta}\dot{y}^2 - a^2(y+1)^2\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{1-\beta}\dot{\sigma}^2\ .$$

Mit

$$a = \sqrt{D}$$

ist die Grenzbedingung erfüllt. Singulär wird die Maßbestimmung für $y = 1$.

Der Variationsbereich $-1 \leqq y \leqq +1$ scheidet aus. Der Trägheitsindex der metrischen Form ändert sich und die Grenzbedingung läßt sich nicht erfüllen. Im Bereiche $y \leqq -1$ erhalten wir dasselbe Linienelement.

Fall II:

Mit

$$r' = a\, e^{\frac{1}{y}} \left(\frac{y-1}{y} \right)$$

ergibt sich für das Linienelement:

$$\underline{\dot{s}^2 \equiv \frac{B^2}{r_0^2}\, e^{-\frac{2}{y}} - a^2 e^{\frac{2}{y}}\, \dot{y}^2 - a^2 e^{\frac{2}{y}}\, y^2 \dot{\sigma}^2} \; .$$

Wenn wir $a = B$ setzen, so ist die Grenzbedingung erfüllt. Singulär wird die Maßbestimmung für $y = 0$.

Fall III:

Mit Hilfe von

$$r' = a \frac{y - \beta}{\sqrt{y^2+1}}\, e^{-\beta' \operatorname{arctg} y}$$

schreibt sich das Linienelement in der Form:

$$\underline{\dot{s}^2 \equiv \frac{-D}{a^2}\, e^{2\beta' \operatorname{arctg} y}\, \dot{x}_0^2 - a^2 e^{-2\beta' \operatorname{arctg} y}\, \dot{y}^2 - a^2 (y^2+1)\, e^{-2\beta' \operatorname{arctg} y}\, \dot{\sigma}^2} \, .$$

Für y unendlich wird das Linienelement mit $a = \sqrt{-D}\, e^{+\beta' \frac{\pi}{2}}$ pseudoeuklidisch.

In der Mieschen Feldtheorie[5]) wird die Materie nur auf Grund der elektromagnetischen Zustandsgrößen beschrieben. Es wird vermieden neben der elektromagnetischen Energie eine mechanische Masse ad hoc einzuführen. Hilbert hat diese Theorie zu einer geschlossenen Beschreibung der Materie erweitert, die Gravitation und Elektrodynamik umfaßt [1]) [6]). Stellen wir uns konsequent auf den Boden dieser Theorie,

---

[5]) *G. Mie*, Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys., Bd. 37, 39, 40.

[6]) *W. Scherrer*, Gravitationstheorie und Elektrodynamik, H. P. A., XXII, 1949.

dann muß sich für $S' \equiv 0$ — materiefreier Raum — die metrische Struktur als pseudoeuklidisch erweisen. Daraus folgt für unser Problem, daß die Integrationskonstante B gleich Null gesetzt werden muß. Auf Grund von (26) und mit der Forderung $\omega > 0$ folgt, daß Fall III ausscheidet. Lassen wir Werte $B \neq 0$ zu, so stellen wir uns auf den Boden der klassischen Schwarzschildschen Lösung, die das Gravitationsfeld eines Massenpunktes beschreibt. Unabhängig vom S-Feld wird also eine mechanische Masse eingeführt. Jetzt erhalten wir für $S' \equiv 0$, d. h. $A = 0$ mit Hilfe von

$$p = \frac{r - 2B}{r}, \quad q \equiv 1$$

die klassische Lösung

$$f^2 = \frac{r - 2B}{r}, \quad g^2 = \frac{r}{r - 2B} .$$

Die Konstante a wurde gleich $\sqrt{D}$ gesetzt.

Im Fall I, der also den klassischen enthält, können wir von einem Überwiegen der Gravitationswirkung sprechen. Im Fall III würde dann die S-Wirkung vorherrschen.

