Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos.
Autor: Siebenthal, Jean de
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20705

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos

Par JEAN DE SIEBENTHAL, Lausanne

Introduction

1. L'étude d'un groupe G ne peut s'achever si l'on n'en connaît pas les sous-groupes. Lorsque G est un groupe de Lie, on peut se proposer de rechercher tous les sous-groupes continus connexes de ce groupe ; en se plaçant au point de vue local, S. Lie a montré qu'on peut se ramener à un problème purement algébrique, théoriquement résoluble dès qu'on connaît les constantes de structure de G[1]). De façon plus précise, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une base de l'anneau $R(G)$ du groupe G, avec la loi de composition $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} X_k$, on peut trouver tous les sous-groupes connexes de G qui sont des groupes de Lie au sens local en déterminant tous les sous-anneaux de $R(G)$, c'est-à-dire tous les sous-espaces R de $R(G)$ tels que $X, Y \in R$ entraînent $[X, Y] \in R$. Ainsi posé, le problème n'est pas facile à aborder.

Deux simplifications s'imposent d'emblée : d'abord, il suffit de chercher un sous-groupe dans chaque classe de sous-groupes conjugués ; ensuite, on peut se borner à la recherche des plus grands sous-groupes de G, cette expression désignant ici les sous-groupes propres connexes qui ne sont pas contenus dans un autre sous-groupe propre connexe de G.

2. Le problème envisagé est le suivant

(a) *Déterminer les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos* (ou compact).

Tout sous-groupe continu d'un groupe de Lie étant un groupe de Lie[2]), on peut appliquer la méthode algébrique décrite ci-dessus, et déterminer

---

[1]) *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen, t. I, p. 209 (Teubner, Leipzig 1888).

[2]) *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Mém. Sc. Math., t. 42, 1930, p. 22).

tous les sous-anneaux R de $R(G)$. Cela fait, il reste à examiner si le sous-groupe fermé connexe engendré par R a même dimension que R (voir chapitre II, § 4).

Le problème algébrique basé sur les constantes de structure peut à son tour être réduit à un problème plus simple ; en effet, le groupe clos G supposé semi-simple est déterminé localement par ses paramètres angulaires[3]), qui sont $2m$ formes linéaires $\pm\mu_1(x), \ldots, \pm\mu_m(x)$, x étant un point d'un espace euclidien R^l à l dimensions, dont la métrique est donnée par la forme quadratique $\Sigma[\mu_i(x)]^2$; l'entier l est le rang du groupe. La figure constituée par l'espace R^l et par les plans $\mu_i(x) \equiv 0$ (mod. 1) est le diagramme de G[10]) ; le diagramme R^h d'un sous-groupe est alors un sous-diagramme du précédent. A ce point de vue, le problème s'énonce ainsi

(b) *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-espace linéaire de R^l soit le support d'un sous-diagramme représentant un sous-groupe fermé connexe.*

Il convient de remarquer qu'un même sous-diagramme peut représenter plusieurs sous-groupes, naturellement isomorphes, dont il serait intéressant de savoir s'ils sont conjugués. Le groupe G n'est pas distingué des groupes clos qui lui sont localement isomorphes.

On peut donner au problème (b) un aspect plus intuitif ; soit $\vec{\mu}_i$ le vecteur de R^l défini par $\mu_i(x) = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{x}$. Il existe dans l'ensemble $\pm\vec{\mu}_1, \pm\vec{\mu}_2, \ldots, \pm\vec{\mu}_m$ l vecteurs fondamentaux $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$ $(\vec{\varphi}_i \cdot \vec{\varphi}_j \leq 0)$ qui déterminent le diagramme et l'anneau $R(G)$; ils vérifient certaines conditions simples énoncées par *van der Waerden*[3]). Les h vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$, fondamentaux pour le sous-groupe étudié, sont des combinaisons linéaires de $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$ qui vérifient encore les conditions citées. L'énoncé correspondant est

(c) *Soient $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \ldots, \vec{\varphi}_l$ l vecteurs fondamentaux du groupe clos G ; trouver h vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ ayant les propriétés suivantes*

(1) *$\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$.*

(2) *$\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ forment la figure fondamentale d'un groupe clos.*

---

[3]) *van der Waerden*, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen (Math. Zeitschr., t. 37, 1933, p. 448).

(3) *Il existe dans G un sous-groupe fermé connexe admettant* $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ *comme figure fondamentale.*

3. A ma connaissance, le problème posé en (a) n'a jamais été abordé systématiquement au sens indiqué en (b) ou (c). Cela n'empêche nullement l'existence d'un grand nombre d'énoncés sur les sous-groupes des groupes de Lie clos ou non ; ces énoncés ouvrent diverses voies :

Les sous-groupes commutatifs maximums d'un groupe clos G ont fait l'objet d'études précises, par *E. Cartan*[4]) au point de vue infinitésimal, et par *H. Hopf*[5]) au point de vue global. La notion de sous-groupe commutatif maximum est d'ailleurs à la base de la représentation de G par son diagramme.

Les sous-groupes d'isotropie G_1 des espaces symétriques clos ont été étudiés de façon systématique par *E. Cartan*[6]), en partant des automorphismes involutifs de G dont ces sous-groupes sont caractéristiques. Je signale encore que *A. Malcev*[7]) a déterminé les sous-groupes semi-simples des groupes de Lie *complexes*, à l'aide des représentations linéaires de ces groupes.

La résolution complète du problème posé en (a) permettrait par exemple de faire une étude d'ensemble des espaces homogènes clos G/G_1, et de savoir en particulier si la classe des espaces symétriques clos contient la plupart des premiers ou non. Un autre problème pourrait être abordé : étant donné un groupe clos G et un sous-groupe fermé connexe G_1 de G, quand G_1 est-il homologue à zéro dans G (au sens de la topologie combinatoire) ? On sait d'après E. Cartan qu'un sous-groupe simple à trois paramètres n'est jamais homologue à zéro ; il en est de même de tout sous-groupe invariant fermé connexe.

