Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Metabelsche Gruppen.
Autor: Meier-Wunderli, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20691

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Metabelsche Gruppen

Seinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor RUDOLF FUETER zum 70. Geburtstag gewidmet

von H. MEIER-WUNDERLI, Cambridge (England)

Die generelle metabelsche Gruppe $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugenden

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \; (n > 1)$$

kann nach *Otto Schreier*[1]) aufgefaßt werden als die Erweiterung[2]) der freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{K}$ (Kommutatorgruppe)

$$\mathfrak{K} = \left\{ \begin{matrix} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}) \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} < i_k \leqslant i_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n \end{matrix} \right\} \tag{1}$$

mit der freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{F}$ (Faktorkommutatorgruppe)

$$\mathfrak{F} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$$

und den Erweiterungsbedingungen

$$\big((\alpha_j, \alpha_i), \alpha_l, \alpha_k\big) = \big((\alpha_j, \alpha_i), \alpha_k, \alpha_l\big) \tag{2}$$

$$(\alpha_j, \alpha_i, \alpha_k)(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_j)(\alpha_k, \alpha_j, \alpha_i) = 1 \; . \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots$ die absteigende Zentralreihe [3]), so erkennt man hieraus, daß alle Kommutatoren in (1) vom Gewicht $w (r = w)$ eine Basis für die freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{M}_w / \mathfrak{M}_{w+1}$ darstellen von der leicht ersichtlichen Dimension

$$d_w = (w - 1) \binom{n + w - 2}{w} \; . \tag{4}$$

---

[1]) *O. Schreier*, Über die Erweiterung von Gruppen. Hamb. Abh. 4, p. 322, vgl. auch *A. Scholz*, Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. Math. Zeitschr. 42, 1936/1937, p. 186ff.

[2]) vgl. auch *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1. Bd.; Leipzig 1937, p. 95ff.

[3]) vgl. [2]) p. 118.

Außerdem ergibt sich die wichtige Tatsache, daß jedes Element X aus $\mathfrak{M}$ mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ eine eindeutige Basisdarstellung gestattet in der Form

$$X = \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_n^{x_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})^{x_{i_k i_1 i_2 \ldots i_r}} \bmod \mathfrak{M}_{w+1} \tag{5}$$

$$(1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} < i_k \leqslant i_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n) \ .$$

Die Exponenten x durchlaufen dabei alle positiven und negativen ganzen Zahlen einschließlich der Null.

Ein Element X aus $\mathfrak{M}$ ist also mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ durch Angabe eines Exponentensystems

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{i_k i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots) \tag{6}$$

eindeutig bestimmt.

Es ergibt sich daher das Problem, das Kompositionsgesetz für die Exponentensysteme (6) zu finden[4]).

Die Ableitung des Kompositionsgesetzes und insbesondere die Bestimmung des Exponentensystems der n-ten Potenz mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ ist der Inhalt des allgemeinen Teiles unserer Arbeit.

Als Anwendung bestimmen wir die generelle metabelsche Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente $\neq 1$ alle die Ordnung p besitzen. Dies ist äquivalent mit der Lösung der metabelschen Approximation des bekannten Problemes von *Burnside*[5]) für den Fall von Primzahlen.

I.

Allgemeiner Teil

§ 1. Komposition

Ein beliebiger Basiskommutator vom Gewicht w besitzt nach (1) die Gestalt

$$K_{i_k i_1^{a_1} i_2^{a_2} \ldots i_k^{a_k-1} \ldots i_r^{a_r}} =$$

$$= \Big(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_k}, \ldots, \alpha_{i_k}}_{a_k-1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Big) \tag{7}$$

mit

$$2 \leqslant k \leqslant r \leqslant n \ ; \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = w \ ; \quad 0 \leqslant a_i < w \ (i = 1, 2, \ldots, r) \ .$$

---

[4]) Für $n = 2$ vgl. *H. Meier-Wunderli*, Über endliche p-Gruppen, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen. Com. math. helv., vol. 24, I, p. 23ff.

