Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Über Taubersche Konstanten bei Cesàroschen Mittelbildungen.
Autor: Garten, V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20708

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Taubersche Konstanten bei Cesàroschen Mittelbildungen

Von V. Garten in Tübingen

Einleitung

Herr H. Hadwiger[1]) hat als erster die interessante Bemerkung gemacht, daß sich sowohl der klassische Abelsche Stetigkeitssatz als auch seine ebenfalls schon klassische Umkehrung von Tauber in einer einzigen Ungleichung einheitlich zusammenfassen lassen, die noch unter allgemeineren Voraussetzungen gültig bleibt. In neuerer Zeit haben sich nun mehrere Untersuchungen[2]) mit der Weiterführung dieser Bemerkung und namentlich mit der Bestimmung der dabei auftretenden absoluten Konstanten, die von Herrn Hadwiger treffend als Konstanten Tauberscher Art bezeichnet wurden, beschäftigt. Als in gewisser Hinsicht abschließendes Ergebnis sei hier nur der folgende Satz genannt:

Satz I (*von Agnew*[3])). *Es sei* $\beta > 0$. *Dann gilt für jede unendliche Reihe* Σa_ν *mit den Teilsummen* $s_n = s(n)$ *und reellen oder komplexen Gliedern, die der Bedingung*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \, | m \, a_m | < \infty \tag{1}$$

genügen, für die also insbesondere die Potenzreihe

$$a(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \, x^\nu$$

im Einheitskreis konvergiert, die Ungleichung:

$$\overline{\lim} \, | a(x) - s(n) | \leq f^*(\beta) \, \overline{\lim_{m\to\infty}} \, | m a_m | \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{bzw.} \quad x \to 1-0, \tag{2}$$

wenn $x = \exp(-\beta/n)$ *bzw.* $n = [-\beta/\log x]$ *gewählt wird, wobei die Konstante* $f^*(\beta)$ *den Wert*

---

[1]) Siehe das am Ende der Note befindliche Schrifttumsverzeichnis Nr. 3.

[2]) Vergleiche die im Schrifttumsverzeichnis aufgeführten Veröffentlichungen, Nr. 1 bis Nr. 7 und Nr. 10.

[3]) Vergleiche Schrifttumsverzeichnis Nr. 2.

$$f^*(\beta) = C + \log \beta + 2 \int_\beta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{3}$$

besitzt und C die Eulersche Konstante bedeutet. Überdies ist bei festgehaltenem β der Wert $f^*(\beta)$ die bestmögliche Konstante in dem Sinne, daß für gewisse reelle Reihen in (2) das Gleichheitszeichen eintritt. Endlich liefert $\beta = \log 2$ unter allen Konstanten $f^*(\beta)$ den günstigsten (das heißt kleinsten) Wert[4]

$$\tau^* = f^*(\log 2) \ .$$

Erweitert man in Satz I die Voraussetzung $n\, a_n = O(1)$ durch Einführung des Kroneckerschen Ausdruckes

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu$$

zu $\sigma_n = O(1)$, — wie dies Herr Wintner zuerst für den Fall $\beta = 1$ ausgeführt hat, — so erhält man den

Satz II[5]. *Wird in Satz I die Voraussetzung (1) durch die Bedingung*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mid \sigma_m \mid < \infty$$

ersetzt, so gilt für $n \to \infty$ bzw. $x \to 1-0$ die Ungleichung

$$\overline{\lim} \mid a(x) - s(n) \mid \leq f(\beta) \overline{\lim_{m\to\infty}} \mid \sigma_m \mid \ , \tag{4}$$

wobei die Konstante den Wert

$$f(\beta) = f^*(\beta) + 2\, e^{-\beta}$$

besitzt. Überdies wird bei festgehaltenem β für gewisse reelle Reihen in (4) die Konstante tatsächlich erreicht. Der günstigste (das heißt kleinste) Konstantenwert $\tau = f(\beta_0)$ wird für die positive Lösung $\beta = \beta_0$ der transzendenten Gleichung

$$e^\beta - 2(1+\beta) = 0$$

erzielt.

Die beiden angeführten Sätze liefern also eine Abschätzung für die Abweichung einer Zahlenfolge s_n von ihren Abelschen Mitteln $a(x)$,

[4]) Der Fall $\beta = 1$ wurde von Wintner, Hartman und Hadwiger, der Fall $\beta = \log 2$ von Hadwiger und Agnew untersucht. Agnew behandelte anschließend (in Nr. 2 des Schrifttumsverzeichnisses) die Frage allgemein bei unbestimmt gelassenem Korrespondenzparameter $\beta > 0$.

[5]) In seiner zweiten Abhandlung erwähnt Agnew, daß der hier in Satz II angegebene Sachverhalt (bei allgemein gewähltem $\beta > 0$ unter der Voraussetzung, daß der Kroneckersche Ausdruck beschränkt bleibt) von W. E. Barnes in Angriff genommen sei. Bisher habe ich aber noch keine diesbezügliche Veröffentlichung des Herrn Barnes ausfindig machen können.

sofern die Variablen n und x in passender Weise durch den Korrespondenzparameter β miteinander gekoppelt werden.

In der vorliegenden Note werden in entsprechender Weise die Abweichungen der Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ von ihren Cesàroschen Mitteln k-ter Ordnung ($k \geq 1$ ganz)

$$c_p^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{p} A_{p\nu}^{(k)} a_\nu \,, \qquad A_{p\nu}^{(k)} = \binom{p-\nu+k}{p-\nu} \Big/ \binom{p+k}{p} \tag{5}$$

untersucht. Wie zu erwarten, gehen die sich hierbei ergebenden Konstanten τ_k^*, τ_k für $k \to \infty$ in die Konstanten τ^*, τ der Abelschen Mittel über. Man gelangt nämlich zu folgendem Ergebnis:

Satz 1. *Es sei $\alpha > 0$. Dann gilt für jede Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit den Teilsummen s_n und reellen oder komplexen Gliedern, die der Bedingung (6) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \, | m\, a_m | < \infty$ genügen, die Ungleichung*

$$\overline{\lim} \, | c_p^{(k)} - s_n | \leq C_k^*(\alpha) \, \overline{\lim_{m\to\infty}} \, | m a_m | \qquad \text{für } n \to \infty \text{ bzw. } p \to \infty \,, \tag{7}$$

wenn $p = [n/\alpha]$ bzw. $n = [\alpha\, p]$ gewählt wird und die Konstante $C_k^*(\alpha)$ den Wert

$$C_k^*(\alpha) = \begin{cases} f_k^*(\alpha) = \int\limits_\alpha^1 (1-t)^k \dfrac{dt}{t} + \int\limits_0^\alpha \{1-(1-t)^k\} \dfrac{dt}{t} & \textit{für } \alpha \leq 1 \\ g_k^*(\alpha) = \int\limits_1^\alpha \dfrac{dt}{t} + \int\limits_0^1 \{1-(1-t)^k\} \dfrac{dt}{t} & \textit{für } \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

besitzt, also von der Wahl der (a_n) bzw. (s_n) nicht abhängt. Überdies läßt sich bei festem $\alpha > 0$ die Konstante $C_k^*(\alpha)$ nicht verbessern, da in der Ungleichung (7) für gewisse reelle Reihen das Gleichheitszeichen eintritt. Bei festem $k \geq 1$ liefert $\alpha = \alpha_k^* = 1 - 1/\sqrt[k]{2}$ den günstigsten (das heißt kleinsten) Wert $\tau_k^* = f_k^*(\alpha_k^*)$. Endlich gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k^* = \tau^*$.

Ersetzt man hier wieder die Voraussetzung $n\, a_n = O(1)$ unter Heranziehung des Kroneckerschen Ausdruckes

$$\delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu = s_n - c_n^{(1)} \qquad (\delta_0 = 0\,, n = 1\,, 2\,, \ldots)$$

durch die allgemeinere Bedingung $\delta_n = O(1)$, so erhält man den folgenden

Satz 2. *Wird in Satz 1 die Voraussetzung (6) durch die Bedingung*

$$\overline{\lim} \, | \delta_m | < \infty \tag{9}$$

ersetzt, so gilt für $n \to \infty$ *bzw.* $p \to \infty$ *die Ungleichung*

$$\overline{\lim} \mid c_p^{(k)} - s_n \mid \leq C_k(\alpha) \overline{\lim_{m \to \infty}} \mid \delta_m \mid , \tag{10}$$

wobei die Konstante $C_k(\alpha)$ *den Wert*

$$C_k(\alpha) = \begin{cases} f_k(\alpha) = f_k^*(\alpha) + 2(1-\alpha)^k & \text{für } \alpha \leq 1 \\ g_k(\alpha) = g_k^*(\alpha) & \text{für } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

besitzt. Überdies läßt sich bei festem $\alpha > 0$ *die Konstante* $C_k(\alpha)$ *nicht verbessern, da in der Ungleichung (10) für gewisse reelle Reihen das Gleichheitszeichen eintritt. Der günstigste (das heißt kleinste) Wert* $\tau_k = f(\alpha_k)$ *wird bei festem* $k \geq 1$ *für die positive Lösung* $\alpha = \alpha_k$ *der algebraischen Gleichung*

$$1 - 2k(1-\alpha)^{k-1} + 2(k-1)(1-\alpha)^k = 0$$

erreicht. Endlich gilt $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = \tau.$