Dans un autre ordre d'idées, je mentionne qu'on peut démontrer le théorème suivant : il n'y a dans le diagramme $D(G)$ d'un groupe clos G qu'un nombre fini de sous-diagrammes $D(G_1)$. De plus, toute chaîne de sous-groupes $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G$ peut être représentée dans $D(G)$ par une chaîne $D(G_1) \subset D(G_2) \subset \cdots \subset D(G)$; l'ensemble de ces chaînes est encore fini. Il serait peut-être intéressant d'étudier ces ensembles finis, et de savoir de quelles structures on pourrait les munir.

---

[4]) *E. Cartan*, La géométrie des groupes simples (Annali di Mat., t. 4, 1927, p. 212 à 214).

[5]) *H. Hopf*, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen (Comment. Math. Helv., t. 13, 1940, p. 119—143).

[6]) *E. Cartan*, Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (Ann. Ec. Norm. (3) XLIV, 1927, p. 345—467).

[7]) *A. Malcev*, On semi-simple subgroups of Lie groups (Bull. Acad. Sci. U. R. S. S., Sér. Math. 8, p. 143—174, 1944). D'après le résumé: Math. Rev., t. 6, p. 146.

4. Une note déjà parue indique que le problème (a) est résolu dans le cas où le rang du sous-groupe est égal au rang du groupe [8]). D'ailleurs, ce même problème est aussi résolu lorsque le rang du sous-groupe est égal à un [9]). Les pages qui suivent n'apportent pas la solution complète ; elles présentent un certain nombre de résultats généraux, appliqués à un cas particulier important.

Le chapitre I pose les notions classiques relatives à un groupe clos G, d'après *E. Stiefel* [10]) : diagramme, ensemble $\Sigma(G)$ des paramètres angulaires de G, groupe fini $\Phi(G)$ des automorphismes intérieurs de G qui laissent invariant un sous-groupe commutatif maximum donné ; j'introduis de plus la notion de diagonale du diagramme : $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k = 0$; $\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_l \neq 0$, et la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ qui représente la figure $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \ldots, \vec{\varphi}_l$ par l points reliés par certains traits.

Cela posé, j'associe (chapitre II) au groupe G et au sous-groupe G_1 un tableau

$$\mathrm{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 : \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1} \\ \varrho_2 : \beta_1, \ldots, \beta_{n_2} \\ \ldots \\ \varrho_h : \gamma_1, \ldots, \gamma_{n_h} \end{array} \right.$$

dans lequel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ sont h paramètres angulaires fondamentaux de G ; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}$ sont les formes de $\Sigma(G)$ qui se réduisent à ϱ_1 dans R^h... Le tableau I est le principal objet de cette étude (§ 5, 6, 7). Dans ce même chapitre, je montre qu'il suffit de considérer les sous-groupes de G qui ne sont pas contenus dans un sous-groupe propre de rang maximum de G ; ce sont les sous-groupes (H). Alors, tout $\omega \in \Sigma(G)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des formes du tableau I.

Les chapitres III et IV contiennent l'étude des sous-groupes remarquables dont le tableau I contient l paramètres angulaires fondamentaux et ceux-là seulement (sous-groupes $(H)_0$). La figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ doit être appliquée d'une certaine façon sur ce tableau (§ 9, 10, 11). La discussion fournit les résultats suivants : si le rang h de G_1 est au moins égal à 2, les seuls sous-groupes $(H)_0$ des groupes clos simples sont les sous-groupes caractéristiques d'automorphismes involutifs externes [11]),

---

[8]) *A. Borel et J. de Siebenthal*, C. R. Acad. Sc., t. 226, p. 1662—1664; voir aussi: Comment. Math. Helv., t. 23, 1949, p. 200—221.

[9]) *J. de Siebenthal*, C. R. Acad. Sc., t. 230, 1950, p. 910—912.

[10]) *E. Stiefel*, Comment. Math. Helv., t. 14, 1942, p. 350—380.

[11]) *E. Cartan*, cf. note 6.

à trois exceptions près : $G_2 \subset B_3$, $G_2 \subset A_6$, $G_2 \subset D_4$[12]). Les inclusions $C_4 \subset E_6$ et $D_h \subset A_{2h-1}$ ne rentrent pas dans le cas étudié.

Le cas où le rang du sous-groupe $(H)_0$ est égal à un est très différent : tout groupe clos G non abélien contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un, dit *sous-groupe principal.* Ce sous-groupe admet une définition indépendante du diagramme : un sous-groupe (H) de rang un est dit principal s'il contient un élément régulier dans G. Lorsque G est de l'un des types B_l $(l > 3)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4, E_7, E_8, le sous-groupe principal est toujours maximum.

CHAPITRE I

Groupes clos

§ 1. Diagramme d'un groupe clos

1. *Toroïdes maximums.* Soit G un groupe de Lie clos connexe ; du point de vue topologique, G est un espace de Hausdorff bicompact[13]), ou compact au sens de N. Bourbaki. Pour étudier G, il convient de mettre en évidence les sous-groupes commutatifs maximums de G, ou toroïdes maximums T de G ; ils sont tous connexes et ont la même dimension (chaque T est un produit direct de l cercles) ; l'entier l est le rang du groupe G. On a les propriétés suivantes[14]) :

(a) *Etant donné un élément $a \in G$, il existe un toroïde maximum T qui contient a.*

(b) *Etant donnés deux toroïdes maximums T et T', il existe un élément $b \in G$ tel que $bTb^{-1} = T'$ (E. Cartan).*

(c) *Si a est un élément de G échangeable avec tous les éléments d'un toroïde maximum T de G, a appartient à T.*

2. *Groupe fini $\Phi(G)$.* Le normalisateur $N(T)$ du toroïde maximum T est un sous-groupe de G constitué par un nombre fini de composantes connexes ; l'une d'elles est précisément T, qui est un sous-groupe invariant de $N(T)$. Soit a un élément de $N(T)$; l'automorphisme intérieur $x \to axa^{-1}$, $x \in G$ induit une transformation de T sur lui-même ; toutes ces transformations forment un groupe fini $\Phi(G)$ isomorphe au groupe quotient $N(T)/T$. A chaque groupe clos G est ainsi associé un groupe fini $\Phi(G)$ de transformations du toroïde T.

