Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 25 (1951)

Artikel: Stützfunktion und Radius II.

Autor: Scherrer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20692

Stützfunktion und Radius II

Von W. Scherrer, Bern

§ 1. Einleitung

Die vorliegende Note bildet die unmittelbare Fortsetzung des unter demselben Titel erschienenen Teil I, dessen Kenntnis ich also voraussetzen muß und den ich inskünftig mit dem Zeichen [I] zitieren werde[1]).

Um die Ausdrucksweise zu erleichtern, werde ich von einer *„absoluten Hauptform"* oder von einer *„relativen Hauptform"* sprechen, je nachdem ihre Koeffizienten selbst oder nur die Verhältnisse ihrer Koeffizienten als Funktionen der Parameter gegeben sind. Weiter werde ich — wie das schon geschehen ist — jeder Hauptform ein *„entsprechendes Krümmungsmaß"* zuordnen: Der *ersten* Hauptform entspricht die *mittlere Krümmung* H, der *zweiten* die *Gaußsche Krümmung* K und der *dritten* schließlich die *harmonische Krümmung* $\frac{K}{H} = \frac{1}{h}$.

Wenn man nun die in Teil I entwickelten invarianten Grundgleichungen betrachtet, erkennt man, daß sie Anlaß geben, 3 verschiedene Aufgaben zu stellen:

1. Man gibt *eine relative Hauptform* und *das entsprechende Krümmungsmaß* vor und bestimmt erst einmal Radius und Stützfunktion, dann das Dreibein $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ und schließlich den Ortsvektor $\mathfrak{x}$.

2. Man gibt *eine absolute Hauptform* vor und sucht hierauf die Fläche zu bestimmen.

3. Man gibt die *Stützfunktion*, den *Radius* und ein *Krümmungsmaß* vor und bestimmt erst einmal die entsprechende relative Hauptform, dann das Dreibein $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ und schließlich den Ortsvektor $\mathfrak{x}$.

Zu diesen drei Aufgaben sei folgendes bemerkt: Die 1. Aufgabe wird durch die in Teil I angegebenen Entwicklungen gelöst. Im Text I, S. 376, wurde ja darauf hingewiesen, daß nur die Koeffizientenverhältnisse der gewählten Hauptform benötigt werden. Im Sinne der jetzt vereinbarten

[1]) Stützfunktion und Radius I. Commentarii Mathematici Helvetici, Bd. 20, Heft 4, S. 366—381, 1947.

Terminologie könnte also in den 3 angegebenen Sätzen der Terminus „Hauptform“ ausnahmslos durch „relative Hauptform“ ersetzt werden. Diese Bemerkung ist wichtig, um die erste Aufgabe sachgemäß gegenüber der zweiten abzugrenzen. In § 2 werde ich kurz auf die Entwicklungen von Teil I zurückkommen, um die Rolle des Anfangsstreifens zu erörtern und die Widerspruchslosigkeit der konstruierten Fläche darzutun.

Die 2. Aufgabe nimmt einen sehr verschiedenen Aspekt an, je nach der Hauptform, die man zugrunde legt. Geht man von der ersten Hauptform aus, so erhält man einen Zugang zur bekannten Theorie der Bestimmung einer Raumfläche auf Grund ihrer inneren Eigenschaften. Legt man die zweite Hauptform zugrunde, so erhält man folgendes Problem: Ist eine Fläche durch ihre absolute zweite Hauptform nach Vorgabe eines Streifens bestimmt? Die Tatsache, daß die Koeffizienten der zweiten Hauptform die zweiten Ableitungen des Ortsvektors enthalten, läßt es als möglich erscheinen, daß zu dieser Bestimmung ein Streifen 2. Ordnung geeignet ist. Auch eine nähere Betrachtung der Gleichungen I, (38) deutet in dieser Richtung. In der vorliegenden Note werde ich mich nicht weiter mit der zweiten Aufgabe befassen. Für die dritte Hauptform schließlich wird die Aufgabe gegenstandslos. Sie darf nämlich nicht absolut vorgegeben werden, da das ihr zugeordnete „Biegungsmaß“ den der Einheitskugel entsprechenden Wert 1 haben muß.