Aus diesen Sätzen 1 und 2 werden zum Schluß noch einige Folgerungen für reelle Reihen gezogen. So ergeben sich aus den Ungleichungen, die mit den direkten Sätzen zugleich auch ihre Umkehrungen enthalten, eine Erweiterung des Permanenzsatzes und eine Erweiterung des Tauberschen Umkehrsatzes für das C_k-Verfahren ($1 \leq k \leq \infty$, ganz). Mit Hilfe eines Satzes von Ramaswami[6]) gelingt es ferner, aus diesen für C_k-Verfahren gültigen Sätzen durch den Grenzübergang $k \to \infty$ ohne Benutzung der Sätze I, II die entsprechenden Sätze für Abelsche Mittel herzuleiten, nämlich einerseits eine Erweiterung des Abelschen Stetigkeitssatzes[7]) und des Satzes von Frobenius, andererseits eine Erweiterung des Tauberschen Satzes[7]) für Potenzreihen[8]).

[6]) Vergleiche Schrifttumsverzeichnis Nr. 8 und Nr. 9, S. 371/372.

[7]) Diese Erweiterung rührt — für Reihen mit komplexen Gliedern — bereits von Herrn Hadwiger (vergleiche Schrifttumsverzeichnis Nr. 3) her.

[8]) Nach Fertigstellung dieser Note machte mich Herr Hadwiger freundlicherweise auf die vor kurzem veröffentlichten schönen Untersuchungen von Herrn H. Delange (vergleiche Schrifttumsverzeichnis Nr. 10) aufmerksam, in denen dasselbe hier nur im Spezialfall der C_k-Mittel behandelte Problem (die Entwicklung der elementaren Umkehrsätze als Korollare gewisser allgemeiner Ungleichungen, die absolute Konstanten enthalten) ganz allgemein, sowohl für allgemeine Limitierungsverfahren als auch für allgemeine Konvergenzbedingungen, in umfassender Weise dargestellt wird. In der zweiten Mitteilung seiner Untersuchungen behandelt Herr Delange sogar die entsprechende Fragestellung bei den tiefer gelegenen Umkehrsätzen. Die vorliegende Note dürfte aber vielleicht trotzdem erstens als konkrete Illustration zu den sehr allgemein gehaltenen Untersuchungen von Herrn Delange und zweitens mit Rücksicht auf die besondere Natur der in Paragraph 3 enthaltenen Schlußfolgerungen einiges Interesse beanspruchen.

§ 1. Beweis des Satzes 1

Den Ausgangspunkt für den Beweis des Satzes 1 bildet der

Hilfssatz 1: Sind die (reellen oder komplexen) Glieder einer nicht notwendig konvergenten Reihe Σa_ν *der asymptotischen Beschränkung*

$$\nu \mid a_\nu \mid \leq M \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

unterworfen, so gibt es zu jedem Wertepaar (p, n) *eine beste (das heißt kleinste) von der Wahl der* a_ν *unabhängige Schranke* $C_k^*(p, n)$ *derart, daß die Abschätzung*

$$\mid c_p^{(k)} - s_n \mid \leq M \cdot C_k^*(p, n) \qquad (n = 1, 2, \ldots; \; p = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

gilt, und es ist

$$C_k^*(p, n) = \begin{cases} F_k^*(p, n) & \text{für} \quad n \leq p \, , \\ G_k^*(p, n) & \text{für} \quad n \geq p \, , \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} F_k^*(p, n) &= \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k)} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu} \text{ [9]} , \\ G_k^*(p, n) &= \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

gesetzt wird.

1. Für $n \leq p$ ist nämlich nach (5)

$$c_p^{(k)} - s_n = \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k)} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) a_\nu \, .$$

Wegen

$$0 < A_{p\nu}^{(k)} < 1 \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p$$

und der Voraussetzung (11) folgt hieraus unmittelbar

$$\mid c_p^{(k)} - s_n \mid \leq M \, F_k^*(p, n) \, .$$

2. Für $n \geq p$ hat man

$$s_n - c_p^{(k)} = \sum_{\nu=p+1}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{p} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) a_\nu$$

und aus denselben Gründen wie soeben

$$\mid s_n - c_p^{(k)} \mid \leq M \, G_k^*(p, n) \, .$$

---

[9] $\sum_{m}^{n}$ bedeutet für $n < m$ die leere Summe.

Das Gleichheitszeichen erhält man in der Abschätzung (12), wenn man im Fall $n \geq p$ das Beispiel $a_0 = 0$, $a_\nu = 1/\nu$ für $\nu \geq 1$ wählt, im Fall $n < p$ aber das noch von n abhängige Beispiel $a_\nu = a_\nu^{(n)}$ mit

$$a_\nu^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu = 0 \\ -1/\nu & \text{für} \quad 1 \leq \nu \leq n \\ +1/\nu & \text{für} \quad n+1 \leq \nu \end{cases}$$

betrachtet.

Hilfssatz 2: Für die in Hilfssatz 1 auftretenden Schranken (13) gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} F_k^*(p,n) &= F_{k-1}^*(p,n) + \frac{1}{k}\{1 - 2A_{p\,n+1}^{(k)}\} - \frac{1}{p+k}\,, \\ G_k^*(p,n) &= G_{k-1}^*(p,n) + \frac{1}{k} - \frac{1}{p+k}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Setzt man nämlich

$$F_k^*(p,n) = S_1^{(k)} + S_2^{(k)}, \qquad G_k^*(p,n) = S_3^{(k)} + S_4^{(k)} \tag{15}$$

mit

$$S_1^{(k)} = \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k)} \frac{1}{\nu}\,, \qquad S_2^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu}\,,$$

$$S_3^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{p} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu}\,, \qquad S_4^{(k)} = \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{1}{\nu}\,,$$

so hat man zunächst wegen

$$A_{p\nu}^{(k)} = A_{p\nu}^{(k-1)} \left(1 - \frac{\nu}{p+k}\right), \tag{16}$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k-1)} = A_{p\,n+1}^{(k)} \frac{p+k}{k}\,, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{p\nu}^{(k-1)} = \frac{p+k}{k}(1 - A_{p\,n+1}^{(k)}) - 1 \qquad (n \leq p) \tag{18}$$

nach (16)

$$S_1^{(k)} = \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{p+k}\,,$$

$$S_2^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} (1 - A_{p\nu}^{(k-1)}) \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{p+k}\,,$$

$$S_3^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{p} (1 - A_{p\nu}^{(k-1)}) \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{p+k}\,,$$

und weiter nach (17)

$$S_1^{(k)} = S_1^{(k-1)} - \frac{1}{k} A_{pn+1}^{(k)} \tag{19}$$

und endlich nach (18)

$$\begin{aligned} S_2^{(k)} &= S_2^{(k-1)} - \frac{1}{k} A_{pn+1}^{(k)} + \frac{1}{k} - \frac{1}{p+k}\,, \\ S_3^{(k)} &= S_3^{(k-1)} + \frac{1}{k} - \frac{1}{p+k}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Verwendet man die Formeln (19), (20) in (15) und beachtet, daß $S_4^{(k)} = S_4^{(k-1)}$ ist, so ergeben sich die Rekursionsformeln (14).

Da für das Folgende das infinitäre Verhalten der Schranke $C_k^*(p, n)$ für $p \to \infty$ bzw. $n \to \infty$ interessiert, geben wir zunächst für die den Summen $F_k^*(p, n)$, $G_k^*(p, n)$ nachgebildeten Integralausdrücke

$$\begin{aligned} f_k^*(\alpha) &= \int_\alpha^1 (1-t)^k \frac{dt}{t} + \int_0^\alpha \{1-(1-t)^k\} \frac{dt}{t} \equiv J_1^{(k)} + J_2^{(k)}\,, \\ g_k^*(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{dt}{t} + \int_0^1 \{1-(1-t)^k\} \frac{dt}{t} \equiv J_4^{(k)} + J_3^{(k)} \end{aligned} \tag{21}$$

die entsprechenden Rekursionsformeln.

Hilfssatz 3: Für die in Satz 1 (8) auftretenden Schranken f_k^* und g_k^* gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} f_k^*(\alpha) &= f_{k-1}^*(\alpha) + \frac{1}{k}\{1 - 2(1-\alpha)^k\}\,, \\ g_k^*(\alpha) &= g_{k-1}^*(\alpha) + \frac{1}{k}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Denn die den Summen $S_i^{(k)}$ analog zu bildenden Integrale $J_i^{(k)}$ befolgen entsprechende Rekursionsbeziehungen wie (19) und (20).

