

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	25 (1951)
<b>Artikel:</b>	Sur l'imprimitivité des groupes de substitutions par rapport aux i-uples.
<b>Autor:</b>	Bays, S. Prof.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-20707">https://doi.org/10.5169/seals-20707</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur l'imprimitivité des groupes de substitutions par rapport aux *i*-uples

Par Prof. S. BAYS, Fribourg

## Introduction

Jusqu'ici on a toujours envisagé la transitivité et l'intransitivité dans les groupes de substitutions non seulement par rapport aux éléments, mais aussi par rapport aux couples, aux triples, d'une façon générale par rapport aux *i-uples* des éléments. Par contre la primitivité et l'imprimitivité des mêmes groupes n'ont jamais été considérées, à notre connaissance<sup>1)</sup>, que par rapport aux *éléments*. Il nous a semblé que cette restriction n'avait pas sa raison d'être et qu'il y avait un intérêt à chercher si la primitivité et l'imprimitivité avaient un sens aussi par rapport aux couples, aux triples, etc., des éléments ou des variables du groupe.

Dans un premier travail<sup>2)</sup> nous nous limitions au cas de la primitivité ou de l'imprimitivité par rapport aux *couples*. Nous avons montré qu'il y a une imprimitivité *nécessaire* par rapport aux couples. Un groupe de substitutions  $G$  est primitif ou imprimitif par rapport aux éléments; par rapport aux couples il possède nécessairement certaines répartitions imprimitives; s'il ne possède que ces répartitions fixées, on peut l'appeler encore *primitif* par rapport aux *couples*. D'autre part nous avons constaté aussi, à la différence encore de ce qui se produit dans l'imprimitivité par rapport aux éléments, que les répartitions imprimitives des couples ne vont pas seules; elles vont toujours par *paires* de répartitions imprimitives que nous avons appelées *conjuguées* l'une à l'autre.

---

<sup>1)</sup> Voir par exemple:

W. Burnside: Theory of Groups of finite order, Cambridge, University Press 1911, p. 191.

A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, Springer, 1923, p. 71.

N. Tschebotaröw (traduit par H. Schwerdtfeger): Grundzüge der Galoischen Theorie, Groningen, Noordhoff 1950, p. 33.

<sup>2)</sup> S. Bays: Sur la transitivité et la primitivité des groupes de substitutions, Commentarii math. helv., vol. 22, fasc. 1, 1949, p. 17 à 30.

Mais notre manière de voir dans ce premier travail procédait en somme du même point de vue qui a été utilisé jusqu'ici dans la définition de la primitivité et de l'imprimitivité par rapport aux éléments. Jusqu'ici la définition donnée de l'imprimitivité et de la notion contraire part de l'effet produit et non pas de la cause qui le produit<sup>3)</sup>. A. Speiser dans son livre: „*Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*”, utilise encore la définition dont je parle, mais est le premier à faire observer immédiatement la cause de la répartition imprimitive des éléments, la présence dans le groupe  $G$  d'un sous-groupe propre  $K$ , intermédiaire entre le groupe  $G$  et le diviseur propre  $H$  de  $K$  qui laisse en place un élément du groupe<sup>4)</sup>.

C'est dans ce sens que nous abordons maintenant le présent travail. Nous allons donner la raison des imprimitivités nécessaires par rapport aux couples, que nous avons trouvées dans le premier mémoire; d'une manière générale nous donnerons la raison des imprimitivités nécessaires par rapport aux *i-uples*, qui existent dans le groupe  $G$  du simple fait qu'il est supposé  $n$  fois transitif,  $i \leq n$ . D'autre part nous aurons aussi immédiatement la raison des répartitions imprimitives *conjuguées*,  $2!$  pour les couples,  $i!$  pour les *i-uples*, qui existent pour toute répartition imprimitive des *i-uples*.

**§ 1.** La condition nécessaire et suffisante pour l'imprimitivité d'un groupe de substitutions  $G$  par rapport aux *éléments* est la présence dans le groupe  $G$  d'un sous-groupe intermédiaire  $K$ , entre le groupe  $G$  et le sous-groupe  $H$ , qui laisse en place l'une des variables du groupe<sup>5)</sup>. En effet, soit  $S_1, S_2, \dots, S_l$  la répartition imprimitive en question. Admettons

<sup>3)</sup> Voir Burnside, Speiser et Tschebotaröw aux pages indiquées ou aussi:

E. Netto: *Gruppen und Substitutionentheorie* (Sammlung Schubert LV), Leipzig 1908, p. 142.

E. Netto: *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra*, Leipzig, 1882, p. 77.

<sup>4)</sup> Tschebotaröw donne également, dans un exercice, p. 36 du livre indiqué à la note 1, comme condition nécessaire et suffisante pour l'imprimitivité du groupe transitif  $G$ , la présence du sous-groupe intermédiaire  $K$  dont je parle.