Die 3. Aufgabe ist, wie man leicht aus der Formulierung entnimmt, eine Art Umkehrung der ersten. Sie soll das Hauptthema der gegenwärtigen Ausführungen bilden. Wir werden sehen, daß sich auch in ihrer Lösung der Umkehrungscharakter zu erkennen gibt. Wir beschränken die Untersuchung auf den Fall der zweiten Hauptform, da in den andern Fällen analoge Entwicklungen zu erwarten sind. Da bei der dritten Aufgabe Stützfunktion und Radius als bekannte Funktionen der Parameter vorausgesetzt sind, erzielen wir eine wesentliche formale Vereinfachung dadurch, daß wir die genannten Invarianten als Parameter wählen. Das Hauptergebnis besteht dann in der Feststellung, daß eine Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung als Funktion von Stützfunktion und Radius nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens bestimmt ist. Dabei ist noch zu erwähnen, daß sich die Aufgabe in formaler Beziehung auf eine einzige quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren läßt.

§ 2. Ergänzung zu Teil I

Entsprechend dem in § 1 gegebenen Hinweis befassen wir uns jetzt mit den Anfangsbedingungen zu folgender Aufgabe:

Von einer Fläche seien die relative zweite Hauptform und die Gaußsche Krümmung als Funktionen der Parameter u, v bekannt,

$$\frac{L}{\sqrt{Q}} = \lambda(u, v) \tag{1a}$$

$$\frac{M}{\sqrt{Q}} = \mu(u, v) \tag{1b}$$

$$\frac{N}{\sqrt{Q}} = \nu(u, v) \tag{1c}$$

$$K = K(u, v) \tag{2}$$

wobei Q definiert ist durch

$$Q \equiv LN - M^2 \, . \tag{3}$$

Außerdem sei vorgegeben ein Anfangsstreifen durch Parameterkurve, Ortsvektor und Flächennormale auf Grund der Festsetzungen

$$u = u(t) \tag{4a}$$

$$v = v(t) \tag{4b}$$

$$\mathfrak{x}[u(t), v(t)] = \mathfrak{x}(t) \tag{5}$$

$$\mathfrak{N}[u(t), v(t)] = \mathfrak{N}(t) \tag{6}$$

Zusammenfassend bedeutet dies, daß die rechten Seiten der Gleichungen (1a), (1b), (1c), (2), (4a), (4b), (5) und (6) vorgegebene Funktionen darstellen.

Zur Bestimmung des Ortsvektors als Funktion der Parameter

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{7}$$

ist es nun nach den Entwicklungen in Teil I nötig, sukzessive die Gleichungen I, (38), I, (35) (36) und die erste der Gleichungen I (3) zu lösen. Das entscheidende Argument für die Eindeutigkeit der Lösung besteht nun offenbar in dem Nachweis, daß es möglich ist auf Grund der Anfangsbedingungen die Werte der Größen

$$R, P, R_u, R_v, P_u, P_v \tag{8}$$

längs des Anfangsstreifens eindeutig zu berechnen.

Nach der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist es dann nämlich möglich, aus dem System I (38) die Funktionen

$$R(u, v) \, , \qquad P(u, v) \tag{9}$$

zu bestimmen. Nach der Theorie der totalen Differentialgleichungen ergeben sich dann aus den Systemen I (35) (36) die Vektorfunktionen

$$\mathfrak{T}(u,v)\,,\quad \mathfrak{N}(u,v)\,,\quad \mathfrak{P}(u,v) \tag{10}$$

des Dreibeins und hierauf ergibt sich aus der ersten der Gleichungen [I, (3)] unter Beachtung von [*I*, (1) (2)], d. h.

$$r = \sqrt{R}\,,\quad p = \sqrt{P} \tag{11}$$

ganz elementar der Ortsvektor (7).

Zur Bestimmung der Größen (8) längs des Anfangsstreifens gehen wir nun folgendermaßen vor. Gemäß den Definitionen [I, (1)] und [I, (2)] erhalten wir aus (5) und (6) unmittelbar

$$R = (\mathfrak{x}(t))^2\,,\qquad P = (\mathfrak{N}(t)\,\mathfrak{x}(t))^2\,. \tag{12}$$