[5]) *W. Burnside*, On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. Journ. 33, 1902, p. 230—238.

Meinen wir die Gesamtheit der Kommutatoren (7) mit festen a-Werten und $2 \leqslant k \leqslant r$, so verwenden wir an Stelle von (7) einfach das Symbol $K_{i_1^{a_1} i_2^{a_2} \dots i_k^{a_k} \dots i_r^{a_r}}$. Ist $i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}$ echter Teiler von $i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}$, so schreiben wir wie üblich $i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}$. Hierbei dürfen einzelne der b_i auch 0 sein, aber wenigstens zwei sollen stets von 0 verschieden sein.

Zur Bestimmung der Gruppenkomposition der Systeme (6) hat man gemäß Definition das Produkt (vgl. (5))

$$X \cdot Y = \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r})^{x_{i_k i_1 \dots i_r}} \cdot$$

$$\cdot \alpha_1^{y_1} \dots \alpha_n^{y_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r})^{y_{i_k i_1 \dots i_r}} \tag{8}$$

mit Hilfe der Relationen (2) und (3) in die Form (5) überzuführen. Dies geschieht am einfachsten durch den von *P. Hall*[6]) in die Gruppentheorie eingeführten „*commutator collecting process*". Zu diesem Zweck ersetzte man $\alpha_i^{x_i}$ und $\alpha_j^{y_j}$ in (8) respektive durch $\alpha_i^{(1)} \alpha_i^{(2)} \dots \alpha_i^{(x_i)}$ und $\alpha_j^{(x_j+1)} \alpha_j^{(x_j+2)} \dots \alpha_j^{(x_j+y_j)}$, wobei die oberen Indizes lediglich eine Anordnung der α_l ermöglichen sollen. Die Überführung von (8) in die Normalform wird nun damit begonnen, indem man von zwei Elementen $\alpha_i^{(j)}$ und $\alpha_k^{(l)}$ dasjenige zuerst an seine Stelle in (5) durchzieht, das in der lexikographischen Anordnung der Paare (i, j) und (k, l) zuerst kommt.

Dabei hat man Kommutatoren einzuführen von der Form

$$\left(\alpha_{i_k}^{(\tau_{i_k}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^2)}, \dots, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^{a_1})}, \dots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^1)}, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^2)}, \dots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^{a_r})}\right) \tag{9}$$

mit den Zahlenbedingungen

i) $\quad 1 \leqslant \tau_{i_l}^1 < \tau_{i_l}^2 < \dots < \tau_{i_l}^{a_l} \leqslant y_{i_l} (l = 1, 2, \dots, k-1)$

ii) $\quad 1 \leqslant \tau_{i_k}^1 \leqslant x_{i_k}$; $1 \leqslant \tau_{i_k}^1 < \tau_{i_k}^2 < \dots < \tau_{i_k}^{a_k} \leqslant x_{i_k} + y_{i_k}$

iii) $\quad 1 \leqslant \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \dots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant x_{i_m} + y_{i_m} (m = k+1, k+2, \dots, r)$

und Kommutatoren der Form

$$\left(K_{i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}}^{(\varepsilon)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^2)}, \dots, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^{a_1-b_1})}, \dots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^{a_r-b_r})}\right) \tag{10}$$

mit den Zahlenbedingungen

---

[6]) *P. Hall*, A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. math. Soc., vol. 36, 1933, p. 29—95. § 3.

i) $\quad i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}$

ii) $\quad 1 \leqslant \varepsilon \leqslant x_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}$

iii) $\quad 1 \leqslant \tau_{i_l}^1 < \tau_{i_l}^2 < \cdots < \tau_{i_l}^{a_l - b_l} \leqslant y_{i_l} \, (= 1, 2, \ldots, r)$.

Wir haben nun aus (9) und (10) die Gesamtheit der beim Durchziehprozeß induzierten Kommutatoren (7) auszusondern.