§ 5. Berechnung der Totalenergie

Wir ermitteln den Energie-Impuls-Tensor nach der Formel

$$T_{\varrho\sigma} = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{2\frac{\partial S}{\partial x_\varrho}\frac{\partial S}{\partial x_\sigma} - \nabla S G_{\varrho\sigma}\right\} .$$

Mit

$$\nabla S = -\frac{1}{g^2} S'^2$$

ergibt sich die Tafel:

$T_{00} = \frac{\omega}{\varkappa}\frac{f^2}{g^2} S'^2$	$T_{22} = \frac{\omega}{\varkappa}\frac{r^2}{g^2} S'^2$
$T_{11} = \frac{\omega}{\varkappa} S'^2$	$T_{33} = \sin^2\vartheta\, T_{22}$

Die Totalenergie berechnet sich aus

$$E = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int^{\infty} T_0^0 \sqrt{-G}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi .$$

Mit

$$T_0^0 = \frac{\omega}{\varkappa}\frac{S'^2}{g^2}$$

erhalten wir, indem wir die Integration bezüglich der Winkelvariabeln ausführen:

$$\underline{E = \frac{4\pi\omega}{\varkappa}\int^{\infty} S'^{\,2}\, q\, r^2\, dr\ .}$$

Fall I:

Mit Hilfe von

$$dr = r\,\frac{y-\beta}{y^2-1}\,dy$$

folgt

$$E = \frac{4\pi\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{\sqrt{D}}\int\frac{dy}{y^2-1}\ .$$

Die Integration erstreckt sich über das y-Intervall $1 \leqq y < \infty$. Wir erhalten:

$$E = \frac{2\pi\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{\sqrt{D}}\left|\ln\frac{y-1}{y+1}\right|_{1}^{\infty}\ .$$

Dieser Ausdruck divergiert von der Ordnung eines Logarithmus. Die Gesamtenergie wird unendlich.

Fall II:

Mit

$$dr = r\,\frac{y-1}{y^2}\,dy$$

erhalten wir

$$E = \frac{4\pi\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{B}\int\frac{dy}{y^2}\ .$$

Wir integrieren über das Intervall $1 \leqq y < \infty$. Es ergibt sich auch in diesem Fall eine unendliche Totalenergie.

Fall III:

Die Energie berechnet sich aus

$$E = \frac{4\pi\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{\sqrt{-D}}\int\frac{dy}{y^2+1}\ .$$

Die Integration erstreckt sich von 0 bis ∞. Sie ergibt:

$$E = \frac{4\pi\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{\sqrt{-D}}\left|\operatorname{arc\,tg} y\right|_{0}^{\infty} = \frac{2\pi^2\omega}{\varkappa}\,\frac{A^2}{\sqrt{-D}}\ .$$

Wir erhalten einen endlichen Energieinhalt. Damit dieser positiv ausfällt, muß auch ω positiv gewählt werden. Dadurch wird aber die Bedingung (26) III verletzt.

§ 6. Das kosmologische Problem

Wir setzen räumliche Isotropie für einen Beobachter in einem beliebigen Weltpunkt voraus. Zeit und Raum lassen sich dann trennen und der Raumanteil muß homogen sein[7]). Wir können also dieser Betrachtung das Linienelement

$$\dot{s}^2 \equiv \dot{x}_0^2 - L^2(x_0)\,\dot{\sigma}^2$$

zugrunde legen, wobei

$$\dot{\sigma}^2 \equiv g_{kl}\,\dot{x}_k\,\dot{x}_l = \dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi\,\dot{\chi}^2 \quad {}^{8})$$

sich auf den Raumanteil bezieht. Der „Radius" L ist eine Funktion von x_0 allein. In einem bestimmten Zeitmoment bildet der Raumanteil die Oberfläche einer dreidimensionalen Sphäre. L ist ihr Radius. Wir setzen L als reell voraus. Die Tafel der $G^{\varrho\sigma}$ lautet:

$$\boxed{\begin{matrix} G^{00} = 1 & G^{0k} = 0 \\ & G^{ik} = -\dfrac{g^{ik}}{L^2} \end{matrix}} \tag{42}$$

Wir setzen weiter voraus, daß die Materiefunktion S nur von x_0 abhängt. Die kosmologischen Gleichungen lauten:

$$R_{\varrho\sigma} - \tfrac{1}{2}\,G_{\varrho\sigma}\,R + \Lambda\,G_{\varrho\sigma} = -\,\varkappa\,T_{\varrho\sigma}\,. \tag{43}$$

Λ bezeichnet die kosmologische Konstante. Diese Gleichungen erhalten wir leicht aus dem Variationsprinzip, indem wir den Zusatz $-2\Lambda\sqrt{-G}$ der Wirkungsfunktion beifügen.