Durch Ableitung nach t ergeben sich dann die Relationen

$$\dot{R} = R_u\,\dot{u} + R_v\,\dot{v}\,, \tag{13a}$$

$$\dot{P} = P_u\,\dot{u} + P_v\,\dot{v}\,. \tag{13b}$$

Durch Kombination aus [I, (27_1)] und [I, (27_2)] — wieder unter Beachtung von (11) — folgen weiter die Relationen

$$\mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{x}} = \frac{(L\dot{u} + M\dot{v})\,P_v - (M\dot{u} + N\dot{v})\,P_u}{2\sqrt{KQP(R-P)}}\,, \tag{14a}$$

$$-\,\mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{N}} = \frac{\sqrt{K}\,[(L\dot{u} + M\dot{v})\,R_v - (M\dot{u} + N\dot{v})\,R_u]}{2\sqrt{Q(R-P)}}\,. \tag{14b}$$

Mit Rücksicht auf die Definition I, (3) und die Gleichungen (5) und (6) sind die linken Seiten dieser Relationen bekannt. Auf den rechten Seiten der Relationen (13a), (13b), (14a) und (14b) sind wegen (1a), (1b), (1c), (2), (4a), (4b) nur die Ableitungen

$$R_u,\ R_v,\ P_u,\ P_v \tag{15}$$

unbekannt. Wir haben also 4 lineare Gleichungen zur Bestimmung der Größen (15) und finden

$$\left.\begin{aligned}
R_u &= \frac{(\lambda\dot{u} + \mu\dot{v})\dot{R} + 2K^{-\frac{1}{2}}\sqrt{R-P}\,\dot{v}\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{N}}}{II_0} \\
R_v &= \frac{(\mu\dot{u} + \nu\dot{v})\dot{R} - 2K^{-\frac{1}{2}}\sqrt{R-P}\,\dot{u}\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{N}}}{II_0} \\
P_u &= \frac{(\lambda\dot{u} + \mu\dot{v})\dot{P} - 2K^{\frac{1}{2}}\sqrt{P(R-P)}\,\dot{v}\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}}{II_0} \\
P_v &= \frac{(\mu\dot{u} + \nu\dot{v})\dot{P} + 2K^{\frac{1}{2}}\sqrt{P(R-P)}\,\dot{u}\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}}{II_0}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wo der Nenner

$$\mathrm{II}_0 \equiv \lambda\dot{u}^2 + 2\mu\dot{u}\dot{v} + \nu\dot{v}^2 \tag{17}$$

die relative zweite Normalform darstellt. Durch (12), (16) und (17) werden also die Größen (8) auf dem Anfangsstreifen eindeutig festgelegt. Nach den vorausgehenden Bemerkungen ist somit die gesuchte Fläche eindeutig bestimmt, w.z.b.w.

Um nun noch die Widerspruchslosigkeit der gewonnenen Lösung darzutun, muß man die im Anschluß an (7) genannten Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen und zeigen, daß die relative zweite Hauptform und die Gaußsche Krümmung der eben bestimmten Fläche mit den vorgegebenen Funktionen (1a), (1b), (1c) und (2) übereinstimmen. Den Ausgangspunkt bildet also jetzt die erste der Gleichungen [I, (3)] in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = \sqrt{R-P}\,\mathfrak{T} - \sqrt{P}\,\mathfrak{N}\,. \tag{18}$$

Leitet man hier unter Verwendung von [I, (35) (36)] nach u und v ab, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u &= \frac{R_u}{2\sqrt{R-P}}\,\mathfrak{T} + \frac{\lambda P_v - \mu P_u}{2\sqrt{KP(R-P)}}\,\mathfrak{P} \\
\mathfrak{x}_v &= \frac{R_v}{2\sqrt{R-P}}\,\mathfrak{T} + \frac{\mu P_v - \nu P_u}{2\sqrt{KP(R-P)}}\,\mathfrak{P}
\end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

und daraus ergibt sich

$$[\mathfrak{x}_u\,, \mathfrak{x}_v] = \frac{\nabla_0(R\,,P)}{4(R-P)\sqrt{PK}}\,\mathfrak{N}\,, \tag{20}$$

wo ∇_0 den auf die relative Hauptform (17) bezogenen Operator [I, (17a)] bedeutet. Der Normalenvektor kommt also richtig heraus. Für die Determinante D, die nach Definition durch

$$\sqrt{D} \equiv |[\mathfrak{x}_u\,,\,\mathfrak{x}_v]| = [\mathfrak{x}_u\,,\,\mathfrak{x}_v]\,\mathfrak{N} \tag{21}$$