<sup>5)</sup> Dès qu'il est question de l'imprimitivité par rapport aux éléments, ou d'une manière générale par rapport aux *i-uples*,  $i \geq 1$ , il est évident que le groupe est admis *transitif* par rapport aux éléments, ou d'une manière générale par rapport aux *i-uples*. La question de la primitivité ou de l'imprimitivité d'un groupe  $G$  par rapport aux *i-uples*, dans le sens où nous l'entendons ici, ne se pose pas si  $G$  n'est pas au moins  $i$  fois transitif.

Ce paragraphe 1 est le développement de la note 6, § 2, de notre premier mémoire. Son contenu est pris essentiellement, d'après l'observation que nous avons faite à ce sujet dans l'introduction, au § 30 de l'ouvrage de A. Speiser (voir note 1).

que la variable  $x_i$  est contenu dans le système imprimitif  $S_i$ . Le sous-groupe propre  $K$  de  $G$  qui laisse en place le système  $S_i$  a évidemment lui-même, comme sous-groupe propre, le groupe  $H$  qui laisse en place la variable  $x_i$ . C'est la *nécessité* de la condition annoncée.

D'autre part cette condition est aussi *suffisante*. Nous pouvons montrer en effet qu'à chaque diviseur propre intermédiaire  $K$ , entre le groupe  $G$  et le sous-groupe  $H$  qui laisse en place une variable du groupe, par exemple,  $x_1$ , correspond une répartition des éléments de  $G$  en systèmes imprimitifs.

Soit la décomposition du groupe  $G$  relative au diviseur  $H$ :

$$G = H + H\sigma_2 + H\sigma_3 + \dots + H\sigma_n . \quad (1)$$

Le complexe-adjoint  $H\sigma_i$  est l'ensemble des substitutions de  $G$  qui changent la variable  $x_1$  en la même variable  $x_i$ . D'autre part, soit les décompositions de  $K$  par rapport à  $H$  et de  $G$  par rapport à  $K$ :

$$\begin{aligned} K &= H + Hs_2 + Hs_3 + \dots + Hs_l \\ G &= K + Kt_2 + Kt_3 + \dots + Kt_m \end{aligned} \quad (2)$$

On en tire  $Kt_i = Ht_i + Hs_2t_i + Hs_3t_i + \dots + Hs_lt_i$ , c'est-à-dire que chaque complexe-adjoint à  $K$  dans  $G$  est l'ensemble de  $l$  complexes-adjoints à  $H$  dans  $G$ . Ainsi les complexes (1) se répartissent en  $m$  systèmes de  $l$  complexes chacun; et puisqu'une substitution quelconque  $\sigma$  de  $G$  permute entre eux les complexes (2), elle permute entre eux les  $m$  systèmes de  $l$  complexes. Soit  $x_i, x'_i, \dots, x^{(l)}_i$  les variables en lesquelles les  $l$  complexes du système  $Kt_i$  changent  $x_1$  et  $x_k, x'_k, \dots, x^{(l)}_k$ , les variables en lesquelles les  $l$  complexes du système  $Kt_k$  changent  $x_1$ ; par la substitution  $\sigma$  qui change  $Kt_i$  en  $Kt_k$  les variables  $x_i, x'_i, \dots, x^{(l)}_i$  deviennent les variables  $x_k, x'_k, \dots, x^{(l)}_k$ . Ainsi le groupe  $G$  est *imprimitif* par rapport aux éléments et la décomposition (2) fournit la répartition imprimitive correspondante au diviseur  $K$ .

**§ 2.** Cherchons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour l'imprimitivité d'un groupe de substitutions  $G$  par rapport aux *i-uples*,  $i \leq n$ ,  $n$  étant le nombre des variables du groupe. Nous sommes conduits dans ce but à distinguer entre le *i-uple-arrangement* et le *i-uple-combinaison*.

En effet d'une part, jusqu'ici, la primitivité et l'imprimitivité des groupes de substitutions n'étaient envisagées que par rapport aux éléments et la transitivité des mêmes groupes, que par rapport aux *i-uples*-

arrangements<sup>6</sup>). D'autre part la question d'imprimitivité par rapport aux  $i$ -uples,  $i \leq n$ , y compris  $i = 1$ , ne se pose que pour les groupes transitifs par rapport à eux<sup>5</sup>); mais alors que pour les éléments le  $i$ -uple-arrangement et le  $i$ -uple-combinaison coïncident, pour le cas  $i > 1$ , on est amené à distinguer entre le  $i$ -uple-arrangement et le  $i$ -uple-combinaison; nous écrirons dorénavant pour simplifier, entre le  $i$ -uple  $A$  et le  $i$ -uple  $C$ .

Le groupe transitif par rapport aux  $i$ -uples  $A$  est évidemment, du fait même, transitif par rapport aux  $i$ -uples  $C$ , puisque les  $i$ -uples  $C$  font partie des  $i$ -uples  $A$ . Mais l'inverse n'a pas lieu; un groupe peut naturellement être à la fois transitif pour les  $i$ -uples  $C$  et intransitif pour les  $i$ -uples  $A$ . Nous donnons l'exemple immédiat suivant: le groupe cyclique engendré par (012) est transitif pour les trois couples  $C$  01, 12, 20 et intransitif pour les six couples  $A$  01, 12, 20; 02, 10, 21 qui se répartissent par les substitutions du groupe dans les deux systèmes intransitifs que nous venons d'écrire.