Nach diesen Vorbereitungen gelingt es leicht, die Schrankenwerte $C_k^*(p, n)$ für große p bzw. n, wenn nämlich p und n beide gleichzeitig $\to \infty$ streben, so daß der Quotient n/p einen Grenzwert $\alpha > 0$ besitzt, durch die entsprechenden Integralausdrücke (21) abzuschätzen.

Hilfssatz 4: Für ein α, das der Bedingung

$$\frac{n}{p+1} < \alpha < \frac{n+1}{p} \tag{23}$$

genügt, gelten bei $p \to \infty$ bzw. $n \to \infty$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} F_k^*(p, n) &= f_k^*(\alpha) + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad n \le p \\ G_k^*(p, n) &= g_k^*(\alpha) + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad n \ge p \quad (m = \mathrm{Min}\,(p, n))\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Der Beweis hierfür ergibt sich leicht durch vollständige Induktion[10]). Für $k = 1$ hat man nämlich nach (13) wegen $A^{(1)}_{p\nu} = 1 - \nu/(p+1)$ zunächst

$$F_1^*(p,n) = \sum_{\nu=n+1}^{p} \left(1 - \frac{\nu}{p+1}\right)\frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \left\{1 - \left(1 - \frac{\nu}{p+1}\right)\right\}\frac{1}{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{p} \frac{1}{\nu} - 1 + \frac{2n}{p+1} + \frac{1}{p+1}$$

$$G_1^*(p,n) = \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} \left\{1 - \left(1 - \frac{\nu}{p+1}\right)\right\}\frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{1}{\nu} + 1 - \frac{1}{p+1},$$

und nach (21)

$$f_1^*(\alpha) = \log 1/\alpha - 1 + 2\alpha, \qquad g_1^*(\alpha) = \log \alpha + 1 .$$

Geläufige Integralabschätzungen für die Teilsummen der harmonischen Reihe führen daher auf die Beziehungen

$$F_1^*(p,n) = f_1^*(\alpha) + O(1/m), \qquad G_1^*(p,n) = g_1^*(\alpha) + O(1/m). \tag{25}$$

Die Behauptung ist also für $k = 1$ richtig. Angenommen, sie sei bereits für $k = 1, 2, \ldots, l-1$ bewiesen, so gilt insbesondere für $l \geq 2$

$$F_{l-1}^*(p,n) = f_{l-1}^*(\alpha) + O(1/m), \quad G_{l-1}^*(p,n) = g_{l-1}^*(\alpha) + O(1/m). \tag{26}$$

Auf Grund der Rekursionsformeln (14) und (22) und der Induktionsvoraussetzung (26) erhält man

$$\begin{aligned} F_l^*(p,n) &= F_{l-1}^*(p,n) + \frac{1}{l}\{1 - 2A^{(l)}_{p\,n+1}\} - \frac{1}{p+l} \\ &= f_l^*(\alpha) + \frac{2}{l}\{(1-\alpha)^l - A^{(l)}_{p\,n+1}\} + O\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G_l^*(p,n) &= G_{l-1}^*(p,n) + \frac{1}{l} - \frac{1}{p+l} \\ &= g_l^*(\alpha) + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned}$$

Da nun für $n \leq p$ wegen

$$\left(1 - \frac{n+1}{p+1}\right)^l \leq A^{(l)}_{p\,n+1} \leq \left(1 - \frac{n+1}{p+l}\right)^l \qquad (l \geq 1) \tag{27}$$

und (23) die Abschätzung

---

[10]) Man kann natürlich auch für $k > 1$ die in F_k^*, G_k^* auftretenden Summen $S_i^{(k)}$ in ganz ähnlicher Weise, wie es hier für $k = 1$ geschieht, direkt durch die entsprechenden Integrale $J_i^{(k)}$ abschätzen, was insbesondere im Fall nicht ganzzahliger Ordnungen k nötig würde.

$$A^{(l)}_{pn+1} = (1-\alpha)^l + O\left(\frac{1}{m}\right) \tag{28}$$

gilt, sind damit die Formeln (24) bewiesen.

Läßt man nunmehr bei festem $\alpha > 0$ erstens dem Index n die Zahl $p = [n/\alpha]$ entsprechen, so wird offenbar $n/(p+1) < \alpha \leq n/p$; ordnet man zweitens umgekehrt dem Index p die Zahl $n = [\alpha\, p]$ zu, so wird $n/p \leq \alpha < (n+1)/p$. Beidemale erfüllt α also die Bedingung (23).

Die Fallunterscheidung $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ entspricht, wie man leicht sieht, für hinreichend große Werte von n bzw. p der Fallunterscheidung $n < p$, $n = p$, $n > p$.

Benutzt man nun die in Hilfssatz 4 angegebenen Abschätzungen für die jeweilige Schranke $C^*_k(p, n)$ und vollzieht in der Ungleichung (12) des Hilfssatzes 1 den Grenzübergang $n \to \infty$ bzw. $p \to \infty$, so ergibt sich der

Hilfssatz 5: Unter der gleichen Voraussetzung wie in Hilfssatz 1 gilt die Limesaussage

$$\overline{\lim}\, | c^{(k)}_p - s_n | \leq M\, C^*_k(\alpha) \quad \textit{für} \quad n \to \infty, \quad p = [n/\alpha]\ ;$$
$$\textit{bzw. für} \quad p \to \infty, \quad n = [\alpha\, p]\ , \tag{29}$$

wobei

$$C^*_k(\alpha) = \begin{cases} f^*_k(\alpha) & \textit{für} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ g^*_k(\alpha) & \textit{für} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

ist und f^*_k, g^*_k *die in (21) angegebene Bedeutung haben.*

Wir gehen nun zum Beweis des Satzes 1 über. Zunächst prüfen wir, daß in (29) rechter Hand die Konstante M durch den Hauptlimes $l^* = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m\, | a_m |$ ersetzt werden darf, womit dann die Ungleichung (7) des Satzes 1 sichergestellt ist.

Nach der Voraussetzung des Satzes 1 gibt es zu jedem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε derart, daß

$$\nu\, | a_\nu | < l^* + \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad \nu > n_\varepsilon$$

ausfällt. Setzt man nun

$$a^*_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq n_\varepsilon \\ a_\nu & \text{für} \quad n_\varepsilon + 1 \leq \nu\ , \end{cases}$$

so gilt

$$\nu\, | a^*_\nu | < l^* + \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad \nu \geq 0\ . \tag{30}$$

Um die Abhängigkeit von den Reihengliedern a_ν zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir vorübergehend ausführlicher $c^{(k)}_p(a_\nu)$ für $c^{(k)}_p$

und $s_n(a_\nu)$ für s_n. Für $n > n_\varepsilon$, $p > n_\varepsilon$, $n \leq p$ oder $n \geq p$ erhält man dann wegen des linearen Charakters der Mittelbildung

$$|c_p^{(k)}(a_\nu) - s_n(a_\nu)| \leq |c_p^{(k)}(a_\nu^*) - s_n(a_\nu^*)| + |c_p^{(k)}(a_\nu - a_\nu^*) - s_n(a_\nu - a_\nu^*)| \ . \quad (31)$$

Da nach der Voraussetzung des Satzes 1 ferner eine positive Konstante M existiert derart, daß $\nu\,|\,a_\nu\,| \leq M$ für alle $\nu \geq 0$ gilt, kann man den zweiten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (31) leicht so abschätzen:

$$|c_p^{(k)}(a_\nu - a_\nu^*) - s_n(a_\nu - a_\nu^*)| \leq M \sum_{\nu=1}^{n_\varepsilon} (1 - A_{p\nu}^{(k)})\, 1/\nu \equiv M\, R^{(k)}(n_\varepsilon) \ .$$

Nach (16) und (18) wird aber

$$R^{(l)}(n_\varepsilon) = R^{(l-1)}(n_\varepsilon) + \frac{1}{l}(1 - A_{p\,n_\varepsilon+1}^{(l)}) - \frac{1}{p+l} \qquad (l \geq 2) \qquad (32)$$

und nach (27) ist hierbei

$$1 - A_{p\,n_\varepsilon+1}^{(l)} \leq 1 - \left(1 - \frac{n_\varepsilon + 1}{p+1}\right)^l \leq \frac{n_\varepsilon + 1}{p+1}\, l \ . \qquad (33)$$

Durch Aufsummieren von $l = 2$ bis $l = k$ erhält man aus (32) daher

$$R^{(k)} \leq R^{(1)} + \frac{n_\varepsilon + 1}{p+1}(k-1) \ .$$

Wegen $A_{p\nu}^{(1)} = 1 - \nu/(p+1)$ findet man aber $R^{(1)} = n_\varepsilon/(p+1)$, folglich

$$R^{(k)}(n_\varepsilon) \leq \frac{k\, n_\varepsilon + (k-1)}{p+1} \qquad (34)$$

und somit schließlich

$$|c_p^{(k)}(a_\nu - a_\nu^*) - s_n(a_\nu - a_\nu^*)| \leq M\, \frac{k\, n_\varepsilon + (k-1)}{p+1} = O\left(\frac{1}{p}\right) \ . \qquad (35)$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ mit der Zuordnung $p = [n/\alpha]$ bzw. $p \to \infty$ mit $n = [\alpha\, p]$ in (31) liefert nun, da sich bei festem $\varepsilon > 0$ und somit festem n_ε der Hilfssatz 5 wegen (30) mit $l^* + \varepsilon$ an Stelle von M auf die Reihe $\Sigma\, a_n^*$ anwenden läßt, mit Rücksicht auf (35) zunächst

$$\overline{\lim}\, |c_p^{(k)}(a_\nu) - s_n(a_\nu)| \leq \overline{\lim}\, |c_p^{(k)}(a_\nu^*) - s_n(a_\nu^*)| \leq (l + \varepsilon)\, C_k^*(\alpha) \ . \qquad (36)$$

Weil diese Ungleichung für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, die linke Seite jedoch von ε gar nicht abhängt, muß auch die Ungleichung (7) des Satzes 1 gelten, die für $\varepsilon = 0$ aus (36) hervorgeht. Damit ist der erste Teil des Satzes 1 bewiesen.