Die Berechnung der $\Gamma^{\varrho}_{\sigma\tau}$ liefert:

$$\boxed{\begin{matrix} \Gamma^{0}_{00} = 0 & \Gamma^{0}_{0l} = 0 & \Gamma^{0}_{kl} = L\dot{L}g_{kl} \\ \Gamma^{i}_{00} = 0 & \Gamma^{i}_{0l} = \dfrac{\dot{L}}{L}\delta^{i}_{l} & \Gamma^{i}_{kl} = \gamma^{i}_{kl} \end{matrix}} \tag{44}$$

Mit γ^{i}_{kl} sind die zur Form $\dot{\sigma}^2$ gehörigen Dreiindizessymbole bezeichnet. Eine einfache Rechnung gibt mit (42) für den verjüngten Krümmungstensor:

---

[7]) *R. C. Tolman,* Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 1934, S. 364.

[8]) Indizes i, k, l nehmen die Werte 1, 2, 3 an.

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{L}}{L} \qquad R_{0k} = 0$$
$$R_{ik} = -(L\ddot{L} + 2\dot{L}^2)\, g_{ik} + r_{ik} \, . \tag{45}$$

Die r_{ik} sind die entsprechenden Größen bezogen auf $\dot{\sigma}^2$. Für den Krümmungsskalar

$$R = G^{\varrho\sigma} R_{\varrho\sigma}$$

erhalten wir aus (42), (45) mit

$$r_{ik} = -2g_{ik} \quad \text{und} \quad r = -6$$

$$R = 6\,\frac{L\ddot{L} + \dot{L}^2 + 1}{L^2} \, . \tag{46}$$

Für die Ausdrücke auf der rechten Seite der kosmologischen Gleichungen folgt sofort

$$\begin{aligned} R_{oo} - \tfrac{1}{2} G_{oo} R &\equiv -3\,\frac{\dot{L}^2 + 1}{L^2} \\ R_{ok} - \tfrac{1}{2} G_{ok} R &\equiv 0 \\ R_{ik} - \tfrac{1}{2} G_{ik} R &\equiv (2L\ddot{L} + \dot{L}^2 + 1)\, g_{ik} \, . \end{aligned} \tag{47}$$

Der Energietensor hat die einfache Gestalt

$$T_{oo} = \frac{\omega}{\varkappa}\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 T_{ii} = -\,G_{ii}\, T_{oo} \, . \tag{48}$$

Setzen wir die Ausdrücke (47) und (48) in (43) ein, so erhalten wir

$$-3\,\frac{\dot{L}^2 + 1}{L^2} + \Lambda = -\,\omega\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 \tag{49_1}$$

$$2L\ddot{L} + \dot{L}^2 + 1 - \Lambda L^2 = -\,\omega L^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 \tag{49_2}$$

Die Kombination $L^2 \cdot (49_1) - (49_2)$ ergibt für L die Differentialgleichung

$$L\ddot{L} + 2\dot{L}^2 + 2 - \Lambda L^2 = 0 \, . \tag{50}$$

Aus dem Energiesatz (8) erhalten wir mit Hilfe von (44) und

$$T_0^0 = \frac{\omega}{\varkappa}\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2$$
$$T_i^i = -\,T_0^0$$

die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right) + 3\frac{\dot{L}}{L}\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right) = 0 \ .$$

Eine kleine Umformung ergibt

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_0}\left(L^3 \frac{\partial S}{\partial x_0}\right) = 0 \ .} \tag{51}$$

Im wesentlichen stimmt (51) überein mit der Feldgleichung der Materie

$$\Box S = 0 \ .$$

Aus (51) folgt sofort

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{A}{L^3} \ . \tag{52}$$

(52) in (49_1) eingesetzt, ergibt

$$\underline{L^4 \dot{L}^2 + L^4 - \frac{\Lambda}{3} L^6 - \frac{\omega}{3} A^2 = 0 \ .} \tag{53}$$

Wie leicht zu sehen ist, ist (53) ein erstes Integral der Gleichung (50).

Zwei Typen von Lösungen treten auf:

1. $\dot{L} \equiv 0 \qquad L = \text{konstant}$
   statische Lösung.