Ainsi le cas *général* est celui du groupe transitif par rapport aux  $i$ -uples  $A$ ; le cas du groupe transitif par rapport aux  $i$ -uples  $C$  sans l'être par rapport aux  $i$ -uples  $A$  est le cas *restreint*. Que nous nous placions maintenant dans le cas général ou dans le cas restreint, le raisonnement est exactement le même. La condition nécessaire et suffisante pour l'imprimitivité du groupe  $G$  par rapport aux  $i$ -uples est la présence dans le groupe  $G$  d'un sous-groupe *intermédiaire*<sup>7</sup>)  $K$ , entre le groupe  $G$  et le sous-groupe  $H$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $A$ , respectivement le  $i$ -uple  $C$ ,  $x_1 x_2 \cdots x_i$ .

Nous ferons le raisonnement pour les deux cas en laissant simplement tomber la distinction  $A$  et  $C$ , et en raccourci puisqu'il est analogue à celui du § 1 pour les éléments. Soit  $H$  le diviseur de  $G$  qui laisse invariant le  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$ . Admettons la présence dans le groupe  $G$  d'un sous-groupe  $K$  intermédiaire entre  $H$  et  $G$ . Les substitutions de  $K$  changent le  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$  en un certain nombre de  $i$ -uples différents; ce nombre  $l$  est l'indice de  $H$  dans  $K$  donné par la décomposition:

$$K = H + Hs_2 + Hs_3 + \cdots + Hs_l \quad (1)$$

Ces  $l$   $i$ -uples différents forment pour leur compte un système *clos* et *transitif*  $S$  pour les substitutions de  $K$ . D'autre part la décomposition de  $G$  par rapport à  $K$  donne:

---

<sup>6</sup>) Voir encore entre autres les auteurs déjà cités (notes 1 et 3) aux chapitres sur la transitivité des groupes. Ainsi par exemple: Netto, Gruppen und Substitutionentheorie, p. 123; Speiser, p. 65, etc.

<sup>7</sup>) Par le mot «intermédiaire» nous entendons, une fois pour toutes, comme au § 1, un diviseur propre de  $G$  dans lequel  $H$  est lui-même un diviseur propre.

$$G = K + Kt_2 + Kt_3 + \cdots + Kt_m \quad (2)$$

et du fait de cette décomposition, les substitutions de  $G$  répartissent les  $A_n^i(C_n^i)$   $i$ -uples des  $n$  variables  $x_1$  à  $x_n$  en  $m$  systèmes  $S_1, S_2, \dots, S_m$  de  $l$   $i$ -uples chacun, imprimitifs par rapport aux substitutions de  $G$ , parce que les substitutions de  $G$  permutent entre eux les complexes (2). Ainsi la présence du groupe intermédiaire  $K$  entre  $G$  et  $H$  est bien la condition suffisante, mais aussi nécessaire (voir § 1) pour l'imprimitivité de  $G$  par rapport aux  $i$ -uples et la décomposition (2) fournit la répartition imprimitive correspondante au diviseur  $K$ .

**§ 3.** Dans l'imprimitivité par rapport aux éléments, la présence du groupe intermédiaire  $K$  est fonction uniquement de la constitution du groupe  $G$ . Dans l'imprimitivité par rapport aux  $i$ -uples, la présence de certains groupes intermédiaires  $K$  est indépendante du groupe  $G$  en question. Il suffit d'admettre la transitivité de  $G$  du cas général (§ précédent), par rapport aux  $i$ -uples  $A$ ; il en résulte sans autre la présence de ces groupes intermédiaires  $K$  et par suite l'existence de répartitions imprimitives nécessaires des  $i$ -uples par les substitutions du groupe  $G$ . Ce sont ces répartitions imprimitives que nous avons déjà appelées nécessaires pour les *couples* dans notre premier travail.

La raison de la présence de ces groupes intermédiaires  $K$ , indépendante de la constitution du groupe  $G$ , est double. Une partie de ces groupes résulte de l'observation suivante. Soit le groupe  $G$  transitif par rapport aux  $i$ -uples  $A$ ; il est par le fait transitif par rapport aux  $i$ -uples  $C$ . D'une part le diviseur  $H$  de  $G$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $A$   $x_1x_2 \cdots x_i$  est le même que celui qui laisse en place chacune des variables  $x_1, x_2, \dots, x_i$  séparément. Il est de degré  $n - i$ ; ses substitutions ne contiennent que les autres variables  $x_{i+1}$  à  $x_n$ . D'autre part le diviseur  $K$  de  $G$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $C$ ,  $x_1x_2 \cdots x_i$ , contient le diviseur  $H$ ; en effet les substitutions de  $H$  laissent en place le  $i$ -uple  $C$ . Donc si nous admettons la transitivité par rapport aux  $i$ -uples  $A$ , le groupe  $K$  existe nécessairement et il est intermédiaire entre  $G$  et son diviseur  $H$ . Il en est d'ailleurs de même de chacun des diviseurs de  $K$  qui sont des multiples propres de  $H$ .