Um weiter zu zeigen, daß die Konstante $C_k^*(\alpha)$ sich nicht verbessern läßt, genügt es im Fall $\alpha \geq 1$ das Beispiel $a_0 = 0, a_\nu = 1/\nu$ für $\nu \geq 1$ zu betrachten. Im Fall $\alpha < 1$ wähle man

$$a_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq \lambda_1 \\ -1/\nu & \text{für} \quad \lambda_{2m-1} < \nu \leq \lambda_{2m} \\ +1/\nu & \text{für} \quad \lambda_{2m} < \nu \leq \lambda_{2m+1}\,, \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

wobei (λ_m) eine Folge positiver, über alle Grenzen wachsender Zahlen bedeutet, für die noch

$$\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} > \frac{1}{\alpha} > 1 \quad \text{für} \quad m > m_\alpha\,, \tag{38}$$

und

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \to 0 \quad \text{für} \quad m \to \infty \tag{39}$$

gilt.

Die Beispielreihe (37) erfüllt die Voraussetzung des Satzes 1, weil hier $\overline{\lim}\, | \nu a_\nu | = 1$ ist. Offenbar genügt es nun zu zeigen, daß bei festem gegebenem α $(0 < \alpha < 1)$ für unser Beispiel die Ungleichung

$$\overline{\lim}\, | c_p^{(k)} - s_n | \geq f_k^*(\alpha) \tag{40}$$

besteht, wenn n bzw. p jeweils nur eine passende Teilfolge der natürlichen Zahlenreihe durchläuft und $p = [n/\alpha]$ bzw. $n = [p\alpha]$ ist.

Zum Beweis von (40) wählen wir $n = \lambda_{2m}$ mit $m > m_\alpha/2$, so daß wegen $p = [n/\alpha]$ gemäß (38) $p \leq \lambda_{2m}/\alpha < \lambda_{2m+1}$ wird, und bilden

$$c_p^{(k)} - s_n = \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k)} + \sum_{\lambda_{2m-1}+1}^{\lambda_{2m}} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) + \sum_{\mu=2}^{2m-1} (-1)^\mu \sum_{\lambda_{\mu-1}+1}^{\lambda_\mu} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu}\,. \tag{41}$$

Die Differenz wird offenbar dadurch verkleinert, daß man auf der rechten Seite in der dritten Summe für jeden Wert von μ das Minuszeichen verwendet. Verkleinert man nun weiter, indem man bei der so entstandenen Summe

$$-\sum_{\lambda_1+1}^{\lambda_{2m-1}} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu}$$

die untere Summationsgrenze durch 1 ersetzt, und nimmt man diese Summe gleich zweimal, so kann man dafür zum Ausgleich in der zweiten Summe rechter Hand den Index ν von 1 anstatt von $\lambda_{2m-1} + 1$ an laufen lassen. So erhält man

$$c_p^{(k)} - s_n \geq \sum_{\nu=n+1}^{p} A_{p\nu}^{(k)} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu} - 2 \sum_{\nu=1}^{\lambda_{2m-1}} (1 - A_{p\nu}^{(k)}) \frac{1}{\nu}$$

oder in der Bezeichnungsweise von (13) und (32)

$$c_p^{(k)} - s_n \geq F_k^*(p, n) - 2\,R^{(k)}(\lambda_{2m-1}) \;.$$

Nach (34) gilt die Abschätzung

$$0 \leq R^{(k)}(\lambda_{2m-1}) \leq \frac{k\,\lambda_{2m-1} + (k-1)}{p+1} < k\,\alpha\,\frac{\lambda_{2m-1}}{\lambda_{2m}} + \frac{(k-1)\,\alpha}{\lambda_{2m}} \;,$$

also nach (39) $R^{(k)}(\lambda_{2m-1}) = o(1)$ für $m \to \infty$. Damit ist zunächst gezeigt, daß

$$c_{[n/\alpha]}^{(k)} - s_n \geq F_k^*(p, n) + o(1) \;, \qquad (n = \lambda_{2m})$$

und nach dem Hilfssatz 4, (33)

$$c_{[n/\alpha]}^{(k)} - s_n \geq f_k^*(\alpha) + o(1)$$

ist. Für $m \to \infty$ folgt hieraus die Limesaussage (40).

Es bleibt lediglich übrig, nachzuprüfen, daß man eine den obigen Forderungen genügende Folge λ_m finden kann. In der Tat braucht man nur $\lambda_m = m!$ zu wählen.

Bisher hatten wir den Zuordnungsparameter α fest gelassen. Von besonderem Interesse ist es aber, jetzt den Verlauf der Funktion $C_k^*(\alpha)$ in Abhängigkeit von α $(0<\alpha<\infty)$ zu untersuchen. Weil die Ableitung

$$f_k^{*\prime}(\alpha) = 1/\alpha\,\{1 - 2\,(1-\alpha)^k\} \tag{42}$$

negativ, gleich Null oder positiv ausfällt, je nachdem $0<\alpha<\alpha_k^*$, $\alpha = \alpha_k^*$ oder $\alpha>\alpha_k^*$ ist, liegt bei $\alpha = \alpha_k^* = 1 - 1/\sqrt[k]{2}$ das einzige absolute Minimum von $f_k^*(\alpha)$. Da hiernach insbesondere $f_k^*(\alpha_k^*)<f_k^*(1)$, andererseits $f_k^*(1) = g_k^*(1)$ ist und $g_k^*(\alpha)$ für $\alpha \geq 1$ monoton wächst, liefert die Wahl $\alpha = \alpha_k^*$ für den Zuordnungsparameter die beste, das heißt kleinste Konstante

$$\tau_k^* = f_k^*(\alpha_k^*) = \min_{0<\alpha<\infty} C_k^*(\alpha) \;.$$

Offenbar wird (vgl. (8)) $g_k^*(\alpha)$ also $C_k^*(\alpha)$ wie $\log\alpha$ unendlich für $\alpha \to \infty$ und $f_k^*(\alpha)$ also $C_k^*(\alpha)$ wie $\log 1/\alpha$ unendlich für $\alpha \to 0$. Aus der Darstellung

$$f_k^*(\alpha) = \log\frac{1}{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1 - 2\,(1-\alpha)^\nu}{\nu}$$

ergibt sich speziell

$$f_1^*(\alpha) = \log\frac{1}{\alpha} - 1 + 2\alpha \;, \qquad f_2^*(\alpha) = \log\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2} + 4\alpha - \alpha^2 \;,$$

$$f_3^*(\alpha) = \log\frac{1}{\alpha} - \frac{11}{6} + 6\alpha - 3\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 \;.$$

Für die Konstanten τ_k findet man wegen

$$1-\alpha_k^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1-\sqrt[k]{\frac{1}{2}}} = \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{\frac{k-\nu}{k}}$$

die Darstellung

$$\tau_k^* = \log\left(\sum_{\nu=1}^{k} 2^{\frac{\nu}{k}}\right) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{1-2^{\frac{k-\nu}{k}}}{\nu} ,$$

daher speziell

$$\tau_1^* = \log 2 = 0{,}693147 \,..$$

$$\tau_2^* = \log(2+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} = 0{,}813732 \ldots$$

$$\tau_3^* = \log(2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}) + \tfrac{3}{2} - \sqrt[3]{4} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} = 0{,}86106 \ldots .$$

Endlich untersuchen wir noch das Verhalten der Konstanten τ_k bei wachsendem Index k. Die Rekursionsformel (22) liefert mit $\alpha = \alpha_k^*$ wegen $2(1-\alpha_k^*)^k = 1$ die Beziehung $f_k^*(\alpha_k^*) = f_{k-1}^*(\alpha_k^*)$; da aber $f_{k-1}^*(\alpha_k^*) > f_{k-1}^*(\alpha_{k-1}^*)$ ist, gilt also $\tau_k^* > \tau_{k-1}^*$, das heißt die Konstanten τ_k^* wachsen mit k monoton.