gegeben ist, erhält man daher

$$\sqrt{D} = \frac{\nabla_0(R\,,P)}{4\,(R-P)\sqrt{PK}}\,. \tag{22}$$

Weiter erhält man auf Grund von (19) und [I, (35) (36)] die skalaren Produkte

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{x}_v &= \frac{\nabla_0(R\,,P)}{4\,(R-P)\sqrt{P}}\,\lambda \\ -\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{x}_v = -\mathfrak{N}_v\,\mathfrak{x}_u &= \frac{\nabla_0(R\,,P)}{4\,(R-P)\sqrt{P}}\,\mu \\ -\mathfrak{N}_v\,\mathfrak{x}_v &= \frac{\nabla_0(R\,,P)}{4\,(R-P)\sqrt{P}}\,\nu \end{aligned}\right\}, \tag{23}$$

wobei die Identität $\lambda\gamma - \mu^2 \equiv 1$ zu beachten ist. Die relative zweite Hauptform ist also richtig bestimmt und weiter folgt aus (23), daß die absolute Hauptform dann und nur dann vorliegt, wenn die Relation

$$\frac{\nabla_0(R-P)}{4\,(R-P)\sqrt{P}} = \sqrt{Q} \tag{24}$$

besteht. Führt man diese Relation in (22) ein, so ergibt sich

$$\frac{Q}{D} = K\,. \tag{25}$$

Dies aber bedeutet, daß das der bestimmten Fläche nach Definition zuzuordnende Krümmungsmaß mit der vorgegebenen Krümmungsfunktion $K(u, v)$ übereinstimmt. Damit ist die Widerspruchslosigkeit der ganzen Konstruktion dargetan.

Schreiben wir schließlich (24) auf die absolute Hauptform um, so erhalten wir

$$\nabla_{II}(R, P) = 4(R-P)\sqrt{P}\,. \tag{26}$$

Damit ist also auch die Rolle aufgeklärt, welche die akzessorische Relation [I, (39)] beim Aufbau der Fläche spielt.

Es ist kaum daran zu zweifeln, daß sich für die erste und dritte Hauptform analoge Verhältnisse ergeben. Ich fasse daher die nun noch näher präzisierten Sätze von Teil I zusammen in

Satz 4: *Sind von einer Fläche eine relative Hauptform und das entsprechende Krümmungsmaß als Funktionen der Parameter bekannt, so ist diese Fläche nach Vorgabe eines Streifens eindeutig bestimmt. Dieser Streifen ist nur im Falle der zweiten Hauptform der Einschränkung unterworfen, nicht asymptotisch zu sein.*

§ 3. Die Normalinversion

Darunter wollen wir diejenige Abbildung der Raumfläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{7}$$

verstehen, welche definiert wird durch die Vektorgleichung

$$\bar{\mathfrak{x}} = -\frac{\mathfrak{N}}{\sqrt{P}}\,, \tag{27}$$

wobei also $\bar{\mathfrak{x}}$ den Ortsvektor des dem Original (7) zugeordneten Bildes bedeutet. Sie ist offenbar eine Berührungstransformation. Ob sie schon einmal betrachtet worden ist, weiß ich nicht. Ich bezeichne sie als „*Normalinversion*", weil sie aus der gewöhnlichen Inversion

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{R}}$$

hervorgeht, wenn man in der letzteren an Stelle des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ und des Radius $\sqrt{R}$ die Normale $-\mathfrak{N}$ und die Stützfunktion $\sqrt{P}$ treten läßt. Sie wird uns dazu dienen, eine in dem Gleichungssystem I, (38) liegende Symmetrie aufzudecken. Die in Teil I entwickelten Formeln gestatten uns, die Eigenschaften der Normalinversion direkt zu berechnen. Man muß nur beachten, daß dort teilweise für $\sqrt{P}$ noch das Zeichen p benutzt wurde.

Durch Ableitung von (27) erhalten wir vorerst

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_u &= -\frac{\mathfrak{N}_u}{\sqrt{P}} + \frac{P_u\,\mathfrak{N}}{2P\sqrt{P}}\,, \\ \bar{\mathfrak{x}}_v &= -\frac{\mathfrak{N}_v}{\sqrt{P}} + \frac{P_v\,\mathfrak{N}}{2P\sqrt{P}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf I (23), (25), (3) ergibt sich daraus

$$\overline{\mathfrak{N}} = -\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{R}} \tag{29}$$

und

$$\sqrt{\overline{D}} = \frac{K\sqrt{R}}{P\sqrt{P}} \cdot \sqrt{D}\ . \tag{30}$$

Durch Ableitung von (29) folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{N}}_u &= -\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{R}} + \frac{R_u}{2R\sqrt{R}}\,\mathfrak{x} \\ \overline{\mathfrak{N}}_v &= -\frac{\mathfrak{x}_v}{\sqrt{R}} + \frac{R_v}{2R\sqrt{R}}\,\mathfrak{x} \end{aligned}\right\} \quad . \tag{31}$$