L'autre partie de ces groupes intermédiaires est fournie par les groupes suivants. Soit  $H_k$  le diviseur de  $G$  qui laisse en place la variable  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, i$ ;  $H_{kl}$  le diviseur de  $G$  qui laisse en place les deux variables  $x_k$  et  $x_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, i$ ,  $k < l$ ; d'une manière générale  $H_{k_1 \dots r}$  le diviseur de  $G$  qui laisse en place les variables  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, i$ ,  $k < k_1 < \dots < r$ , les variables étant ainsi différentes et leur nombre

limité à  $i - 1$ . Chacun de ces groupes contient le diviseur  $H$  de  $G$  qui laisse en place les  $i$  variables  $x_1$  à  $x_i$ , et comme diviseur *propre*; en effet même ceux de la dernière catégorie sont plus étendus que  $H$ .

Montrons le pour l'un d'eux.  $H_{12} \dots i-1$  par exemple est l'ensemble des substitutions de  $G$  qui laissent en place  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ . Or la transitivité de  $G$  par rapport aux  $i$ -uples  $A$  exige qu'il contienne au moins une substitution qui change  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i$  en  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_k$ ,  $k > i$ . Une telle substitution appartient au groupe  $H_{12} \dots i-1$ , mais non au groupe  $H$ . Donc le premier groupe est plus étendu que le second.

Ainsi ces groupes  $H_{k_l \dots r}$  dont le nombre est:

$${i \choose 1} + {i \choose 2} + \dots + {i \choose i-1} = 2^i - 2 = 2^{i-1}$$

sont tous des groupes intermédiaires entre  $H$  et  $G$  et chacun donne lieu à une répartition imprimitive nécessaire des  $i$ -uples  $A$ . Ces répartitions sont en tout cas différentes entre elles pour les  $H$  avec nombres d'indices différents et aussi différentes des répartitions correspondantes au groupe  $K$  et diviseurs de  $K$  de l'alinéa précédent. On pourrait sans doute en donner la raison générale; elle apparaîtra plus simplement dans les deux applications qui vont être faites.

Auparavant il est utile de nous rendre compte plus exactement de la constitution de ces groupes. Le groupe  $H_{k_l \dots r}$  est l'ensemble des substitutions de  $G$  qui laissent en place les variables  $x_k, x_l, \dots, x_r$ ; il ne dépend que de la constitution de  $G$ . Le groupe  $K$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $C, x_1 x_2 \dots x_i$ , ne peut être formé que de substitutions contenant, à côté des cycles des variables  $x_{i+1}$  à  $x_n$  constituant en particulier les substitutions de  $H$ , les cycles des substitutions du groupe symétrique des variables  $x_1$  à  $x_i$ . En effet le  $i$ -uple  $C, x_1 x_2 \dots x_i$ , ne peut être changé en lui-même que par les substitutions du groupe symétrique  $S$  des variables  $x_1$  à  $x_i$ . Si nous notons les substitutions de ce groupe symétrique  $S$  par  $s_1 = J$ <sup>8)</sup>,  $s_2, \dots, s_r$ ,  $r = i!$ , la décomposition de  $K$  par rapport à  $H$  a nécessairement la forme:

$$K = H + Hs_2\sigma_2 + \dots + Hs_r\sigma_r = H \{ J + s_2\sigma_2 + \dots + s_r\sigma_r \} \quad (3)$$

où  $\sigma_1 = J$ ,  $\sigma_2, \dots, \sigma_r$  sont, comme celles de  $H$ , des substitutions où entrent uniquement les variables  $x_{i+1}$  à  $x_n$ . Ces substitutions  $\sigma_1 = J, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  sont seulement telles que pour chaque complexe des  $s_i$  qui est un sous-groupe du groupe symétrique  $S$ , l'ensemble des  $s_i \sigma_i$  correspondants est un sous-groupe du groupe  $\{J + s_2\sigma_2 + \dots + s_r\sigma_r\}$ ,

---

<sup>8)</sup> Nous notons par  $J$  majuscule la substitution-identité.

qui par produit direct avec  $H$  donne le groupe  $K$ . Cela résulte sans autre du sens des complexes de la décomposition (3) ; en effet le complexe  $Hs_i\sigma_i = s_iH\sigma_i$  est l'ensemble des substitutions de  $K$ , c'est-à-dire de  $G$ , qui changent le  $i$ -uple  $A$ ,  $x_1x_2 \cdots x_i$ , dans le  $i$ -uple qui en résulte par la permutation faite sur  $x_1, x_2, \dots, x_i$  par  $s_i$ .