Um $f_k^*(\alpha)$ für $k \to \infty$ nach oben abzuschätzen, führe man in der Integraldarstellung (8) von $f_k^*(\alpha)$ die Substitution

$$1-t = e^{-w/k} , \qquad 1-\alpha = e^{-\beta/k}$$

aus und setze zur Abkürzung

$$Q(x) = \frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1} .$$

So erhält man

$$f_k^*(\alpha) = \int_\beta^\infty \frac{e^{-w}}{w} Q\left(\frac{w}{k}\right) dw + \int_0^\beta \frac{1-e^{-w}}{w} Q\left(\frac{w}{k}\right) dw . \tag{43}$$

Wegen $e^x > 1+x$ gilt für beliebige x die Abschätzung $Q(x) < 1$ und daher

$$f_k^*(\alpha) < \int_\beta^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw + \int_0^\beta \frac{1-e^{-w}}{w} dw = f^*(\beta) . \tag{44}$$

Zufolge der Integraldarstellung der Eulerschen Konstanten

$$C = \int_0^1 \frac{1-e^{-w}}{w} dw - \int_1^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw \tag{45}$$

stimmt die soeben in (44) eingeführte Schranke $f^*(\beta)$ tatsächlich mit der in Satz I (3) bei den Abelschen Mitteln auftretenden Konstanten überein.

Für $\alpha = \alpha_k^*$ wird $\beta = \beta_k = \log 2$, also gilt

$$\tau_k^* = f_k^*(\alpha_k^*) < f^*(\log 2) = \tau^* .$$

Da hiernach die monoton wachsende Folge (τ_k^*) eine von k freie obere Schranke besitzt, muß jedenfalls der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k^* = \tau'$ vorhanden sein.

Zur Bestimmung des Grenzwertes τ' schätzen wir jetzt $f_k^*(\alpha)$ nach unten ab, setzen dabei allerdings voraus, daß $\alpha < 1 - e^{-1/\sqrt{k}}$ bzw. $\beta < \sqrt{k}$ bleibt, was insbesondere für $\alpha = \alpha_k^*$ wegen $\beta_k = \log 2$ sicher zutrifft. Nun ist für $x < 1$ stets $e^x < 1/(1-x)$ und darum $Q(x) > 1 - x$. Hiermit wird nach (43)

$$f_k^*(\alpha) > \int\limits_{\beta}^{\beta\sqrt{k}} \frac{e^{-w}}{w}\left(1 - \frac{w}{k}\right) dw + \int\limits_{0}^{\beta} \frac{1 - e^{-w}}{w}\left(1 - \frac{w}{k}\right) dw$$

$$> \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)\left\{\int\limits_{\beta}^{\beta\sqrt{k}} \frac{e^{-w}}{w} dw + \int\limits_{0}^{\beta} \frac{1 - e^{-w}}{w} dw\right\}$$

und wegen

$$\int\limits_{x}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw < \frac{1}{x}$$

weiterhin

$$f_k^*(\alpha) > \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)\left\{f^*(\beta) - \frac{1}{\beta\sqrt{k}}\right\} ,$$

Wählt man jetzt $\alpha = \alpha(k)$ derart, daß $\beta(k) = k \log 1/(1-\alpha)$ für $k \to \infty$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert β konvergiert, so folgt aus (44) und (45) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^*(\alpha(k)) = f^*(\beta)$. Für $\bar{\alpha}_k = 1 - c^{-1/k}$ folgt insbesondere $\lim\limits_{k\to\infty} f_k^*(\bar{\alpha}_k) = f^*(\log c)$. Mit $\alpha_k = 1 - 2^{-1/k}$ ergibt sich ganz speziell

$$\tau' = \tau^* = f^*(\log 2) .$$

Somit geht für $k \to \infty$ aus den Tauberschen Konstanten τ_k^* der Cesàroschen Mittel die Taubersche Konstante τ^* der Abelschen Mittel hervor.

§ 2. Beweis des Satzes 2

Als Ausgangspunkt für den Beweis des Satzes 2 beweisen wir zunächst einen dem Hilfssatz 1 unter den veränderten Voraussetzungen entsprechenden

Hilfssatz 1⁰. Mit den reellen oder komplexen Gliedern einer nicht notwendig konvergenten Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ *bilde man den Kroneckerschen Ausdruck*

$$\delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \nu a_\nu = s_n - c_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \quad \delta_0 = 0) . \tag{46}$$

Unter der Voraussetzung

$$| \delta_m | \leq M \qquad \textit{für alle} \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

gibt es zu jedem Wertepaar (p, n) *eine beste (das heißt kleinste) von der Wahl der* a_ν *unabhängige Schranke* $C_k(p, n)$ *so daß die Abschätzung*

$$| c_p^{(k)} - s_n | \leq M\, C_k(p, n) \qquad (n = 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots) \tag{48}$$

gilt, und es ist

$$C_k(p, n) = \begin{cases} F_k(p, n) & \textit{für} \quad n \leq p \\ G_k(p, n) & \textit{für} \quad n \geq p , \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung

$$B_{p\nu}^{(k-1)} = A_{p\nu}^{(k-1)} \left(1 + \frac{(k-1)\nu}{p-k}\right)$$

und

$$\begin{aligned} F_k(p, n) &= 1 + \sum_{\nu=n+1}^{p} B_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \{1 - B_{p\nu}^{(k-1)}\} \frac{1}{\nu} , \\ G_k(p, n) &= 1 + \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} \{1 - B_{p\nu}^{(k-1)}\} \frac{1}{\nu} \end{aligned} \tag{49}$$

gesetzt wird.

Nach (46) hat man nämlich

$$a_\nu = \delta_\nu - \delta_{\nu-1} + \frac{\delta_\nu}{\nu} \qquad \text{für} \quad \nu \geq 1 ,$$

woraus

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = a_0 + \delta_n + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\delta_\nu}{\nu}$$

und weiter wegen

$$A_{p\nu}^{(k)} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - A_{p\,\nu+1}^{(k)} = A_{p\nu}^{(k-1)} \left(1 + \frac{(k-1)\nu}{p+k}\right) \frac{1}{\nu} = B_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{\nu} \tag{50}$$

mittels partieller Summation

$$c_{p\nu}^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{p} A_{p\nu}^{(k)} a_\nu = a_0 + \sum_{\nu=1}^{p} B_{p\nu}^{(k-1)} \frac{\delta_\nu}{\nu}$$

folgt.

Im Fall $n \leq p$ ist daher

$$c_p^{(k)} - s_n = -\delta_n + \sum_{\nu=n+1}^{p} B_{p\nu}^{(k-1)} \frac{\delta_\nu}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \{1 - B_{p\nu}^{(k-1)}\} \frac{\delta_\nu}{\nu} . \tag{51}$$

Der Ausdruck
$$v_\nu = 1 - B_{p\nu}^{(k-1)} = 1 - A_{p\nu}^{(k-1)}\left(1 + \frac{(k-1)\nu}{p+k}\right)$$
ist für $k = 1$ nicht negativ und für $k > 1$ folgt dies sogleich aus
$$v_0 = 0 \qquad \text{und} \quad v_{\nu+1} - v_\nu = A_{p\nu}^{(k-2)} \frac{k-1}{p+k-1} \frac{k(\nu+1)}{p+k} > 0 \ .$$
Wegen (47) kann man also die Differenz (51) wie behauptet abschätzen.

Im Fall $n \geq p$ ergibt sich die Behauptung ebenso aus
$$s_n - c_p^{(k)} = \delta_n + \sum_{\nu=p+1}^{n} \frac{\delta_\nu}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} \{1 - B_{p\nu}^{(k-1)}\} \frac{\delta_\nu}{\nu} \ .$$

Daß sich in (48) die Schranke $C_k(p, n)$ nicht verbessern läßt, zeigen die folgenden Beispiele. Im Fall $n \geq p$ verlangt das Beispiel $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_\nu = 1/\nu$ für $\nu > 1$, bei dem $\delta_\nu = 1$ für alle $\nu \geq 1$ wird, das Gleichheitszeichen. Im Fall $n \leq p$ wähle man hingegen das noch von n abhängige Beispiel
$$a_\nu^{(n)} = \begin{cases} 0 \quad \text{für } \nu = 0 \\ -2 \ \text{ für } \nu = 1 \\ -1/\nu \ \text{ für } 2 \leq \nu \leq n \\ 2 + 1/(n+1) \ \text{ für } \nu = n+1 \\ +1/\nu \ \text{ für } \nu > n+1 \ . \end{cases}$$
Weil bei diesem
$$\delta_\nu = \begin{cases} -1 \ \text{ für } 1 \leq \nu \leq n \\ +1 \ \text{ für } \nu \geq n+1 \end{cases}$$
wird, tritt ebenfalls in (48) das Gleichheitszeichen ein.