Die Kommutatoren (9) sind nach Konstruktion Basiskommutatoren der Form (7). Ihre Anzahl wird nach (9) i), ii) und iii) gegeben durch

$$\prod_{l=1}^{k-1} \binom{y_{i_l}}{a_l} \left\{ \binom{x_{i_k} + y_{i_k}}{a_k} - \binom{y_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{x_{i_m} + y_{i_m}}{a_m} \quad . \tag{11}$$

Aus (3) folgt mit $i < j < k$

$$(\alpha_k, \alpha_j, \alpha_i) = (\alpha_k, \alpha_i, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_i, \alpha_k)^{-1} \quad . \tag{12}$$

In Verbindung mit (2) folgt hieraus, daß nur diejenigen Kommutatoren (10) Beiträge der Form (7) liefern, deren erste oder zweite Komponente gerade α_{i_k} ist. Das heißt, wir haben nur diejenigen $K_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}$ zu betrachten, deren erste oder zweite Komponente gleich α_{i_k} ist. Hierbei hat man nach (12) die Anzahl der letzteren Kommutatoren negativ einzuberechnen.

Die gesuchte Anzahl der aus (10) hervorgehenden Kommutatoren (7) ist daher nach (10) i), ii) und iii) gegeben durch

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \,\mid\, i_1^{a_1} \ldots i_1^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_1^{b_r}} \cdot \prod_{l=1}^{r} \binom{y_{i_l}}{a_l - b_l} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r} \,\mid\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{l=1}^{r} \binom{y_{i_l}}{a_l - b_l} \, . \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man daher $F(x; y) = X \cdot Y$, so können wir den Satz notieren

1. Satz: *Die generelle metabelsche Gruppe $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugenden wird* mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ $(w = 1, 2, \ldots)$ *eindeutig dargestellt durch* (6) *mit dem Kompositionsgesetz*

$$\left.\begin{aligned} f_i(x\,;\,y) &= x_i + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ f_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}(x\,;\,y) &= x_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} + y_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} + (11) + (13) \, . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Funktionenfolge (14) liefert ihrer Bedeutung wegen eine Partikulärlösung der Funktionalgleichung

$$F\big(f(x;y);z\big) = F\big(x;f(y;z)\big)\ .$$

Dies ist ja einfach das assoziative Gesetz für die Exponentensysteme!

§ 2. Potenz

Zur Ableitung des Exponentensystems der allgemeinen n-ten Potenz eines Elementes X aus $\mathfrak{M}$ mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ haben wir den Ausdruck (vgl. (5))

$$X^n = \left(\alpha_1^{x_1}\ldots\alpha_n^{x_n}\prod_{r=2}^{w}(\alpha_{i_k}\,,\,\alpha_{i_1}\,,\,\alpha_{i_2}\,,\ldots,\,\alpha_{i_r})^{x_{i_k\,i_1\ldots i_r}}\right)^n \tag{15}$$

in die Normalform (5) überzuführen. Zu diesem Zweck ersetze man in Analogie zu § 1 die Größen $\alpha_i^{x_i}$ und $(\alpha_{i_k}\,,\,\alpha_{i_1}\,,\ldots,\,\alpha_{i_r})^{x_{i_k\,i_1\ldots i_r}}$ aus dem l-ten Faktor X in (15) respektive durch

$$\prod_{m=1}^{x_i}\alpha_i^{((l-1)x_i+m)} \text{ und } \prod_{m=1}^{x_{i_k\,i_1\ldots i_r}}(\alpha_{i_k}\,,\,\alpha_{i_1}\,,\ldots,\,\alpha_{i_r})^{((l-1)x_{i_k\,i_1\ldots i_r}+m)}\ .$$

Die Überführung in die Normalform (5) wickelt sich jetzt analog ab wie in § 1. Einzig die Existenzbedingungen in (9) und (10) müssen neu formuliert werden.