**§ 4. Application aux couples.** Dans notre premier exposé nous avons donné comme nécessaires pour les couples les répartitions imprimitives suivantes,  $a, b, c, \dots, l$  étant alors les variables du groupe  $G$ <sup>9)</sup>:

$\alpha)$  la répartition :

$$(ab, ba), (cd, dc), \dots,$$

$ab, cd, \dots$  étant simplement les couples  $A$  différents. On peut la noter par son système général  $(ab, ba)$ .

$\beta)$  les deux répartitions :

$$\begin{aligned} & (ab, ac, \dots, al), (ba, bc, \dots, bl), \dots, (la, lb, \dots, lk); \\ & (ba, ca, \dots, la), (ab, cb, \dots, lb), \dots, (al, bl, \dots, kl). \end{aligned}$$

On peut les noter par leur système général  $(ax)$  et  $(xa)$  en convenant que pour chaque variable  $a$ ,  $x$  parcourt toutes les autres variables.

Nous retrouvons immédiatement ces trois répartitions imprimitives par les deux sortes de groupes intermédiaires  $K$  donnés au § précédent. Le diviseur  $K$  de  $G$  qui laisse en place le couple  $C$ ,  $x_1x_2$ , est d'après le § précédent :

$$K = H + H(x_1x_2)\sigma_2 = H \{ J + (x_1x_2)\sigma_2 \} \quad (1)$$

où  $\sigma_2$  est une substitution des variables  $x_3$  à  $x_n$ . Ce groupe n'a pas de diviseur propre autre que  $H$  ; il est ainsi le seul groupe intermédiaire de la première sorte qui entre ici en ligne de compte. La décomposition de  $G$  par rapport à  $K$  :

$$G = K + Kt_2 + Kt_3 + \cdots + Kt_m \quad (2)$$

donne immédiatement la répartition imprimitive ( $\alpha$ ) ci-dessus. En effet les substitutions des complexes  $K, Kt_2, \dots, Kt_m$  changent le couple  $C$ ,  $x_1x_2$ , dans les  $\frac{n(n-1)}{2}$  couples  $C$  des  $n$  variables  $x_1$  à  $x_n$ ; ainsi  $m = \frac{n(n-1)}{2}$

<sup>9)</sup> Nous gardons cette notation de notre premier travail et nous la continuerons encore dans le cas des triples au § suivant, parce qu'elle est plus simple, surtout si l'on veut exprimer, comme nous le ferons, les répartitions imprimitives uniquement par leur système général.

et d'après (1) on a directement les  $n(n - 1)$  couples  $A$  des variables répartis en  $\frac{n(n-1)}{2}$  systèmes de la forme  $(ab, ba)$ .

Les groupes intermédiaires  $K$  de la seconde sorte sont ici  $H_1$  et  $H_2$ ; ils donnent immédiatement les répartitions imprimitives  $(\beta)$  ci-dessus. En effet  $H_1$  et  $H_2$  sont les diviseurs de  $G$  qui laissent en place respectivement  $x_1$  et  $x_2$ . La décomposition de  $H_1$  par rapport à  $H$ , correspondant toujours à la décomposition (1) du § 2, est maintenant:

$$H_1 = H + Hs_2 + Hs_3 + \cdots + Hs_l . \quad (1)$$

Les complexes  $H, Hs_2, \dots, Hs_l$  changent  $x_2$  dans les  $n - 1$  variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ; ainsi  $l = n - 1$ . La décomposition de  $G$  par rapport à  $H_1$ :

$$G = H_1 + H_1 t_2 + H_1 t_3 + \cdots + H_1 t_m \quad (2)$$

où  $m = n$ , puisque cette fois les complexes de droite changent  $x_1$  en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , répartit donc en transformant le couple  $x_1 x_2$  par les substitutions de (2), les  $n(n - 1)$  couples  $A$  des  $n$  variables en  $n$  systèmes imprimitifs de la forme:

$$(x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_n), (x_2 x_1, x_2 x_3, \dots, x_2 x_n), \dots, (x_n x_1, x_n x_2, \dots, x_n x_{n-1}) .$$

C'est avec la nouvelle notation la première répartition imprimitive  $(\beta)$  ci-dessus.

De même la décomposition de  $H_2$  relative à  $H$  donne

$$H_2 = H + Hs_2 + Hs_3 + \cdots + Hs_{n-1}$$

où cette fois les complexes de droite changent  $x_1$  en  $x_1, x_3, \dots, x_n$ . Les complexes de droite de la décomposition de  $G$  relative à  $H_2$  changent  $x_2$  en  $x_2, x_1, \dots, x_n$  et on a ainsi, en partant toujours du couple  $x_1 x_2$ , la répartition:

$$(x_1 x_2, x_3 x_2, \dots, x_n x_2), (x_2 x_1, x_3 x_1, \dots, x_n x_1), \dots, (x_1 x_n, x_2 x_n, \dots, x_{n-1} x_n) .$$

C'est avec la nouvelle notation la seconde répartition imprimitive  $(\beta)$  ci-dessus.