Die Schranken $C_k(p, n)$ lassen sich nun auf die Schranken $C_k^*(p, n)$ von Satz 1 leicht zurückführen. Zunächst findet man durch Aufspaltung des Ausdruckes $B_{p\nu}^{(k-1)}\, 1/\nu$ in die beiden Summanden
$$A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{1}{\nu} \qquad \text{und} \quad A_{p\nu}^{(k-1)} \frac{k-1}{p+k}$$
und weiter wegen (17) und (18)
$$F_k(p, n) = \left\{F_{k-1}^*(p, n) + \frac{1}{k}(1 - 2A_{p\,n+1}^{(k)}) - \frac{1}{p+k}\right\} + 2A_{p\,n+1}^{(k)} + \frac{k}{p+k} \ .$$
Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt aber nach (14) gerade $F_k^*(p, n)$ dar. Verfährt man ebenso mit $G_k(p, n)$, so erhält man nach (18)
$$G_k(p, n) = \left\{G_{k-1}^*(p, n) + \frac{1}{k} - \frac{1}{p+k}\right\} + \frac{k}{p+k} \ .$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer stellt jetzt nach (14) gerade $G_k^*(p, n)$ dar. Daher gilt der

Hilfssatz 2⁰. Die Schranken der Hilfssätze 1 und 1⁰ stehen in dem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} F_k(p, n) &= F_k^*(p, n) + 2\, A_{p\,n-1}^{(k)} + \frac{k}{p+k}\,, \\ G_k(p, n) &= G_k^*(p, n) + \frac{k}{p+k}\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Kombiniert man die Formeln (52) mit den Rekursionsformeln (14) für F_k^* und G_k^*, so ergeben sich fast unmittelbar die Rekursionsformeln für F_k und G_k.

Hilfssatz 3⁰. Für die in Hilfssatz 1⁰ auftretenden Schranken (49) *gelten die Rekursionsformeln*

$$F_k(p, n) = F_{k-1}(p, n) + \frac{1}{k}\{1 - 2\, B_{p\,n+1}^{(k-1)}\} - \frac{k-1}{(p+k)(p+k-1)}\,,$$

$$G_k(p, n) = G_{k-1}(p, n) + \frac{1}{k} - \frac{k-1}{(p+k)(p+k-1)}\,.$$

Wegen (52) kann man sogleich die Abschätzungen (24) für F_k^* und G_k^* ausnützen. Beachtet man dabei noch die Abschätzung (28), so erhält man den

Hilfssatz 4⁰. Für ein α, das der Bedingung

$$\frac{n}{p+1} < \alpha < \frac{n+1}{p}$$

genügt, gelten bei $p \to \infty$ bzw. $n \to \infty$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} F_k(p, n) &= f_k^*(\alpha) + 2\,(1-\alpha)^k + O\left(\frac{1}{m}\right), \\ G_k(p, n) &= g_k^*(\alpha) + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \qquad (m = \mathrm{Min}\,(p, n)) \tag{53}$$

Dieselben Überlegungen wie bei Hilfssatz 5 gestatten auch jetzt bei entsprechender Zuordnung von n und p in der Ungleichung (48) des Hilfssatzes 1⁰ den Grenzübergang $n \to \infty$ bzw. $p \to \infty$ zu vollziehen. Auf Grund der Abschätzungen (53) ergibt sich so der

Hilfssatz 5⁰. Unter der gleichen Voraussetzung wie in Hilfssatz 1⁰ gilt die Limesaussage für $n \to \infty$, $p = [n/\alpha]$ bzw. $p \to \infty$, $n = [\alpha\, p]$

$$\overline{\lim}\; |\, c_p^{(k)} - s_n\,| \leq M\, C_k(\alpha)\,, \tag{54}$$

wobei

$$C_k(\alpha) = \begin{cases} f_k(\alpha) = f_k^*(\alpha) + 2(1-\alpha)^k & \textit{für} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ g_k(\alpha) = g_k^*(\alpha) & \textit{für} \quad \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{55}$$

ist und f_k^*, g_k^* *die in (21) angegebene Bedeutung haben.*

Ähnlich wie in Paragraph 1 läßt sich nun der Satz 2 selbst gewinnen, indem man zeigt, daß in der Limesaussage (54) des Hilfssatzes 5^0 rechter Hand die Konstante M durch den Hauptlimes $l = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \mid \delta_m \mid$ ersetzt werden darf.

Im Fall $\alpha \geq 1$ erfordert, wie man unmittelbar erkennt, das Beispiel $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_\nu = 1/\nu$ für $\nu \geq 2$, bei dem δ_ν für alle $\nu \geq 1$ gleich 1 wird, in (10) das Gleichheitszeichen.

Im Fall $\alpha < 1$ wähle man

$$a_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq \lambda_1 \\ -1 - 1/\nu & \text{für} \quad \nu = \lambda_1 + 1 \\ -1/\nu & \text{für} \quad \lambda_{2m-1} + 2 \leq \nu \leq \lambda_{2m} \\ 2 + 1/\nu & \text{für} \quad \nu = \lambda_{2m} + 1 \\ +1/\nu & \text{für} \quad \lambda_{2m} + 2 \leq \nu \leq \lambda_{2m+1} \\ -2 - 1/\nu & \text{für} \quad \nu = \lambda_{2m+1} + 1 \, . \end{cases}$$

Dann wird

$$\delta_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq \nu \leq \lambda_1 \\ -1 & \text{für} \quad \lambda_{2m-1} + 1 \leq \nu \leq \lambda_{2m} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \\ +1 & \text{für} \quad \lambda_{2m} + 1 \leq \nu \leq \lambda_{2m+1} \, , \end{cases}$$

so daß unsere Beispielreihe wegen $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \mid \delta_m \mid = 1$ gewiß die Voraussetzung von Satz 2 erfüllt. Über die positiven Zahlen λ_m wird dabei vorausgesetzt, daß sie monoton über alle Grenzen wachsen und wiederum die Bedingungen (38) und (39) erfüllen.

Der Nachweis dafür, daß bei unserem Beispiel in der Ungleichung (10) das Gleichheitszeichen eintritt, folgt denselben Überlegungen, welche in Paragraph 1 zum Beweis der Ungleichung (40) führten. Es kann hier darum darauf verzichtet werden.

Bei der Untersuchung des Verhaltens von $C_k(\alpha)$ in Abhängigkeit von α $(0 < \alpha < \infty)$ kann man sich wegen $g_k(\alpha) = g_k^*(\alpha)$ für $\alpha \geq 1$ und $f_k(1) = f_k^*(1)$ mit der Betrachtung von

$$f_k(\alpha) = f_k^*(\alpha) + 2(1-\alpha)^k \quad \text{in} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{56}$$

begnügen. Wegen (42) findet man für die Ableitung

$$f_k'(\alpha) = 1/\alpha \, \{1 - 2k(1-\alpha)^{k-1} + 2(k-1)(1-\alpha)^k\} \, . \tag{57}$$

Durch die Substitution $z = 1/(1-\alpha)$ $(1<z<\infty)$ wird

$$\frac{\alpha f_k'(\alpha)}{(1-\alpha)^k} = z^k - 2kz + 2(k-1) \equiv h(z) .$$

Im fraglichen Intervall $0<\alpha<1$ bzw. $1<z<\infty$ stimmen also die beiden Funktionen $f_k'(\alpha)$ und $h(z)$ im Vorzeichen überein. Wegen $h(1) = -1$ und $h'(z) = k(z^{k-1}-2)$ fällt $h(z)$ für $k>1$ zunächst monoton bis zur Stelle des einzigen absoluten Minimums bei $z = \sqrt[k-1]{2}$ und wächst dann monoton, um schließlich für genügend große z positiv zu werden. Wie man leicht sieht, ist $h(z)$ sicher für alle $z>\sqrt[k-1]{2k}$ positiv. Zwischen 1 und $\sqrt[k-1]{2k}$ liegt also gewiß die einzige in unserem Intervall befindliche Nullstelle z_k von $h(z)$, welcher die zwischen 0 und $1-1/\sqrt[k-1]{2k}$ gelegene Nullstelle α_k von $f_k'(\alpha)$ entspricht. Zu diesem Wert α_k gehört das absolute Minimum

$$\tau_k = f_k(\alpha_k) ,$$

welches den günstigsten Schrankenwert in Satz 2 liefert.

Für $k=1$ wird $h(z) = -z$, $f_1 = \log 1/\alpha + 1$, $\tau_1 = f_1(1) = 1$,

Für $k=2$ wird $z_2 = 2+\sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $\tau_2 = f_2(1/\sqrt{2})$

$$= \tfrac{1}{2}\log 2 + 1 = 1{,}346573\ldots ,$$

Für $k=3$ wird $z=2$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\tau_3 = f_3(\frac{1}{2}) = \log 2 + \frac{3}{4} = 1{,}443147$.