Aus (50) folgt sofort für den räumlichen Radius

$$L = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \ .$$

2. $\dot{L} \neq 0$
   dynamische Lösungen.

Die zeitliche Änderung des Radius L ist gegeben durch

$$\frac{dL}{dx_0} = \frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{\omega}{3}A^2 - L^4 + \frac{\Lambda}{3}L^6} \ .$$

Die Integration liefert

$$c\,(t - t_a) = \int\limits_0^L \frac{y^2\, dy}{\sqrt{\frac{\omega}{3}A^2 - y^4 + \frac{\Lambda}{3}y^6}} \ .$$

Lösungen existieren, falls

$$\frac{\Lambda}{3}\left(y^6 - \frac{3}{\Lambda}y^4 + \frac{\omega}{\Lambda}A^2\right) > 0 \quad . \tag{54}$$

Seiner Bedeutung nach ist y eine positive Größe. Da wir nur positive Energieinhalte zulassen, ist auch ω positiv anzunehmen.
Wir setzen

$$F(y) \equiv y^6 - \frac{3}{\Lambda}y^4 + \frac{\omega}{\Lambda}A^2 \quad .$$

Falls $\Lambda \gtrless 0$, muß $F(y) \gtrless 0$ sein, damit (54) erfüllt wird. Die Diskussion der Funktion $F(y)$ wird uns die verschiedenen Lösungstypen ergeben. Für $\Lambda > 0$ erhalten wir folgende Extrema:

$$y = 0 \qquad F = \frac{\omega}{\Lambda}A^2$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \qquad F = \frac{1}{\Lambda}\left(\omega A^2 - \frac{4}{\Lambda^2}\right) .$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $\underline{\Lambda > \frac{4}{\omega A^2}}$.

Die Funktion F hat keine reelle Wurzel. Der zulässige y-Bereich erstreckt sich von Null bis Unendlich. L kann sich also ungehemmt vergrößern. *Monotone Welt erster Art.*

b) $\underline{\Lambda < \frac{4}{\omega A^2}}$.

Es treten zwei reelle, positive Wurzeln α, β auf. Zwei getrennte zulässige y-Bereiche $[0, \alpha]$ und $[\beta, +\infty]$ sind vorhanden. Entsprechend erhalten wir zwei expandierende Welttypen:

Periodische Welt: L wächst von 0 bis α und verringert sich wieder auf 0.

Monotone Welt zweiter Art: L beginnt mit einem endlichen Anfangswert β und vergrößert sich ungehemmt bis unendlich.

c) $\underline{\Lambda = \frac{4}{\omega A^2}}$.

In diesem Grenzfall fallen die beiden Wurzeln zusammen.

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \, .$$

Zwei Intervalle $[0, \alpha]$ und $[\alpha, \infty]$ stehen zur Verfügung. Wir erhalten wieder zwei Welttypen:

Asymptotische Welt erster Art: L vergrößert sich von Null an und erreicht für $t = \infty$ den Wert $\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}$, der einer statischen Zylinderwelt entspricht.

Asymptotische Welt zweiter Art: Diese Welt hat zur Zeit $t = -\infty$ als statische Zylinderwelt vom Radius $\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}$ sich zu expandieren begonnen. L wächst ungehemmt bis unendlich.

Für $\Lambda < 0$ hat die Funktion F eine reelle positive Wurzel α. Zugelassen ist also nur das Intervall $[0, \alpha]$. Die zugehörigen Lösungen entsprechen periodischen Welten. Die beiden Sonderfälle

$$\Lambda = 0 \quad \text{und} \quad A = 0$$

lassen sich leicht überblicken. Für $\Lambda = 0$ erhalten wir eine periodische Lösung. Der Fall $A = 0$ läßt sich elementar integrieren. Es ergibt sich

$$L = a \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{x_0}{a}\right) .$$

Es handelt sich also um eine de Sittersche Kugelwelt. Gegen diesen Sonderfall entwickeln sich die monotonen Welten von a), b) und c) für y gegen Unendlich.

Ich bin Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, Bern, zu großem Dank verpflichtet. Er hat diese Arbeit angeregt und ihre Durchführung mit wertvollen Ratschlägen unterstützt.

(Eingegangen den 7. April 1950.)