**§ 5. Application aux triples.** En partant de considérations immédiates, comme nous l'avons fait dans notre premier exposé pour les couples, on trouve d'abord comme répartitions imprimitives *nécessaires* pour les

triples, les répartitions suivantes,  $a, b, c, \dots, l$  étant toujours les éléments du groupe  $G$  et en ne notant plus que le système général de la répartition :

$\alpha)$  la répartition

$$(abc, acb, bac, bca, cab, cba) \quad (1)$$

Elle correspond à la répartition  $(ab, ba)$  pour les couples. Mais cette fois, elle n'est plus seule. Le système général de la répartition précédente se fractionne de différentes manières en systèmes toujours imprimitifs :

$\alpha a)$  la répartition en systèmes de trois triples :

$$(abc, bca, cab), (acb, bac, cba) \quad (2)$$

$\alpha b)$  les trois répartitions en systèmes de deux triples :

$$(abc, acb), (bac, bca), (cab, cba) \quad (3)$$

$$(abc, bac), (acb, cab), (bca, cba) \quad (4)$$

$$(abc, cba), (acb, bca), (bac, cab) . \quad (5)$$

Il est immédiat maintenant que ces répartitions correspondent au sous-groupe  $K$  de  $G$ , qui laisse en place le triple  $C$ ,  $x_1 x_2 x_3$ , et à ses quatre diviseurs qui sont des multiples propres du groupe  $H$ , qui laisse en place le triple  $A$ ,  $x_1 x_2 x_3$  (§ 3). Le groupe  $K$  est le produit direct de  $H$  par les substitutions du groupe [voir la décomposition (3) (§ 3)] :

$$J + (x_1 x_2) \sigma_2 + (x_1 x_3) \sigma_3 + (x_2 x_3) \sigma_4 + (x_1 x_2 x_3) \sigma_5 + (x_1 x_3 x_2) \sigma_6 .$$

Les diviseurs propres de  $K$  plus étendus que  $H$  sont :

$$\begin{aligned} H\{J + (x_1 x_2) \sigma_2\} , \quad H\{J + (x_1 x_3) \sigma_3\} , \quad H\{J + (x_2 x_3) \sigma_4\} , \\ H\{J + (x_1 x_2 x_3) \sigma_5 + (x_1 x_3 x_2) \sigma_6\} . \end{aligned}$$

Nous montrerons pour l'un d'eux seulement, par exemple pour le troisième,  $H\{J + (x_2 x_3) \sigma_4\}$ , qu'il correspond bien à l'une des trois répartitions  $(\alpha b)$  ci-dessus. Sa décomposition par rapport à  $H$  est donc :

$$H\{J + (x_2 x_3) \sigma_4\} = H + H(x_2 x_3) \sigma_4 = \bar{H} .$$

La décomposition de  $G$  par rapport à  $\bar{H}$  est à son tour :

$$G = \bar{H} + \bar{H}t_2 + \bar{H}t_3 + \cdots + \bar{H}t_m \quad \text{avec} \quad m = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} .$$

Ainsi les substitutions des complexes  $\bar{H}, \bar{H}t_2, \dots, \bar{H}t_m$  changent bien le triple de départ  $x_1x_2x_3$  dans les triples suivants successifs, répartis en  $m$  systèmes imprimitifs de deux triples chacun<sup>10)</sup>:

$$(x_1x_2x_3, x_1x_3x_2), (x_2x_1x_3, x_2x_3x_1), (x_3x_1x_2, x_3x_2x_1), (x_1x_2x_4, x_1x_4x_2), \dots$$

C'est avec la nouvelle notation la répartition imprimitive (3) ci-dessus.

On trouve ensuite

$$\beta a) \text{ les trois répartitions } (axy), (xay), (xya) \quad (6)$$

dans lesquelles nous entendons, conformément à ce qui a été dit au § 4 pour les couples, par  $(axy)$ , le système général de la répartition dans laquelle, pour chaque variable  $a$ , le couple  $xy$  parcourt chaque fois tous les arrangements des deux autres variables;

$$\beta b) \text{ les trois répartitions } (abx), (axb), (xab) \quad (7)$$

dans lesquelles nous entendons maintenant par  $(abx)$  le système général de la répartition dans laquelle, pour chaque couple-arrangement  $ab$ , la variable  $x$  parcourt chaque fois les  $n - 2$  variables restantes.

De nouveau il est immédiat que ces répartitions correspondent aux groupes intermédiaires de la seconde sorte, qui sont ici (§ 3):  $H_1, H_2, H_3$  qui laissent en place respectivement les variables  $x_1, x_2, x_3; H_{12}, H_{13}, H_{23}$  qui laissent en place respectivement les deux variables des couples  $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$ . Nous le montrerons pour l'un des  $H_i$  et pour l'un des  $H_{ik}$ .