---

[12]) Ces inclusions sont bien connues.

[13]) voir note 2 de l'introduction; cf. No. 9.

[14]) voir note 5 de l'introduction et *H. Hopf et H. Samelson* (Comment. Math. Helv., t. 13, No 4, Hilfssatz 4).

3. *Eléments réguliers et singuliers.* Un élément x de G est dit régulier s'il n'appartient qu'à un seul toroïde maximum T ; x est singulier s'il appartient à plus d'un toroïde maximum. La dimension du normalisateur de x est égale au rang l si x est régulier ; cette dimension est supérieure à l si x est singulier.

4. *Propriétés des éléments singuliers d'un toroïde maximum.* Voici ces propriétés d'après H. Hopf[15] :

L'ensemble des éléments singuliers du toroïde maximum T est constitué par la réunion des éléments de m sous-groupes fermés $U_1, U_2, \ldots, U_m$; chacun d'eux est à $l-1$ dimensions, et est formé de deux composantes connexes au plus. Si $i \neq j$, la dimension de l'intersection $U_i \cap U_j$ est égale à $l-2$.

Le groupe fini Φ transforme l'ensemble des sous-groupes U_i en lui-même ; il est engendré par m involutions $S_1, S_2, \ldots, S_m$; l'involution S_i laisse invariant chaque point de U_i ; dans un système de coordonnées orthogonales canoniques définies au voisinage de l'élément neutre, S_i est représentée dans T par la symétrie par rapport au $(l-1)$-plan U.

L'intersection des sous-groupes $U_1, U_2, \ldots, U_m$ est le centre de G (discret si G est semi-simple).

5. *Diagramme et paramètres angulaires.*

(a) *G semi-simple.* Au groupe semi-simple G sont associés un espace vectoriel réel R^l et un ensemble $\Sigma(G)$ de $2m$ formes linéaires $\pm\vartheta_1(x), \ldots, \pm\vartheta_m(x)$, $x \in R^l$: les paramètres angulaires de G ; la somme $\sum_{i=1}^{m} [\vartheta_i(x)]^2$ définit dans R^l une métrique euclidienne. Les $(l-1)$-plans $\vartheta_i(x) \equiv 0$ (mod 1) (dits singuliers) constituent le *diagramme* de G[16]), et le groupe engendré par les symétries par rapport à ces plans est un groupe spatial Γ dont chaque opération conserve le diagramme.

R^l peut être considéré comme le recouvrement universel du toroïde maximum $T = T^l$. Les plans singuliers $\vartheta_i \equiv 0$ (mod 1) recouvrent alors le sous-groupe singulier U_i, et le groupe Γ correspond au groupe Φ. On peut choisir dans R^l un point O origine appartenant au recouvrement de l'élément neutre de G, les paramètres angulaires s'annulant tous en O.

---

[15]) *H. Hopf*, Maximale Toroïde und singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen (Comment. Math. Helv., t. 15, 1942, p. 69).

[16]) La notion de diagramme a été mise en évidence, à l'aide de méthodes globales, par *E. Stiefel*; voir: Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen... (Comment. Math. Helv., t. 14, 1942, p. 350—380).

Les plans singuliers issus de O forment un ensemble qui est conservé par les symétries par rapport à l'un quelconque d'entre-eux ; le groupe engendré par ces symétries est d'ailleurs isomorphe au groupe fini $\Phi(G)$ considéré au numéro précédent. Les plans en question déterminent un certain nombre de régions permutées transitivement par le groupe Φ ; chacune d'elles est limitée exactement par l faces à $l-1$ dimensions[17]), et peut être désignée par le terme d'*angle polyèdre fondamental du diagramme* ; il existe l paramètres angulaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de G tels que la région considérée soit définie par les inégalités $\varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont alors l paramètres angulaires fondamentaux de G, et forment une *suite* dite *fondamentale*. Il est aisé de voir que tout paramètre angulaire de G appartient à au moins une suite fondamentale. La différence de deux éléments d'une telle suite ne peut être un paramètre angulaire, sinon ce dernier s'annulerait en un point intérieur à la région $\varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$, contrairement à l'hypothèse faite sur celle-ci. Tout élément de $\Sigma(G)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers nuls ou de même signe des éléments d'une même suite fondamentale.

(b) *G non semi-simple.* G est alors localement isomorphe au produit direct G_1 d'un groupe semi-simple G_1' et d'un groupe commutatif clos Z_1. Si ν désigne l'application de recouvrement : $G = \nu G_1$, le toroïde $Z = \nu Z_1$ appartient à T, et $G' = \nu G_1'$ est la composante semi-simple de G. Le diagramme de G est la somme directe du diagramme de G' et d'un espace linéaire de dimension $d(Z)$ égale à celle de Z. Les paramètres angulaires de G sont ceux de sa composante semi-simple G'.