Gestützt auf die Gleichungen (27) bis (31) erhalten wir nun leicht alle nötigen Relationen, wobei wir uns aber auf diejenigen Beziehungen beschränken wollen, die zwischen Stützfunktion, Radius, zweiter Hauptform und Krümmung von Original und Bild bestehen.

Fügen wir noch die grundlegenden Gleichungen (27) und (29) hinzu, so erhalten wir schließlich folgende Tabelle:

$$\overline{\mathfrak{x}} = -\frac{\mathfrak{N}}{\sqrt{P}}\ ;\quad \overline{\mathfrak{N}} = -\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{R}} \tag{32 a}$$

$$\overline{R} = \frac{1}{P}\ ;\quad \overline{P} = \frac{1}{R} \tag{32 b}$$

$$\overline{L} = \frac{L}{\sqrt{RP}}\ ;\quad \overline{M} = \frac{M}{\sqrt{RP}}\ ;\quad \overline{N} = \frac{N}{\sqrt{RP}} \tag{32}$$

$$\sqrt{\overline{Q}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{RP}} \tag{32 c}$$

$$\overline{K} = \frac{P^2}{R^2} \cdot \frac{1}{K} \tag{32 d}$$

Aus (32) folgt nun unmittelbar

Satz 5: *Die relative zweite Hauptform ist gegenüber Normalinversion invariant.*

Da nun das Gleichungssystem [I, (38)] seinem Begriffe nach invariant ist gegenüber der vollständig durchgeführten Normalinversion, folgt aus Satz 5, daß es auch invariant bleibt, wenn man auf die Größen R, P und K allein die durch die Gleichungen (32b) und (32d) definierte Transformation ausübt.

Ein Blick auf die Gleichungen (32b), sowie die Umgestaltung von (32d) zu

$$\frac{\overline{K}\,\overline{R}}{\overline{P}} \cdot \frac{K R}{P} = 1 \tag{33}$$

zeigen weiter, daß die eben festgestellte Symmetrie einfacher wird, wenn man an Stelle von P und K die neuen Größen

$$S \equiv \frac{1}{P} \; ; \qquad W \equiv \frac{R K}{P} = R S K \tag{34}$$

einführt.

Die Umwandlung des Systems [I, (38)] gemäß der Substitution (34) vollzieht sich leicht auf Grund der Formeln I, (20), (21), (22). Führt man die Rechnung durch, so ergibt sich schließlich

Satz 6: *Das System*

$$\boxed{\begin{gathered} \triangle(R) + \frac{1}{2W}\nabla(R, W) = \\ = \frac{2RS-1}{2R(RS-1)}\nabla(R) + \frac{RS+1}{2S(RS-1)}\nabla(R, S) + \frac{R}{2WS(RS-1)}\nabla(S) \\ \triangle(S) - \frac{1}{2W}\nabla(S, W) = \\ = \frac{2RS-1}{2S(RS-1)}\nabla(S) + \frac{RS+1}{2R(RS-1)}\triangle(R, S) + \frac{WS}{2R(RS-1)}\nabla(R) \end{gathered}} \tag{35}$$

ist invariant gegenüber der Transformation

$$\overline{R} = S \; ; \quad \overline{S} = R \; ; \quad \overline{W} = \frac{1}{W} \, . \tag{36}$$

Diese Tatsache ist offenbar dank der in (35) erreichten Gestalt formal evident. Unter dem Einfluß von (36) werden ja die beiden Gleichungen einfach miteinander vertauscht. Nebenbei bemerkt habe ich hier den in

I, (38) die zweite Hauptform kennzeichnenden Index II weggelassen, da wir uns in der vorliegenden Note nur mit der zweiten Hauptform befassen wollen.

Zum Schluß formulieren wir noch den unmittelbar aus (32a) und (32b) fließenden

Satz 7: *Die Normalinversion ist eine involutorische Abbildung.*

Die Normalinversion erweist sich also in ihren wichtigsten Eigenschaften als ein vollkommenes Seitenstück zur Inversion.