Soit  $H_2$  par exemple; la décomposition de  $H_2$  par rapport à  $H$  donne:

$$H_2 = H + Hs_2 + Hs_3 + \dots + Hs_l \quad \text{avec} \quad l = (n - 1)(n - 2).$$

En effet toutes les substitutions représentées par le membre de droite laissent invariante  $x_2$ ;  $H$  est le groupe de ces substitutions qui laissent invariantes à la fois  $x_1$  et  $x_3$ ; les complexes suivants  $Hs_2, Hs_3, \dots, Hs_l$  changent le couple  $A, x_1x_3$ , dans les  $l = (n - 1)(n - 2)$  couples  $A$  des variables  $x_1, x_3, \dots, x_n$ . Maintenant la décomposition de  $G$  par rapport à  $H_2$  donne:

$$G = H_2 + H_2t_2 + H_2t_3 + \dots + H_2t_m \quad \text{avec} \quad m = n$$

<sup>10)</sup> Pour faire apparaître en premier les trois systèmes particuliers provenant du système général  $(x_1x_2x_3, x_1x_3x_2, x_2x_1x_3, x_2x_3x_1, x_3x_1x_2, x_3x_2x_1)$  il suffit de prendre  $t_2 = (x_1x_2)$  et  $t_3 = (x_1x_3)$ .

et fournit ainsi; en appliquant au triple de départ  $x_1x_2x_3$  les substitutions de chaque complexe  $H_2, H_2t_2, H_2t_3, \dots, H_2t_n$ , les  $n(n-1)(n-2)$  triples  $A$  des  $n$  variables répartis en  $n$  systèmes de  $(n-1)(n-2)$  triples chacun. Le premier de ces systèmes résultant du complexe  $H_2$  est de la forme  $(x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_3x_2x_4, \dots, x_{n-1}x_2x_n)$ ; l'élément  $x_2$  reste en place associé aux  $(n-1)(n-2)$  couples  $A$  des variables  $x_1, x_3, \dots, x_n$ . En choisissant pour  $t_2$  une substitution qui change  $x_2$  en  $x_1$ , le second de ces systèmes, résultant du complexe  $H_2t_2$ , sera de la forme  $(x_2x_1x_3, x_3x_1x_2, x_2x_1x_4, \dots, x_{n-1}x_1x_n)$ ; l'élément  $x_1$  reste à la place de  $x_2$  associé aux  $(n-1)(n-2)$  couples  $A$  des variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Et ainsi de suite. Avec le sens que nous avons donné sous  $(\beta a)$  à la notation  $(xy)$ , cette notation signifie exactement le système général de la répartition imprimitive que nous venons d'obtenir.

Soit ensuite  $H_{23}$  par exemple. La décomposition de  $H_{23}$  par rapport à  $H$  donne:

$$H_{23} = H + Hs_2 + Hs_3 + \dots + Hs_l \quad \text{avec } l = n - 2.$$

En effet toutes les substitutions représentées par le membre de droite laissent invariantes  $x_2$  et  $x_3$ . Les complexes  $H, Hs_2, \dots, Hs_l$  changent  $x_1$  respectivement en  $x_1, x_4, \dots, x_n$ ; donc  $l = n - 2$ . Ensuite la décomposition de  $G$  par rapport à  $H_{23}$  donne:

$$G = H_{23} + H_{23}t_2 + H_{23}t_3 + \dots + H_{23}t_m \quad \text{avec } m = n(n-1).$$

En effet le groupe  $H_{23}$  change le couple  $A, x_2x_3$ , en lui-même; les autres complexes  $H_{23}t_2, \dots, H_{23}t_m$  doivent changer le même couple dans les  $n(n-1)$  couples  $A$  des variables  $x_1$  à  $x_n$ . On aura ainsi, en appliquant au triple  $x_1x_2x_3$  les substitutions de chaque complexe, les  $n(n-1)(n-2)$  triples  $A$  des variables répartis en  $n(n-1)$  systèmes de  $n-2$  triples chacun. En choisissant pour  $t_2, t_3, \dots$ , respectivement des substitutions qui changent  $x_2x_3$  en  $x_3x_2, x_2x_3$  en  $x_2x_4$ , etc., on obtient les systèmes:

$$(x_1x_2x_3, x_4x_2x_3, \dots, x_nx_2x_3), (x_1x_3x_2, x_4x_3x_2, \dots, x_nx_3x_2), \\ (x_1x_2x_4, x_3x_2x_4, \dots, x_nx_2x_4), \dots$$

Avec le sens que nous avons donné sous  $(\beta b)$  à la notation  $(xy)$ , elle signifie encore exactement le système général de la répartition imprimitive que nous venons d'obtenir.

**§ 6.** Il reste maintenant, comme nous l'avons annoncé déjà dans l'introduction, un point encore de notre premier exposé dont nous devons

donner la raison. Nous avons trouvé au § 2, p. 22, de cet exposé, que s'il existe une répartition imprimitive des couples:

$$(ab, cd, \dots), (a'b', c'd', \dots), \dots$$

il existe par le fait même la répartition suivante correspondante:

$$(ba, dc, \dots), (b'a', d'c', \dots), \dots$$

Nous avons appelé *conjuguées* ces deux répartitions imprimitives des couples qui ne vont pas l'une sans l'autre, et qui peuvent naturellement coïncider entre elles. La répartition nécessaire ( $\alpha$ ), voir § 4, est conjuguée à elle-même; les deux répartitions nécessaires ( $\beta$ ) sont conjuguées l'une de l'autre.