Nun untersuchen wir noch das Verhalten der Konstanten τ_k bei wachsendem k. Weil $\tau_{k-1} = f_{k-1}(\alpha_{k-1})$ das Minimum bei festem k darstellt, gilt

$$f_{k-1}(\alpha_k) > f_{k-1}(\alpha_{k-1}) . \tag{58}$$

Die Stelle α_k, an der das Minimum von $f_k(\alpha)$ erreicht wird, genügt nach (57) der Gleichung

$$2(1-\alpha_k)^{k-1} - 2(1-\alpha_k)^k = 1/k\,\{1-2(1-\alpha_k)^k\} . \tag{59}$$

Aus (58) folgt

$$\tau_k - \tau_{k-1} = f_k(\alpha_k) - f_{k-1}(\alpha_{k-1}) > f_k(\alpha_k) - f_{k-1}(\alpha_k) .$$

Nach (56) ist nun weiter

$$f_k(\alpha_k) - f_{k-1}(\alpha_k) = f_k^*(\alpha_k) - f_{k-1}^*(\alpha_k) + 2(1-\alpha_k)^k - 2(1-\alpha_k)^{k-1} .$$

Hier aber muß die rechte Seite den Wert Null haben, weil nach der Rekursionsformel (22) und der Gleichung (59) die Relation

$$f_k^*(\alpha_k) - f_{k-1}^*(\alpha_k) = 1/k\{1 - 2(1-\alpha_k)^k\} = 2(1-\alpha_k)^{k-1} - 2(1-\alpha_k)^k$$

gilt. Folglich wachsen die Konstanten τ_k mit k monoton. Die Folge der τ_k ist aber auch beschränkt. Denn nach Paragraph 1 (44) und (55) ist $f_k(\alpha) < f^*(\beta) + 2$, insbesondere $\tau_k < f^*(\beta_0) + 2$, wenn $\alpha = 1 - e^{-\beta/k}$ gesetzt wird. Die Folge τ_k muß also einen Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \tau^0$ besitzen. Wir werden gleich sehen, daß τ^0 mit der in Satz 2 auftretenden Konstanten τ übereinstimmt.

In Paragraph 1 hatten wir unter der Voraussetzung $\alpha < 1 - e^{-1\sqrt{k}}$ die Abschätzung für große k

$$\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)\left\{f^*(\beta) - \frac{1}{\beta\sqrt{k}}\right\} < f_k^*(\alpha) < f^*(\beta)$$

gefunden. Wählt man jetzt $\alpha = \alpha(k) = 1 - e^{-\beta(k)/k}$ derart, daß $\beta(k)$ für $k \to \infty$ gegen einen endlichen positiven Grenzwert β konvergiert, so strebt $f_k^*(\alpha) \to f^*(\beta)$ und $2(1-\alpha)^k \to 2e^{-\beta}$ also $f_k(\alpha) \to f^*(\beta) + 2e^{-\beta} = f(\beta)$. Bedeutet β_0 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$1 - 2e^{-\beta}(1+\beta) = 0$$

und wird noch $\alpha_k = 1 - e^{-\beta k/k}$ gesetzt, so strebt für $k \to \infty$ wegen

$$\alpha_k f_k'(\alpha_k) = 1 - 2e^{-\beta k}(1 + \beta_k) + o(1) = 0$$

zunächst $\beta_k \to \beta_0$ und daher auch $\tau_k = f_k(\alpha_k) \to f(\beta_0) = \tau$.

Demnach ergibt sich wieder durch den Grenzübergang $k \to \infty$ aus den Tauberschen Konstanten τ_k der Cesàroschen Mittel die Taubersche Konstante τ der Abelschen Mittel.

§ 3. Folgerungen

Für reelle Reihen setze man

$$\begin{array}{llll}
\overline{\lim}\, s_n = S, & \underline{\lim}\, s_n = s, & S - s = \Omega, \\
\overline{\lim}\, c_n^{(k)} = C_k, & \underline{\lim}\, c_n^{(k)} = c_k, & C_k - c_k = \Omega_k, \\
\lim\limits_{k\to\infty} C_k = C_\infty, & \lim\limits_{k\to\infty} c_k = c_\infty, & C_\infty - c_\infty = \Omega_\infty, \\
\overline{\lim\limits_{x\to 1-0}}\, a(x) = A, & \underline{\lim}\, a(x) = a, & A - a = \Omega_A.
\end{array}$$

Bei diesen Werten soll auch $\pm\infty$ zugelassen werden. Dann bestehen ganz allgemein die Beziehungen

$$s \leq c_l \leq c_k \leq c_\infty \leq a \leq A \leq C_\infty \leq C_k \leq C_l \leq S \;,$$
$$\Omega_A \leq \Omega_\infty \leq \Omega_k \leq \Omega_l \leq \Omega \qquad (1 \leq l < k) \;. \tag{60}$$

Umgekehrt kann man nun unter Hinzufügung einer geeigneten Nebenbedingung die Hauptlimites (bzw. das Oszillationsintervall) der Teilsummen durch die Hauptlimites der C_k-Mittel und die Hauptlimites Cesàroscher Mittelbildungen niederer Ordnung durch diejenigen höherer Ordnung abgrenzen.

Nach Satz 1 bzw. Satz 2 hat man nämlich bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend große n bzw. p, etwa für $n > N$, $p > P$ die Ungleichungen

$$s_n - K_k(\alpha) - \varepsilon \leq c_p^{(k)} \leq s_n + K_k(\alpha) + \varepsilon \;, \qquad n = [\alpha p] \;, \tag{61}$$

$$c_p^{(k)} - K_k(\alpha) - \varepsilon \leq s_n \leq c_p^{(k)} + K_k(\alpha) + \varepsilon \;, \qquad p = [n/\alpha] \;, \tag{62}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
K_k(\alpha) &= C_k^*(\alpha) \overline{\lim} \mid m\, a_m \mid \quad \text{bzw.} \quad = C_k(\alpha) \overline{\lim} \mid \delta_m \mid \;, \\
K_k &= \tau_k^* \quad \overline{\lim} \mid m\, a_m \mid \quad \text{bzw.} \quad = \tau_k \quad \overline{\lim} \mid \delta_m \mid \;, \\
K_A(\beta) &= f^*(\beta) \overline{\lim} \mid m\, a_m \mid \quad \text{bzw.} \quad = f(\beta) \overline{\lim} \mid \delta_m \mid \;, \\
K_A &= \tau^* \quad \overline{\lim} \mid m\, a_m \mid \quad \text{bzw.} \quad = \tau \quad \overline{\lim} \mid \delta_m \mid
\end{aligned}$$

gesetzt wird.

Läßt man hier in (62) n eine solche Teilfolge t_m bzw. t'_m der natürlichen Zahlenreihe durchlaufen, daß $s_{t_m} \to S$ bzw. $s_{t'_m} \to s$ strebt[11]), so gibt es sicher einen Index M derart, daß $t_M > N$, $t'_M > N$ und

$$s_{t_m} > S - \varepsilon \quad \text{und} \quad c_p^{(k)} < C_k + \varepsilon \quad \text{für} \quad p = \left[\frac{t_m}{\alpha}\right] > P \;,$$

$$\text{bzw.} \quad s_{t'_m} < s + \varepsilon \quad \text{und} \quad c_p^{(k)} > c_k - \varepsilon \quad \text{für} \quad p = \left[\frac{t'_m}{\alpha}\right] > P$$

gilt, sobald nur $m > M$ gewählt wird. Daher gewinnt man aus (62) die Abschätzungen

$$c_k - K_k(\alpha) - 3\,\varepsilon \leq s \leq S \leq C_k + K_k(\alpha) + 3\,\varepsilon \;.$$

Verfährt man mit (61) ganz entsprechend, so findet man

$$s - K_k(\alpha) - 3\,\varepsilon \leq c_k \leq C_k \leq S + K_k(\alpha) + 3\,\varepsilon \;.$$

Wegen der Willkürlichkeit von $\varepsilon > 0$ erhält man hiernach bei der günstigsten Wahl von α die Beziehungen

---

[11]) S und s als endlich vorausgesetzt; der Fall $S = \infty$ bzw. $s = -\infty$ ist trivial.

$$s - K_k \leq c_k \leq C_k \leq S + K_k , \qquad \Omega_k \leq \Omega + 2 K_k , \tag{63}$$

$$c_k - K_k \leq s \leq S \leq C_k + K_k , \qquad \Omega \leq \Omega_k + 2 K_k . \tag{64}$$

Verwendet man gleichzeitig die Relation (63) mit dem Index k und die Relation (64) mit dem Index $l<k$ oder umgekehrt, so findet man

$$c_l-(K_k+K_l) \leq c_k \leq C_k \leq C_l+(K_k+K_l), \quad \Omega_k \leq \Omega_l+2(K_k+K_l), \tag{65}$$

$$c_k-(K_k+K_l) \leq c_l \leq C_l \leq C_k+(K_k+K_l), \quad \Omega_l \leq \Omega_k+2(K_k+K_l). \tag{66}$$