§ 4. Bestimmung einer Fläche aus Radius, Stützfunktion und Gaußscher Krümmung

Wir wenden uns jetzt also zu der in der Einleitung erläuterten dritten Aufgabe, wobei wir uns, wie schon gesagt, auf den Fall der zweiten Hauptform, respektive der ihr entsprechenden Gaußschen Krümmung beschränken. Mit Rücksicht auf die im vorausgehenden Paragraphen festgestellte Symmetrie, formulieren wir aber die Aufgabe wie folgt:

Vorgegeben seien der Radius $\sqrt{R}$, die reziproke Stützfunktion $\sqrt{S}$ und die Krümmungsinvariante $W = RSK$ als Funktionen der Parameter. Gesucht wird der Ortsvektor einer diesen Daten angepaßten Fläche.

Da wir die beiden invarianten Skalare R und S kennen, erzielen wir, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, eine erhebliche formale Vereinfachung, wenn wir diese beiden Skalare gerade als Parameter wählen. Unsere Vorgabe erhält damit folgende Gestalt

$$\left.\begin{aligned} R &\equiv u \;, \\ S &\equiv v \;, \\ W &\equiv W(u, v) \;. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Führt man diese Funktionen in das System (35) ein, so erfährt dasselbe eine Verwandlung, die auf Grund der Formeln [I, 17a), (17b), (19)] zu berechnen ist. Führt man außerdem durch die Festsetzungen

$$\lambda = \frac{i\,L}{\sqrt{Q}} \quad ; \quad \mu = \frac{i\,M}{\sqrt{Q}} \quad ; \quad \gamma = \frac{i\,N}{\sqrt{Q}}$$

die Koeffizienten λ, μ, ν der relativen zweiten Hauptform ein, so nimmt das System (35) schließlich folgende Gestalt an

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial u}-\frac{\partial \mu}{\partial v}+\frac{\nu W_u-\mu W_v}{2W}&=\frac{2uv+1}{2u(uv-1)}\nu-\frac{uv+1}{2v(uv-1)}\mu+\frac{u}{2Wv(uv-1)}\lambda\\ \frac{\partial \lambda}{\partial v}-\frac{\partial \mu}{\partial u}-\frac{\lambda W_v-\mu W_u}{2W}&=\frac{2uv-1}{2v(uv-1)}\lambda-\frac{uv+1}{2u(uv-1)}\mu+\frac{Wv}{2u(uv-1)}\nu\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

Neben diesen Gleichungen ist wohl zu beachten die wegen $Q \equiv LN - M^2$ [I, (5)] aus (38) folgende Identität

$$\lambda\nu - \mu^2 \equiv -1\ . \tag{40}$$

Wir haben also drei Relationen zur Bestimmung der drei Größen λ, μ, ν. Eine Verkoppelung von Differentialgleichungen mit einer algebraischen Beziehung hat gewöhnlich unangenehme Komplikationen zur Folge. Im vorliegenden Falle lassen sich dieselben vermeiden, da die Identität (40) durch unabhängige rationale Funktionen vollständig befriedigt werden kann. Zu dem Zwecke schreiben wir sie in der Gestalt

$$\lambda\nu \equiv (\mu - 1)(\mu + 1) \tag{40a}$$

und suchen sie durch zwei neue Größen ϱ und σ gemäß dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \varrho(\mu-1)=\sigma(\mu+1)\\ \gamma &= \frac{1}{\varrho}(\mu+1)=\frac{1}{\sigma}(\mu-1)\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

zu erfüllen. Eine leichte Rechnung ergibt dann

$$\boxed{\lambda=\frac{2\varrho\sigma}{\varrho-\sigma}\ ;\quad \mu=\frac{\varrho+\sigma}{\varrho-\sigma}\ ;\quad \nu=\frac{2}{\varrho-\sigma}} \tag{42}$$

womit (40) identisch in den zwei unabhängigen Größen ϱ und σ befriedigt wird.