La raison générale de ce fait est maintenant simple. Soit le groupe transitif  $G$  par rapport aux  $i$ -uples  $A$  et le diviseur  $H$  de  $G$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $A$ :  $x_1 x_2 \cdots x_i$ . Chaque groupe intermédiaire  $K$  entre les groupes  $G$  et  $H$  donne une répartition imprimitive  $R$  des  $i$ -uples  $A$ , produite par les décompositions (1) et (2) du § 2, partant du  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$ , que l'on peut appeler pour cette raison le  $i$ -uple *de base* de la répartition  $R$ . En effet, en se rapportant à ces décompositions, les substitutions du groupe  $K$  changent le  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$  dans les  $l$   $i$ -uples du premier système  $S_1$ , les substitutions du complexe  $Kt_2$  changent le  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$  dans les  $l$   $i$ -uples du second système  $S_2$ , etc., de la répartition  $R$ . Cette répartition  $R$  est ainsi engendrée du  $i$ -uple de base  $x_1 x_2 \cdots x_i$  par les substitutions de  $G$ .

Maintenant le diviseur  $H$  qui laisse en place le  $i$ -uple  $A$ :  $x_1 x_2 \cdots x_i$  et par suite séparément chacune des variables  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , est aussi celui qui laisse en place chacun des  $i!$   $i$ -uples qui proviennent du premier par les permutations des  $i$  variables. Par conséquent le même groupe intermédiaire  $K$  entre  $H$  et  $G$  donne lieu sans autre à  $i!$  répartitions imprimitives, ayant chacune pour *i-uple de base* l'une des permutations du  $i$ -uple  $x_1 x_2 \cdots x_i$ . Ces  $i!$  répartitions imprimitives ont le même nombre de systèmes et le même nombre de  $i$ -uples par système, puisque les décompositions de  $H$  et  $K$ , § 2, sont les mêmes; elles peuvent cependant être différentes ou non par le contenu des systèmes. Chacune est dans la même situation par rapport aux autres; nous les dirons *conjuguées* entre elles.

Pour les répartitions imprimitives nécessaires des triples trouvées au § 5, les répartitions (1) et (2) sont conjuguées à elles-mêmes, les répartitions (3), (4) et (5) sont conjuguées deux à deux, c'est-à-dire les  $3! = 6$  conjuguées de chacune d'elles (elle-même comprise) donnent deux fois

l'ensemble des trois répartitions ; les trois répartitions (6) sont également conjuguées deux à deux et de même les trois répartitions (7). On le voit immédiatement pour les répartitions (1) à (5) : il suffit de faire sur le triple de base  $abc$  les permutations des trois lettres et chaque fois sur les triples suivants les permutations correspondantes ; avec la notation abrégée des répartitions (6) et (7) et le sens que nous avons donné à ces expressions  $(axy)$  ou  $(abx)$ , on voit aussi immédiatement par exemple que les 6 conjuguées de la répartition  $(axy)$  donnent deux fois l'ensemble  $(axy)$ ,  $(xay)$ ,  $(xya)$ .

Il est évident maintenant que ces répartitions imprimitives *conjuguées* sont en relation immédiate avec la question des groupes *transformés*. Ainsi par exemple les répartitions de triples (6) conjuguées deux à deux sont produites par les groupes  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  (§ 5), qui sont les transformés l'un de l'autre par les substitutions de  $G$ . Mais cette dépendance entre les répartitions conjuguées et les groupes transformés n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser à première vue ; elle fera l'objet d'un travail ultérieur.

### Conclusion

Jusqu'ici la définition du groupe imprimitif est toujours donnée par l'existence d'une répartition imprimitive ; il nous semble plus indiqué de la donner par la cause de cette répartition : la présence d'un sous-groupe intermédiaire  $K$  entre le groupe  $G$  et le diviseur  $H$  qui laisse en place un élément ou d'une manière générale un  $i$ -uple des éléments du groupe. Le groupe *primitif* par rapport aux *éléments* est celui qui ne possède aucun sous-groupe intermédiaire entre lui et son diviseur qui laisse en place l'un de ses éléments. Le groupe *primitif* par rapport aux  *$i$ -uples* est celui qui ne possède, en dehors des sous-groupes nécessaires, indépendants de la constitution du groupe total et desquels nous avons établi l'existence au § 3, aucun autre sous-groupe intermédiaire entre lui et son diviseur qui laisse en place un  $i$ -uple  $A$  de ses éléments. Nous avons trouvé dans notre premier mémoire des groupes primitifs et des groupes imprimitifs par rapport aux couples ; il existe évidemment des groupes primitifs et des groupes imprimitifs par rapport aux  $i$ -uples,  $i > 2$ . Remarquons enfin en terminant que seule l'imprimitivité par rapport aux éléments considérée jusqu'ici, ne connaît ni les répartitions imprimitives nécessaires, ni les répartitions imprimitives conjuguées.

(Reçu le 30 novembre 1950.)