Die Gesamtheit der durch (9) induzierten Kommutatoren der Form (7), deren erste Komponente zum l-ten Produkt X in (15) gehört, ist offenbar gleich der Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\quad l\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant n\,x_{i_m}\,(m=1\,,2\,,\ldots,k-1)\\
&\text{ii)}\quad (l-1)\,x_{i_k} < \tau_{i_k}^1 \leqslant l\,x_{i_k}\ ;\ \tau_{i_k}^1 < \tau_{i_k}^2 < \cdots < \tau_{i_k}^{a_k} \leqslant n\,x_{i_k}\\
&\text{iii)}\quad (l-1)\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant n\,x_{i_m}\,(m=k+1\,,k+2,\ldots,r)\ .
\end{aligned} \tag{16}$$

Die entsprechende Anzahl der aus (10) hervorgehenden Kommutatoren (7) ist gleich der Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\quad i_1^{b_1}\ldots i_r^{b_r}\ \big|\ i_1^{a_1}\ldots i_r^{a_r}\\
&\text{ii)}\quad (l-1)\,x_{i_1^{b_1}\ldots i_r^{b_r}} < \varepsilon \leqslant l\,x_{i_1^{b_1}\ldots i_r^{b_r}}\\
&\text{iii)}\quad l\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m-b_m} \leqslant n\,x_{i_m}\,(m=1\,,2\,,\ldots,r)
\end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man noch $n - l = \varepsilon$, so ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (16) gegeben durch

$$\prod_{m=1}^{k-1} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m} \left\{ \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_k}}{a_k} - \binom{\varepsilon x_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_m}}{a_m} \tag{18}$$

und die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (17) wird durch den Ausdruck gegeben

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r} \,\mid\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_k} \,\mid\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} . \end{aligned} \tag{19}$$

Dies liefert den Satz:

2. Satz: *Die n-te Potenz $F^n(x) = (X)^n$ eines Elementes* (6) *der generellen metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugenden wird* mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ $(w = 1, 2, \dots)$ *gegeben durch*

$$f_i^n = n x_i$$

$$f^n_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} = \sum_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \begin{aligned} &+ \prod_{m=1}^{k-1} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m} \left\{ \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_k}}{a_k} - \binom{\varepsilon x_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_m}}{a_m} \\ &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r} \,\mid\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r} \,\mid\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \end{aligned} \right. \tag{20}$$

II.

Lösung der Metabelschen Approximation des Problemes von Burnside

Darunter verstehen wir die vollständige Bestimmung der Struktur der allgemeinen metabelschen Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente $\neq 1$ alle die Ordnung p (Primzahl) besitzen. Diese Gruppe sei im folgenden mit $\mathfrak{M}^p$ bezeichnet.

§ 1. Bemerkungen

Die wichtigsten Daten der Gruppe $\mathfrak{M}^p$, nämlich Ordnung und Klasse, sind sofort bekannt, wenn es gelingt den zum Gewicht w und der Primzahl p gehörigen Dimensionsdefekt $\delta_{p,w}$ zu bestimmen.

Er wird nach *P. Hall* definiert durch

$$d\left(\mathfrak{M}^p_w / \mathfrak{M}^p_{w+1}\right) = d_w - \delta_{p,w} \; . \tag{21}$$

Zur Ermittlung von $\delta_{p,w}$ hat man die Relationen zwischen den w-fachen Basiskommutatoren zu studieren, die sich ergeben, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{M}$ einer Gleichung der Form $x^p = 1$ genügen sollen. Die in *I* entwickelten Formeln gestatten es, einen Überblick über diese Relationen zu gewinnen.

Aus (14) folgt unmittelbar für beliebiges l und k

$$\alpha_{i_k} \cdot \alpha_{i_l}^p = \alpha_{i_l}^p \cdot \alpha_{i_k} \cdot \prod_{m=1}^{p} \Big(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_l}, \alpha_{i_l}, \ldots, \alpha_{i_l}}_{m}\Big)^{\binom{p}{m}} ,$$

d. h. für $\mathfrak{M}^p$ gilt die Relation

$$\Big(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_l}, \alpha_{i_l}, \ldots, \alpha_{i_l}}_{p}\Big) = 1 \; . \tag{22}$$

Hieraus folgt die wichtige Tatsache, daß man in (7) stets $a_i < p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ annehmen darf.