6. *Vecteurs du diagramme.* ϑ étant un paramètre angulaire, il existe un vecteur $\vec{\vartheta}$ de R^l tel que l'on ait $\vartheta(x) = -\vec{\vartheta}\cdot\vec{x}$. Les $2m$ vecteurs ainsi construits forment le système des vecteurs du diagramme de G ; ils jouissent de propriétés énoncées par *van der Waerden*[18]) :

(a) Soit $\vec{\vartheta}$ un vecteur du diagramme ; $k\vec{\vartheta}$ est un vecteur du diagramme pour $k = 1$ et $k = -1$ seulement.

(b) Soient $\vec{\vartheta}$ et $\vec{\vartheta}'$ deux vecteurs du diagramme ; le nombre $2\,\dfrac{\vec{\vartheta}\cdot\vec{\vartheta}'}{\vec{\vartheta}^2}$ est entier.

(c) Soient $\vec{\vartheta}$, $\vec{\vartheta}'$ deux vecteurs du diagramme ; $\vec{\vartheta} - k\vec{\vartheta}'$ est encore

---

[17]) *E. Cartan*, Complément au mémoire: Sur la géométrie des groupes simples (Annali di Mat., t. 5, 1928, p. 253—260).

[18]) Voir note 3 de l'introduction.

un vecteur du diagramme lorsque k est un entier variant de 0 à $2\dfrac{\vec{\vartheta}\cdot\vec{\vartheta}'}{\vec{\vartheta}'^2}$.

Il résulte en particulier de la propriété (c) que si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ est une suite fondamentale, on a : $\vec{\varphi}_i \cdot \vec{\varphi}_j \leq 0$, sinon $\varphi_i - \varphi_j \in \Sigma(G)$.

7. *Paramètres angulaires dominants.* Supposons G simple ou semi-simple ; l'angle polyèdre fondamental $\varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$ contient un polyèdre fondamental du groupe spatial Γ, défini par les inégalités $\varphi_1 > 0, \ldots, \varphi_l > 0$; $\omega_1 < 1, \ldots, \omega_s < 1$; $\omega_1, \ldots, \omega_s$ sont s paramètres angulaires de G : les paramètres angulaires dominants de ce groupe (ce sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$). Les paramètres angulaires extraits de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ qui figurent dans l'expression de l'un de ces paramètres angulaires dominants ne figurent dans aucun autre. S'il n'y a qu'un seul paramètre angulaire dominant, le groupe G est simple ; le polyèdre fondamental est alors un simplexe.

8. *Sous-groupe simple de rang un associé à un paramètre angulaire.* Soit ϑ_i un paramètre angulaire de G, et U_i le sous-groupe singulier de T recouvert dans R^l par les plans $\vartheta_i \equiv 0 \pmod 1$. Le centralisateur de U_i dans G est un sous-groupe de rang l, de dimension $l + 2$, non abélien. La dimension du centre de ce sous-groupe étant égale à $l - 1$, sa composante semi-simple est un sous-groupe g simple de dimension trois, associé à $\pm\vartheta_i$. g coupe T suivant un sous-groupe t à une dimension dont le recouvrement dans R^l contient une droite R^1 orthogonale à $\vartheta_i = 0$; l'anneau $R(g)$ de g est de la forme $R^1 + \Pi_{\vartheta_i}$, où Π_{ϑ_i} est un plan à deux dimensions, associé également au paramètre ϑ_i ; ce 2-plan est invariant par tous les automorphismes intérieurs de G déterminés par les éléments de T.

9. *Recouvrement du centre de G.* Supposons G semi-simple ; le recouvrement dans R^l du centre de G est un réseau dit central ; un point $x \in R^l$ appartient à ce réseau si les paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ prennent des valeurs entières sur le point x.

§ 2. Figures de Schläfli des groupes simples

10. *Définition.* Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ une suite fondamentale de paramètres angulaires de G supposé semi-simple ; je fais correspondre à chaque forme φ_i un point P_i, P_i étant relié à P_j par 0, 1, 2, ou 3 traits suivant que l'angle des vecteurs $\vec{\varphi}_i$ et $\vec{\varphi}_j$ est égal à 90°, 120°, 135°, ou

150°. La figure constituée par ces points et par ces traits est par définition la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ du groupe G (on peut lui adjoindre le point qui représente le paramètre angulaire dominant, ce qui n'est pas nécessaire ici).

Si G est semi-simple, la suite $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \ldots, \vec{\varphi}_l$ se décompose en deux suites partielles au moins : $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_{l'}$ et $\vec{\varphi}_{l'+1}, \ldots, \vec{\varphi}_l$, tout vecteur de la première étant orthogonal à tout vecteur de la seconde, et réciproquement. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que la figure $\mathfrak{F}(G)$ soit connexe est que le groupe G soit simple.

11. *Paramètres angulaires fondamentaux des groupes simples et figures de Schläfli associées.* Les expressions classiques des paramètres angulaires des groupes simples[19]) ne mettent pas en évidence les paramètres angulaires fondamentaux. Je vais donner dans chaque cas la substitution convenable, le paramètre dominant, et la figure $\mathfrak{F}(G)$.

Groupe A_l : Les paramètres angulaires sont : $\pm\tau_i$, $\tau_i - \tau_j$ $(i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, l)$. Posons : $\varphi_1 = \tau_1$, $\varphi_2 = -\tau_1 + \tau_2$, $\varphi_3 = -\tau_2 + \tau_3$, $\ldots, \varphi_l = -\tau_{l-1} + \tau_l$; tout paramètre angulaire est une combinaison linéaire à coefficients entiers nuls ou de même signe de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$. Le paramètre angulaire dominant est $\tau_l = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_l$.

Groupe B_l : Les paramètres angulaires sont : $\pm\tau_i$, $\pm\tau_i \pm \tau_j$ $(i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, l)$. On peut poser : $\varphi_1 = \tau_1$, $\varphi_2 = -\tau_1 + \tau_2$, $\varphi_3 = -\tau_2 + \tau_3, \ldots, \varphi_l = -\tau_{l-1} + \tau_l$; le paramètre angulaire dominant est $\tau_{l-1} + \tau_l = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \cdots + 2\varphi_{l-1} + \varphi_l$.