Führt man nun diese Ausdrücke (42) in (39) ein und bezeichnet man diese beiden Gleichungen kurz durch

$$A = 0\ , \qquad B = 0\ ,$$

so zeigt sich nach einiger Rechnung, daß man mit Vorteil die Kombinationen

$$\varrho A + B = 0\ , \qquad \sigma A + B = 0$$

bildet und überdies an Stelle der durch (34) definierten Größe W die Invariante

$$J \equiv \frac{WS}{R} = KS^2 \tag{43}$$

oder also laut (37)

$$J \equiv \frac{Wv}{u} = Kv^2 \tag{43a}$$

einführt. Als Schlußsystem ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= \frac{\varrho_u + A_0 + A_1\varrho + A_2\varrho^2}{\varrho_v + B_0 + B_1\varrho + B_2\varrho^2}\,, && (44\text{a}) \\ \varrho &= \frac{\sigma_u + A_0 + A_1\sigma + A_2\sigma^2}{\sigma_v + B_0 + B_1\sigma + B_2\sigma^2}\,, && (44\text{b}) \end{aligned}}$$

wo die Koeffizienten aus folgender Tabelle zu entnehmen sind:

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= \frac{J}{2(uv-1)} &;\quad B_0 &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{J_u}{J} + \frac{2v}{uv-1}\right) && (45_0) \\ A_1 &= -\frac{3J_u}{4J} &;\quad B_1 &= -\frac{3J_v}{4J} && (45_1) \\ A_2 &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{J_v}{J} - \frac{2u}{uv-1}\right) &;\quad B_2 &= -\frac{1}{2(uv-1)J}\,. && (45_2) \end{aligned}}$$

Das System (44) ist offensichtlich separierbar. Setzt man (44a) in (44b) ein und benutzt man die Abkürzungen

$$A_0 + A_1\varphi + A_2\varphi^2 \equiv A(\varphi) \equiv A\,, \tag{46a}$$

$$B_0 + B_1\varphi + B_2\varphi^2 \equiv B(\varphi) \equiv B\,, \tag{46b}$$

so erhält man eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für ϱ:

$$(\varrho_v + B)\varrho_{uu} - [\varrho_u + A + \varrho(\varrho_v + B)]\varrho_{uv} + \varrho(\varrho_u + A)\varrho_{vv} + \cdots = 0\,, \tag{47}$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder keine zweiten Ableitungen mehr enthalten. Sie ist vom hyperbolischen Typus, denn durch die imaginäre Einheit im Ansatz (38) wurde dafür gesorgt, daß gerade für den Fall reeller Asymptotenlinien $(Q < 0)$ ϱ und σ in (42) reell ausfallen.

Die Charakteristiken von (47) sind gegeben durch

$$(\varrho_v + B)\,\dot v^2 + [\varrho_u + A + \varrho(\varrho_v + B)]\,\dot v\,\dot u + \varrho(\varrho_u + A)\,\dot u^2$$
$$\equiv [(\varrho_v + B)\,\dot v + (\varrho_u + A)\,\dot u]\,(\dot v + \varrho\dot u) = 0\ ,$$

was wegen (44a) gleichbedeutend ist mit

$$(\varrho_v + B)\,(\dot v + \sigma\dot u)\,(\dot v + \varrho\,\dot u) = 0\ . \tag{48}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind aber die Asymptotenlinien, denn dieselben werden nach (42) charakterisiert durch

$$\lambda\,\dot u^2 + 2\mu\,\dot u\,\dot v + \nu\,\dot v^2 = \frac{2}{\varrho - \sigma}\,(\varrho\,\dot u + \dot v)\,(\sigma\,\dot u + \dot v) = 0\ .$$

Zur Bestimmung einer Lösung von (47) ist also sicher ein nichtasymptotischer Streifen erforderlich. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß ein solcher auch hinreicht. Um dies zu erreichen, müssen wir auf die Entwicklungen von § 2 zurückgreifen, wobei wir aber immer die durch (34), (37) und (43) bedingten Modifikationen zu beachten haben.

Der Anfangsstreifen sei wieder charakterisiert durch die Gleichungen (5) und (6), deren rechte Seiten also vorgegebene Vektorfunktionen sind. Nach (12), (34) und (37) ergibt sich daher vorerst die Parameterkurve gemäß

$$u(t) = R \qquad = (\mathfrak{x}(t))^2\ , \tag{49a}$$

$$v(t) = S = \frac{1}{P} = (\mathfrak{N}(t)\,\mathfrak{x}(t))^{-2}\ . \tag{49b}$$