(20) kann daher für $\mathfrak{M}^p$ in der einfacheren Gestalt geschrieben werden

$$f^p_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv \sum_{\varepsilon=1}^{p-1} \left\{ \begin{array}{l} C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \cdot \left\{\varepsilon^{A_{k-1}}(\varepsilon+1)^{w-A_{k-1}} - \varepsilon^{A_k}(\varepsilon+1)^{w-A_k}\right\} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r} + \cdots \\ + \sum\limits_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \,|\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} C_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \varepsilon^{w-B_r} x_{i_1}^{a_1-b_1} \ldots x_{i_r}^{a_r-b_r}\, x_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} + \\ - \sum\limits_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{a_r} \,|\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} C_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \varepsilon^{w-B_r} x_{i_1}^{a_1-b_1} \ldots x_{i_r}^{a_r-b_r} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} + \end{array} \right. \tag{23}$$

wobei

$$C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv \frac{1}{a_1!\; a_2! \ldots a_r!} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = A_k$$

und

$$C_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} \equiv \frac{1}{(a_1 - b_1)! \ldots (a_r - b_r)!} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{r} b_i = B_r \; .$$

Punkte in der Entwicklung (23) deuten Glieder niedriger Dimension in x und ε an. Die höchste Dimension in ε ist für den ersten Summanden in (23) genau $w-1$; für die andern Summanden ist sie $\leqslant w-2$.

Aus (22) geht die weitere Tatsache hervor, daß die Klasse unserer Gruppe sicher nicht größer als $n(p-1)$ sein kann. Ein Kommutator der Form (7) und vom Gewicht $n(p-1)+1$ würde ein $a_i \geqslant p$ aufweisen, ist also nach (2) und (22) gleich 1. Die Gruppe $\mathfrak{M}^p$ ist also von endlicher Ordnung.

§ 2. $\delta_{p,w}$ für $w < p$

$\delta_{p,w}$ für $w < p$ ergibt sich sofort wenn man bemerkt, daß

$$\sum_{\varepsilon=1}^{p-1} \varepsilon^k \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & \text{falls} \quad k \not\equiv 0 \bmod p-1 \\ -1 \bmod p & \text{falls} \quad k \equiv 0 \bmod p-1 \end{cases} \tag{24}$$

und die unter (23) gemachten Feststellungen berücksichtigt.

Man schließt dann, daß

$$f^p_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} \equiv 0 \bmod p \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i < p$$

sein muß. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\delta_{p,w} = 0 \qquad \text{für} \qquad w < p\,. \tag{25}$$

§ 3. $\delta_{p,p}$

In diesem Paragraphen rechnen wir durchwegs mod $\mathfrak{M}_{p+1}$. Aus (23) und (24) folgt dann für $\sum_{i=1}^{r} a_i = p$

$$f^p_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} \equiv -\, C_{i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} \cdot a_k \cdot x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_r}^{a_r} \bmod p\,. \tag{26}$$

Zum Beweis braucht man nach (24) nur den Koeffizienten von ε^{p-1} im ersten Ausdruck von (23) zu bestimmen für $w = p$. Er ist gleich $\binom{p-A_{k-1}}{1} - \binom{p-A_k}{1} = a_k$. Damit ergibt sich (26).

Wegen der Bedeutung der Exponenten (26) gilt daher mod $\mathfrak{M}^p_{p+1}$ eine Relation der Form

$$\prod_{\substack{\sum_{i=1}^{r} a_i = p \\ 0 \leqslant a_i < p\,;\ 1 < k \leqslant r \leqslant n}} K_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}}^{-C_{i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} \cdot a_k \cdot x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_r}^{a_r}} = 1\,. \tag{27}$$

Nun gehören alle in (27) auftretenden Elemente einer elementaren Abelschen Gruppe an, nämlich der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{M}^p$. Wegen $a_i < p$ und der beliebigen Wahl der $x \bmod p$ können wir daher nach dem geläufigen *Vandermondschen Argument*[7]) schließen, daß sogar

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}^{-C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r} \cdot a_k}} = 1 \ ,$$

d. h. es gilt auch

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}^{-a_k} = 1 \tag{28}$$

für $\sum_{i=1}^{r} a_i = p$.