Groupe C_l : Les paramètres angulaires sont : $\pm 2\tau_i$, $\pm\tau_i \pm \tau_j$ $(i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, l)$. On peut poser $\varphi_1 = 2\tau_1$, $\varphi_2 = -\tau_1 + \tau_2$, $\varphi_3 = -\tau_2 + \tau_3, \ldots, \varphi_l = -\tau_{l-1} + \tau_l$; le paramètre angulaire dominant est $2\tau_l = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \cdots + 2\varphi_l$.

Groupe D_l : Les paramètres angulaires sont $\pm\tau_i \pm \tau_j$ $(i \neq j$; $(i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, l)$. On peut poser $\varphi_1 = \tau_1 + \tau_2$, $\varphi_2 = -\tau_1 + \tau_2$, $\varphi_3 = -\tau_2 + \tau_3, \ldots, \varphi_l = -\tau_{l-1} + \tau_l$; le paramètre angulaire dominant est $\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + 2\varphi_4 + \cdots + 2\varphi_{l-1} + \varphi_l = \tau_{l-1} + \tau_l$.

Groupe E_6 : Les paramètres angulaires sont :

$$\varphi_i - \varphi_j\,; \quad \pm(\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k), \quad \pm(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_6)$$
$$(i, j, k \text{ distincts}\,; \; i, j, k = 1, 2, \ldots, 6).$$

---

[19]) *E. Cartan*, La géométrie des groupes simples (Annali di Mat., t. 4. 1927, p. 218 à 224).

On peut poser $\varphi_1 = \tau_1 - \tau_2$, $\varphi_2 = \tau_2 - \tau_3$, $\varphi_3 = \tau_3 - \tau_4$, $\varphi_4 = \tau_4 - \tau_5$, $\varphi_5 = \tau_5 - \tau_6$, $\varphi_6 = \tau_4 + \tau_5 + \tau_6$ et le paramètre angulaire dominant est $\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_6$.

Groupe E_7 : Les paramètres angulaires sont

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m), \quad \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_8 = 0$$
$$(i, j, k, m \text{ distincts}; \quad i, j, k, m = 1, 2, \ldots, 8).$$

On obtient une suite fondamentale en posant

$$\varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2, \quad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3, \quad \varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4,$$
$$\varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5, \quad \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6, \quad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7,$$
$$\varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4.$$

Le paramètre angulaire dominant est $\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 3\varphi_5 + 2\varphi_6 + 2\varphi_7$.

Groupe E_8 : Les paramètres angulaires sont

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k), \quad \text{avec} \quad \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_9 = 0$$
$$(i, j, k \text{ distincts}; \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, 9).$$

On peut poser

$$\varphi_1 = \tau_2 - \tau_3, \quad \varphi_2 = \tau_3 - \tau_4, \quad \varphi_3 = \tau_4 - \tau_5, \quad \varphi_4 = \tau_5 - \tau_6,$$
$$\varphi_5 = \tau_6 - \tau_7, \quad \varphi_6 = \tau_7 - \tau_8, \quad \varphi_7 = \tau_8 - \tau_9, \quad \varphi_8 = \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

et le paramètre angulaire dominant est $2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 + 5\varphi_4 + 6\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_7 + 3\varphi_8$.

Groupe F_4 : Les paramètres angulaires sont

$$\pm\tau_i, \quad \pm\tau_i \pm \tau_j, \quad \tfrac{1}{2}(\pm\tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \tau_4)$$
$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3, 4).$$

On peut poser $\varphi_1 = \tau_1$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4)$, $\varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4$, $\varphi_4 = -\tau_2 + \tau_3$ et le paramètre angulaire dominant est : $2\varphi_1 + 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4$.

Groupe G_2 : Les paramètres angulaires sont $\pm\tau_1$, $\pm\tau_2$, $\pm(\tau_1 - \tau_2)$, $\pm(\tau_1 - 2\tau_2)$, $\pm(\tau_1 - 3\tau_2)$, $\pm(2\tau_1 - 3\tau_2)$. On peut poser $\varphi_1 = \tau_2$, $\varphi_2 = \tau_1 - 3\tau_2$, et le paramètre angulaire dominant est $3\varphi_1 + 2\varphi_2$.

Les figures de Schläfli respectivement associées à ces groupes simples sont :