In Analogie zu (13a) und (13b) erhalten wir somit

$$\dot u = \dot R\ , \quad \dot v = \dot S\ . \tag{50}$$

An Stelle von (14a) und (14b) dagegen tritt jetzt wegen (38), (34), (37) und (43)

$$\mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{x}} = -\frac{\lambda\,\dot u + \mu\,\dot v}{2i\sqrt{J(uv-1)}}\ ,$$

$$-\,\mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{N}} = -\frac{\sqrt{J}\,(\mu\,\dot u + \nu\,\dot v)}{2i\sqrt{uv-1}}\ .$$

Führen wir nun (42) ein, so folgen zwei Gleichungen zur Bestimmung von ϱ und σ:

$$-\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}} = \frac{2\varrho\sigma\dot{u} + (\varrho + \sigma)\dot{v}}{2i(\varrho - \sigma)\sqrt{J(uv - 1)}}, \tag{51a}$$

$$\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{R}} = \frac{\sqrt{J}[(\varrho + \sigma)\dot{u} + 2\dot{v}]}{2i(\varrho - \sigma)\sqrt{uv - 1}}. \tag{51b}$$

Setzen wir abkürzungsweise

$$a = -i\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}} \cdot \sqrt{J(uv - 1)}, \tag{52a}$$

$$b = \quad i\,\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{R}}\sqrt{\frac{uv - 1}{J}}, \tag{52b}$$

so erhalten wir zur Bestimmung von ϱ und σ die Gleichungen

$$2\dot{u}\varrho\sigma + \dot{v}(\varrho + \sigma) = 2a(\varrho - \sigma), \tag{53a}$$

$$\dot{u}(\varrho + \sigma) + 2\dot{v} = 2b(\varrho - \sigma). \tag{53b}$$

Dieses System hat zwei rationale Lösungen. Die erste lautet

$$\varrho = \sigma = -\frac{\dot{v}}{\dot{u}}. \tag{54}$$

Nach den im Anschluß an (48) gemachten Feststellungen bedeutet dies, daß der Streifen charakteristisch ist und überdies — wie auch (42) zeigt — ein parabolischer Punkt vorliegt. (54) ist also auszuschließen.

Die zweite brauchbare Lösung lautet

$$\varrho = \frac{2a + \dot{u}}{2b - \dot{u}}; \quad \sigma = \frac{2a - \dot{v}}{2b + \dot{u}}. \tag{55}$$

Sie versagt nur für $2b = \pm\dot{u}$. Setzt man diesen Wert in (53b) ein, so folgt $\sigma\dot{u} + \dot{v} = 0$ oder $\varrho\dot{u} + \dot{v} = 0$, d.h. in jedem Falle wieder eine charakteristische Richtung. Für jeden nichtasymptotischen Streifen ist also die eindeutige Existenz der Funktionen ϱ und σ gesichert.

Nun benötigen wir noch die vier Ableitungen $\varrho_u, \varrho_v, \sigma_u, \sigma_v$. Zu ihrer Ermittlung stehen uns jetzt die Gleichungen

$$\varrho_u\dot{u} + \varrho_v\dot{v} = \dot{\varrho},$$
$$\sigma_u\dot{u} + \sigma_v\dot{v} = \dot{\sigma},$$

in Verbindung mit den Gleichungen (44a) und (44b) zur Verfügung. Schreiben wir letztere mit den Abkürzungen (46a) und (46b) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \varrho_u - \sigma \varrho_v &= B\sigma - A \\ \sigma_u - \varrho \sigma_v &= p\varrho - B \, , \end{aligned}$$

so erkennen wir unmittelbar, daß die 4 ersten Ableitungen nur dann nicht eindeutig bestimmbar sind, falls ein charakteristisches Streifenelement vorliegt. Das System (44) besitzt also nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens genau eine Lösung. Da man jetzt neben den vorgegebenen Größen (37) resp. (34) mit ϱ und σ auch die relative zweite Hauptform zur Verfügung hat, deckt sich die weitere Integration mit den Ausführungen in I, § 4 und § 2.

Da speziell noch die Vorgabe von

$$J(u, v) = J(R, S)$$

nach (43) und (34) gleichbedeutend ist mit der Vorgabe von

$$K(R, P) = P^2 J\left(R, \frac{1}{P}\right) , \tag{56}$$

gelangen wir schließlich zu

Satz 8: *Kennt man von einer Fläche die Gaußsche Krümmung als Funktion der Stützfunktion und des Radius, so ist diese Fläche nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens eindeutig bestimmt.*

(Eingegangen den 6. April 1950.)