Die Beziehungen (63), (65) sind vom direkten Typ, (64), (66) dagegen vom Umkehrtyp. Für $K_k = 0$ bzw. $K_l = 0$ liefern (63), (65) einen Teil der Ordnungsrelation (60). Da die Grenzwerte C_∞ und c_∞ existieren, weil die Folge C_k monoton fällt, die Folge c_k monoton wächst und überdies der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = K_\infty = K_A$ vorhanden ist, bestehen die Ungleichungen (63), (64) auch noch für den Index $k = \infty$. Daraus folgt für $K_k = 0$ und $K_l = 0$ sofort, daß neben der direkten Ordnungsrelation

$$s \leq c_l \leq c_k \leq c_\infty \leq C_\infty \leq C_k \leq C_l \leq S \tag{67}$$

auch die Umkehrung

$$c_\infty \leq c_k \leq c_l \leq s \leq S \leq C_l \leq C_k \leq C_\infty , \tag{68}$$

also

$$s = c_l = c_k = c_\infty , \qquad S = C_l = C_k = C_\infty , \qquad \Omega = \Omega_l = \Omega_k = \Omega_\infty$$

gilt. Wir können daher das wesentliche Ergebnis durch folgende kurze Formulierung wiedergeben.

Satz 3. *Genügen die Glieder einer Reihe Σa_n der Tauberschen Bedingung*

$$n a_n = o(1) \quad \textit{oder} \quad \delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_1^n \nu a_\nu = o(1) ,$$

so stimmen die Hauptlimites (bzw. das Oszillationsintervall) ihrer Teilsummen mit den Hauptlimites (bzw. dem Oszillationsintervall) ihrer Cesàro-Mittel (der ganzzahligen Ordnung k, $1 \leq k \leq \infty$) überein.

Dieses Ergebnis stellt erstens eine Verallgemeinerung des Permanenzsatzes des C_k-Verfahrens dar, der darin unter der weiteren Voraussetzung $\Omega = 0$ bzw. $\Omega_l = 0$ mit der Behauptung $\Omega_k = 0$ bzw. $\Omega_\infty = 0$ enthalten ist, und zweitens eine Erweiterung des Tauberschen Umkehrsatzes für das C_k-Verfahren, der sich als Spezialfall unter der weiteren Voraussetzung $\Omega_k = 0$ bzw. $\Omega_\infty = 0$ mit der Behauptung $\Omega = 0$ ergibt.

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß sich mit Hilfe eines leicht beweisbaren Satzes von Ramaswami [6]) und einfacher Abschätzungen für die Differenz $(s_n - a(x))$, — die nicht die allgemeinen Überlegungen des Satzes I bzw. II erfordern, — sowohl die von Herrn Hadwiger herrührenden Erweiterungen des Abelschen Stetigkeitssatzes und des Tauberschen Satzes für Potenzreihen als auch eine Verallgemeinerung des Satzes von Frobenius aus den entsprechenden Sätzen für das C_∞-Verfahren gewinnen lassen.

Nach dem Satze von Ramaswami gilt nämlich $c_\infty = a$, $C_\infty = A$, sobald nur die beiden Grenzwerte c_∞, C_∞ beide endlich sind. Ist dies der Fall, so folgt wegen $K_\infty = K_A$ aus (63) und (64)

$$s - K_A \leq a \leq A \leq S + K_A\ , \qquad \Omega_A \leq \Omega \ + 2\,K_A\ ,$$

$$a - K_A \leq s \leq S \leq A + K_A\ , \qquad \Omega \ \leq \Omega_A + 2\,K_A$$

und aus (65) und (66)

$$c_l - (K_A + K_l) \leq a \leq A \leq C_l + (K_A + K_l),\quad \Omega_A \leq \Omega_l + 2(K_A + K_l)$$

$$a - (K_A + K_l) \leq c_l \leq C_l \leq A + (K_A + K_l),\quad \Omega_l \leq \Omega_A + 2(K_A + K_l)\ .$$

Für $K_A = 0$ und $K_l = 0$ ergeben sich hieraus einerseits die Ordnungsrelationen

$$s \leq a \leq A \leq S\ , \quad c_l \leq a \leq A \leq C_l\ , \quad \Omega_A \leq \Omega\ , \quad \Omega_A \leq \Omega_l\ ,$$

andererseits die Umkehrungen

$$a \leq s \leq S \leq A\ , \quad a \leq c_l \leq C_l \leq A\ , \quad \Omega \leq \Omega_A\ , \quad \Omega_l \leq \Omega_A\ ,$$

so daß

$$s = c_l = a\ , \quad S = C_l = A\ , \quad \Omega = \Omega_l = \Omega_A \tag{69}$$

folgt. Damit haben wir den

Satz 4. *Genügen die Glieder einer Reihe $\Sigma\, a_n$ der Tauberschen Bedingung*

$$n\,a_n = o(1) \quad \textit{oder} \quad \delta_n = \frac{1}{n+1}\sum_1^n \nu\, a_\nu = o(1) \tag{70}$$

und sind ihre C_k-Mittel hinreichend hoher Ordnung beschränkt, so stimmen die Hauptlimites ihrer Teilsummen bzw. C_k-Mittel $(1 \leq k \leq \infty)$ mit den Hauptlimites ihrer Abelschen Mittel überein.

Im Fall des erweiterten Abelschen Stetigkeitssatzes bzw. des Satzes von Frobenius setzen wir s, S bzw. c_l, C_l als endlich voraus. Wegen (70) und (63) sind dann auch c_∞ und C_∞ beide endlich.

Im Fall des Tauberschen Satzes für Potenzreihen hat man wegen $|n a_n| < M$[12]) in geläufiger Weise

$$|s_n - a(x)| < M \left\{ \sum_1^n \frac{1}{\nu}(1 - x^\nu) + \sum_{n+1}^\infty \frac{x^\nu}{\nu} \right\} .$$

Setzt man hier $x = 1 - 1/(n+1)$, so wird nach der Bernoullischen Ungleichung $x^\nu > 1 - \nu/(n+1)$ also

$$|s_n - a(x)| < M \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \frac{\nu}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1-x} \right\} < 2M .$$

Aus der Beschränktheit der Abelschen Mittel und der Bedingung $|n a_n| < M$ folgt daher zunächst die Beschränktheit der Teilsummen, daraus aber wieder nach (63) die Endlichkeit von c_∞ und C_∞. Nunmehr ergeben sich auf Grund des Satzes von Ramaswami die Identitäten (69).

Der Satz 4 stellt sowohl eine Erweiterung des Abelschen Stetigkeitssatzes [7]) (Voraussetzung $\Omega = 0$, Behauptung $\Omega_A = 0$) und des Satzes von Frobenius (Voraussetzung $\Omega_l = 0$, Behauptung $\Omega_A = 0$) dar als auch eine Erweiterung des Tauberschen Satzes [7]) für Potenzreihen (Voraussetzung $\Omega_A = 0$, Behauptung $\Omega = 0$).

[12]) Für die Bedingung $\delta_n = o(1)$ verläuft die entsprechende Abschätzung von $s_n - a(x)$ ganz ähnlich.

SCHRIFTTUM

1. *R. P. Agnew,* Abel transforms of Tauberian series. Duke Mathematical J. 12 (1945) 27—36.
2. *R. P. Agnew,* Abel transforms and partial sums of Tauberian series. Ann. Math. 50 (1949) 110—117.
3. *H. Hadwiger,* Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Comment. Math. Helv. 16 (1944) 209—214.
4. *H. Hadwiger,* Über eine Konstante Tauberscher Art. Revista Hispano-Americana 4ª Serie, 7 (1947) 3—7.
5. *H. Hadwiger,* Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art. Comment. Math. Helv. 20 (1947) 319—322.
6. *Ph. Hartman,* Tauber's theorem and absolute constants. Amer. J. Math. 69 (1947) 599—606.
7. *A. Wintner,* On Taubers theorem. Comment. Math. Helv. 20 (1947) 216—222.
8. *V. Ramaswami,* Some Tauberian theorems on oscillation. J. London Math Soc. 10 (1935) S. 294—308.
9. *V. Garten und K. Knopp,* Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen. Math. Zeitschr. 42 (1937) 365—388, insbesondere 371/372.
10. *H. Delange,* Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes. Premier Mémoire, Ann. scient. Ecole Normale Sup. (3), **67** (1950) 99—160; deuxième Mémoire, ebenda S. 199—242. — Ferner: The converse of Abel's theorem on power series, Ann. Math. 50 (1949) 94—109; Théorèmes taubériens généraux, Comptes rend. séances Acad. Sci. 225 (1947) 28—31; Quelques théorèmes taubériens, ebenda 226 (1948) 1787—1790.

(Eingegangen den 18. Dezember 1950.)