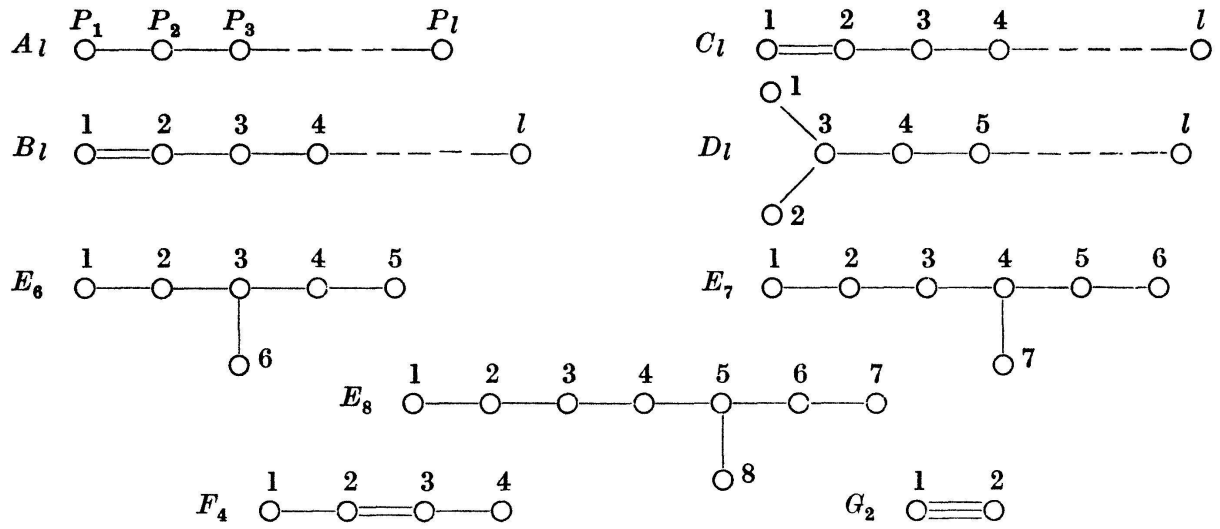


Fig. 1

Il résulte du mémoire de van der Waerden déjà cité que les vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ relatifs aux groupes B_l, C_l forment un angle de 135° de même pour les vecteurs 2 et 3 de F_4 ; les vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ relatifs au groupe G_2 forment un angle de 150° ; les autres angles sont tous égaux à 90° ou 120°.

12. *Propriétés des figures de Schläfli.* Je suppose ici que G est un groupe simple.

(a) Soit $\mathfrak{F}(G)$ la figure de Schläfli associée à un groupe simple. Un trait reliant deux points de $\mathfrak{F}(G)$ peut être simple ou multiple ; je dirai que deux points P_i et P_j sont en relation non nulle s'il existe un trait simple ou multiple reliant ces deux points. L'ordre d'un point $P \in \mathfrak{F}(G)$ est par définition le nombre des points de $\mathfrak{F}(G)$ qui sont en relation non nulle avec P ; cet ordre est égal à 1, 2, ou 3. Il y a dans $\mathfrak{F}(G)$ au plus trois points d'ordre 1, et au plus un point d'ordre trois.

Si G est un groupe de l'un des types A_l, D_l, E_6, E_7, E_8, $\mathfrak{F}(G)$ ne contient que des traits simples ; si G est de l'un des types B_l ou C_l, la ligne polygonale qui relie P_2 à P_l ne contient également que des traits simples ; $\mathfrak{F}(F_4)$ contient deux traits simples. Remarquons que $\mathfrak{F}(G)$ ne contient jamais de cycle à une dimension.

(b) Soit P un point de $\mathfrak{F}(G)$ d'ordre un ; la ligne polygonale issue de P, arrêtée au plus tard au point P' d'ordre trois (s'il existe), est par définition une terminaison à n éléments si elle contient n points de $\mathfrak{F}(G)$, P' non compris. Un coup d'œil sur les figures précédentes montre que $\mathfrak{F}(G)$ contient au plus deux terminaisons à $n \geq 2$ éléments.

(c) Soient P_i et P_j deux points de $\mathfrak{F}(G)$ reliés par un trait simple, et S_i la symétrie de R^l par rapport au $(l-1)$-plan $\varphi_i = 0$; on a

$(S_i S_j)\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_j$; il résulte de cette relation que le groupe $\Phi(G)$ opère transitivement sur les points d'une ligne polygonale à traits simples, $\mathfrak{F}(G)$ n'étant pas nécessairement conservée.

(d) Si le groupe simple connexe G admet un automorphisme externe, on peut choisir ce dernier en sorte qu'il permute les paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$[20]. L'effet produit sur $\mathfrak{F}(G)$ est une permutation des points P_i qui conserve $\mathfrak{F}(G)$; dans les cas A_l, D_l, E_6 on a respectivement les permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & l-1 & l \\ l & l-1 & & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & l \\ 2 & 1 & 3 & \ldots & l \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

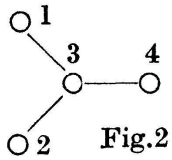
Si G est du type D_4, $\mathfrak{F}(G)$ est 

Fig.2
. Il existe 6 permutations des points P_1, P_2, P_4 conservant $\mathfrak{F}(D_4)$ et le point P_3.

§ 3. Diagonales du diagramme

13. *Définition.* Soit $P_\varphi : \varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$ un angle polyèdre fondamental du diagramme d'un groupe semi-simple G, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ étant l paramètres angulaires fondamentaux de G. Par définition, la demi-droite R^1_+ d'équation

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k &= 0 \\ \varphi_{k+1} \quad = \cdots = \varphi_l &> 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

est une diagonale de l'angle polyèdre P_φ. Si $k = 0$, on a $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_l$ et la diagonale est dite *principale.*

Comme R^1_+ peut appartenir à plusieurs angles polyèdres fondamentaux, on peut se demander si elle est une diagonale dans chacun d'eux. Le théorème suivant répond à cette question

14. **Théorème.** *Une diagonale de l'angle polyèdre fondamental P_φ est diagonale dans tout angle polyèdre fondamental qui la contient.*

Ainsi, étant donnée une demi-droite dont les équations ont la forme (1), on pourra la considérer comme une *diagonale du diagramme.* Seule la diagonale principale contient un élément régulier, et le théorème est pour elle évident, car elle n'appartient qu'à un seul angle polyèdre fondamental.

---

[20]) *E. Cartan,* Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples (Bull. Sc. Math., t. 49, 1925, p. 365).

15. *Démonstration.* La démonstration est basée sur le fait que si $\sigma \in \Phi(G)$, la demi-droite σR^1_+ est encore une diagonale de σP_φ.