(28) besagt: Zwischen den Basiskommutatoren (7) vom Gewicht p, die in den a_i und $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ übereinstimmen, gilt mod $\mathfrak{M}_{p+1}^p$ genau die Relation (28). Hieraus folgt, daß der Dimensionsdefekt der Klasse p gleich ist der Anzahl der verschiedenen Aggregate $x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r}$, die man aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ herstellen kann unter den Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^{r} a_i = p$ und $0 \leqslant a_i < p$.

Hieraus folgt

$$\delta_{p,p} = \binom{n+p-1}{p} - n \ . \tag{29}$$

Für $n = 2$ besagt (28), daß die Klasse unserer Gruppe genau gleich $p - 1$ ist.

§ 4. $\delta_{p,p+1}$ für $n > 2$

Alle Rechnungen gelten jetzt mod $\mathfrak{M}_{p+2}^p$. Wir betrachten die folgende p-te Potenz:

$$\left(\alpha_{i_1}^{x_{i_1}} \alpha_{i_2}^{x_{i_2}} \ldots \alpha_{i_r}^{x_{i_r}} \cdot K_{i_k\, i_j}^{x_{i_k\, i_j}}\right)^p$$

Sie besitzt wegen (23) und (24) die Gestalt

$$P \cdot \prod_{\substack{\sum_{i=1}^{r} a_i = p-1 \\ (0 \leqslant a_i \leqslant p-1)}} \Big(K_{i_k\, i_j}, \underbrace{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Big)^{-x_{i_k\, i_j} \cdot x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r} \cdot C_{i_k\, i_j}} = 1 \ .$$

---

[7]) vgl. z. B.: *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Springer, 1937. § 43, insbesondere auf p. 128.

P ist ein Produkt von Basiskommutatorpotenzen, deren Exponenten nur $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ involvieren. Wegen der beliebigen Wahl der x folgt insbesondere $P = 1$. Somit gilt

$$\Pi\Big(K_{i_k i_j}, \underbrace{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Big)^{-x_{i_k i_j} \cdot x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r} \cdot c_{i_k i_j}} = 1 .$$

Aus denselben Gründen wie früher können wir jetzt wieder das *Vandermondsche Argument* anwenden und beweisen, daß

$$\Big(K_{i_k i_j}, \overbrace{\underbrace{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}}^{p-1}\Big) = 1 . \tag{30}$$

Nun kann aber jeder Basiskommutator vom Gewicht $p + 1$ durch (30) representiert werden.

Es folgt also

$$\delta_{p,\,p+1} = d_{p+1} . \tag{31}$$

Wir haben früher bereits bemerkt, daß $\mathfrak{M}^p$ eine endliche Gruppe darstellt. Statt (31) können wir daher auch sagen: Die Klasse der Gruppe $\mathfrak{M}^p$ ist für $n > 2$ genau gleich p.

Damit ist der folgende abschließende Satz über die *metabelsche Approximation des Problemes von Burnside gewonnen.*

3. Satz: *Die maximale metabelsche Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen, ist für $n = 2$ von der Klasse $c = p - 1$ und für $n > 2$ von der Klasse $c = p$. Sie ist von der Ordnung*

$$p^{n + \sum_{w=2}^{c} d_w - \delta_{p,w}} .$$

Es ist

$$d_w = (w-1)\binom{n+w-2}{w}$$

und

$$\delta_{p,w} = 0 \quad \text{für} \quad w < p$$

$$\delta_{p,p} = \binom{n+p-1}{p} - n .$$

Für $n > 2$ bestehen zwischen den p-fachen Basiskommutatoren genau die Relationen

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{i_k i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}^{a_k} = 1 .$$

(Eingegangen den 20. April 1950.)