Lemme. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ et $\nu_1, \ldots, \nu_l$ *deux suites fondamentales ; si* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ *sont des combinaisons linéaires à coefficients non négatifs de* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, *alors la seconde suite est une permutation de la première.*

Les systèmes $\mu_i > 0$, $\nu_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ définissent deux angles polyèdres fondamentaux P_μ, P_ν. Soit $x \in P_\mu$; on a $\mu_i(x) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, et d'après l'hypothèse $\nu_i(x) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, d'où $x \in P_\nu$. P_μ et P_ν ayant en commun un point intérieur x coïncident et le lemme résulte de ce fait.

Cela étant, soient P_φ $(\varphi_i \geq 0)$ et P_μ $(\mu_i \geq 0)$ deux angles polyèdres fondamentaux contenant R^1_+ et $x \in R^1_+$ voisin de l'origine. Le normalisateur $N(x)$ de x est un sous-groupe de rang l de G ; le centre Z de $N(x)$ a une dimension $l - k$; il y a donc k paramètres φ_i et k paramètres μ_i qui s'annulent identiquement sur R^1_+, par exemple $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, qui forment deux suites fondamentales de $N(x)$. Il existe une opération $\nu \in \Phi(N(x))$ qui applique $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sur une permutation $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ de $\mu_1, \ldots, \mu_k$ et $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_l$ sur $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_l$ respectivement ; de plus $\sigma x = x$. Maintenant, chaque ν_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers nuls ou de même signe de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$; comme $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_l$ sont positifs sur x, ces formes, exprimées à l'aide des μ_i, ont des coefficients non négatifs. En résumé, $\mu_1, \ldots, \mu_l$ et $\nu_1, \ldots, \nu_l$ vérifient les hypothèses du lemme, et $\sigma P_\varphi = P_\nu = P_\mu$. De là résulte $\mu_{k+1} = \cdots = \mu_l$ sur R^1_+ et le théorème est établi.

CHAPITRE II

Théorèmes généraux sur les sous-groupes

§ 4. Diagramme et sous-anneaux

1. *Diagramme d'un sous-groupe.* Soient G un groupe de Lie clos, et G_1 un sous-groupe fermé connexe de G ; c'est un groupe de Lie, engendré dans G par un sous-espace linéaire de l'anneau $R(G)$[21]. Soit maintenant T^h un toroïde maximum du sous-groupe G_1 ; il existe un toroïde maximum T^l de G qui contient T^h. Remarquons que l'intersection de G_1 et de T^l se réduit à T^h ; en effet, un élément x commun à G_1 et à T^l est un élé-

[21]) voir note 2 de l'introduction.

ment de G_1 échangeable avec chaque élément de T^h ; d'après la proposition (c) du § 1, x appartient à T^h.

$$\boxed{T^h = T^l \cap G_1}$$

Si R^h et R^l sont les supports des diagrammes de G_1 et G, correspondant respectivement aux toroïdes T^h et T^l, on a $R^h \subset R^l$. Il est a priori évident que le sous-espace R^h doit vérifier un certain nombre de conditions ; en particulier, la diagonale principale de G_1 n'est pas quelconque ; elle va jouer un rôle important dans ce qui suit (§ 8 et chapitre III). De plus, si l'on dispose d'une autre paire T'^h, T'^l, avec $T'^h \subset T'^l$, $T'^h \subset G_1$, $T'^l \subset G$, on peut construire un automorphisme intérieur de G qui applique T'^h sur T^h, et T'^l sur T^l : dans ce sens, l'inclusion $R^h \subset R^l$ ne dépend pas des toroïdes T^h et T^l choisis.

2. *Sous-groupes fermés et sous-anneaux.* A tout sous-groupe fermé connexe G_1 de G correspond un sous-anneau de $R(G)$, de support $R(G_1)$; inversement, étant donné un sous-anneau R de $R(G)$, quand le sous-groupe fermé connexe G_1 engendré par R a-t-il même dimension que R ? Un théorème précis peut être établi, dont l'énoncé sera précédé d'un lemme :

Lemme 1. *Soit N le sous-groupe clos engendré par R dans G ; R est un sous-anneau invariant de $R(N)$.*

Tout d'abord, R engendre un germe g ; g est l'intersection d'un voisinage de l'élément neutre e de G et de la variété totalement géodésique formée par les sous-groupes à un paramètre de G tangents à R en e[22]. Cela étant, N est l'ensemble des éléments $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k}$ et des éléments d'accumulation de ces produits, avec $a_i \in g$; $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des entiers rationnels arbitraires $(k > 0)$. $a_i \in g$ entraîne $a_i R a_i^{-1} = R$ d'où, par construction de N, on voit que R est invariant par le groupe adjoint linéaire $S(N)$ de N, c. q. f. d.

Cela étant, le groupe linéaire mentionné laisse $R(N)$ et R invariants ; R se décompose en une somme directe de sous-anneaux orthogonaux deux à deux : $R_1, R_2, \ldots, R_h, r_1$, les h premiers étant simples et invariants dans $R(N)$, le dernier étant un sous-anneau commutatif, invariant dans $R(N)$ également. Par définition, ce dernier sous-anneau est la composante commutative de l'anneau R ; r_1 est aussi le sous-anneau commu-

[22]) *E. Cartan,* La géométrie des groupes de transformations (Journ. math. pures et appliquées, t. 6, 1927, chap. I).

tatif invariant maximum de R, soit le centre de R. Le théorème en vue peut maintenant s'énoncer :

Théorème 1. *Soient G un groupe de Lie clos connexe, $R(G)$ l'anneau de Lie de G, R un sous-anneau de $R(G)$, et r_1 la composante commutative de R. La condition nécessaire et suffisante pour que R engendre un sous-groupe fermé de dimension $d(R)$ est que r_1 engendre un sous-groupe fermé de dimension $d(r_1)$.*

Deux lemmes sont encore nécessaires.

Lemme 2. *Soient G et G' deux groupes de Lie clos localement isomorphes, G' recouvrant G, et σ l'application de recouvrement ; σ applique tout ensemble fermé de G' sur un ensemble fermé de G.*

Cela provient simplement du fait que G' recouvre G un nombre fini de fois. De là résulte que σ applique un sous-groupe fermé de G' sur un sous-groupe fermé de G, ayant la même dimension.

Lemme 3. *Soient G et G' deux groupes de Lie clos localement isomorphes, G' recouvrant G, et σ l'application de recouvrement ; soient g un germe dans G, et $g' = \sigma^{-1}g$ le germe correspondant dans G' ; si g engendre dans G un sous-groupe fermé de dimension $d(g)$, il en est de même de g' dans G'.*

g engendre dans G un sous-groupe $\mathfrak{G}$ connexe, fermé par hypothèse. De même, g' engendre dans G' un sous-groupe $\mathfrak{G}'$ du groupe abstrait G' ; la fermeture de $\mathfrak{G}'$ est un sous-groupe $\overline{\mathfrak{G}}'$ du groupe topologique G'. Soit $x \in \overline{\mathfrak{G}}'$; il existe une suite d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de $\mathfrak{G}'$ convergeant vers x ; chaque x_i est un produit d'éléments de g'. σ applique la suite x_i sur une suite σx_i de $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}$ étant fermé, l'application continue σ amène x sur un élément du groupe $\mathfrak{G}$. Ainsi, on a : $\sigma\overline{\mathfrak{G}}' \subset \mathfrak{G}$; $\sigma g' = g$ entraîne $\sigma\overline{\mathfrak{G}}' = \mathfrak{G}$, car $\mathfrak{G}'$ et $\mathfrak{G}$ sont connexes. Comme σ conserve la dimension, on a nécessairement $d(\overline{\mathfrak{G}}') = d(\mathfrak{G})$, c. q. f. d.

Je passe à la démonstration du théorème :

La condition est suffisante : On peut simplifier en se servant du lemme 1, et en considérant R dans $R(N)$. Dans la décomposition précédente :

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_h + r_1 ,$$

les sous-espaces $R_1, R_2, \ldots, R_h$ sont invariants et irréductibles par $S(N)$, qui se réduit à l'identité dans r_1. Cela étant, on a :

$$R(N) = R + R_{h+1} + R_{h+2} + \cdots + R_k + r_2 ,$$

$R_{h+1}, R_{h+2}, \ldots, R_k$ ayant les propriétés de $R_1, R_2, \ldots, R_h$, $S(N)$ se réduisant à l'identité dans r_2 et dans $r = r_1 + r_2$.

Chaque sous-espace R_i est un anneau qui engendre un groupe simple clos g_i ; il existe un groupe clos N', produit direct de $g_1, g_2, \ldots, g_k$ et d'un groupe commutatif clos c, N' étant localement isomorphe à N. L'isomorphisme local σ' considéré applique $R(N')$ sur $R(N)$, $R(g_i)$ sur R_i, et $R(c)$ sur r ; je désigne par σ l'application de recouvrement $N' \to N$ qui coïncide avec σ' au voisinage de l'élément neutre.

Cela posé, l'isomorphisme inverse σ'^{-1} applique r_1 sur un sous-anneau r_1' de $R(N')$, engendrant dans c un sous-groupe commutatif clos c_1' ayant la même dimension que r_1' (en vertu de l'hypothèse et d'après le lemme 3.) Considérons dans N' le sous-groupe fermé $N' = g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_h \times c_1'$. Son image par σ dans N est un sous-groupe fermé N_1 de N (lemme 2), ayant même dimension, avec $R(N_1) = R_1 + R_2 + \cdots + R_h + r_1$. La condition est bien suffisante (alors $k = h$ et $r = r_1$).

La condition est nécessaire. Si R engendre un sous-groupe fermé N_1 ayant même dimension que R, le sous-anneau r_1 engendre un sous-groupe commutatif clos c_1 de N_1, contenu dans le centre de N_1. Comme la dimension du centre de N_1 est celle de r_1, on a : $d(C_1) = d(r_1)$, c.q.f.d. Une conséquence de ce théorème est la suivante :

Proposition. Tout sous-anneau semi-simple de l'anneau de Lie d'un groupe clos engendre un sous-groupe fermé ayant même dimension[23]).

Une autre conséquence importante est la suivante : soient G un groupe clos, R un sous-anneau de $R(G)$, et r la composante commutative de R ; r appartient toujours à un sous-anneau commutatif maximum de $R(G)$. Ainsi, il est possible de reconnaître, *dans le diagramme*, si un sous-anneau R de $R(G)$ engendre un sous-groupe fermé ayant même dimension.

§ 5. Eléments associés à un paramètre angulaire du sous-groupe G_1

3. *Paramètres angulaires du groupe G associés à un paramètre angulaire du sous-groupe.*

L'ensemble $\Sigma(G_1)$ des paramètres angulaires du sous-groupe G_1 de G est certainement lié à $\Sigma(G)$; le théorème suivant donne une première précision.

---

[23]) Utilisé implicitement par *E. Cartan* dans le cas où R est simple et de dimension 3 (C. R. Acad. Sc.: Sur les nombres de Betti des groupes clos, t. 187, p. 196... étendue à la variété...). Voir aussi: *E. Cartan*, Sur les représentations linéaires des groupes clos (Comment. Math. Helv., t. 2, IV, 1930, p. 269—283).

Théorème 2. *Soient G un groupe de Lie clos, G_1 un sous-groupe fermé de G, et R^h le support du diagramme de G_1, contenu dans celui de G, désigné par R^l. Si ϱ est un paramètre angulaire de G_1, il existe un paramètre angulaire ω de G égal à ϱ sur R^h.*

Soit $f_G(\xi, t)$ le polynome caractéristique de G, t étant un vecteur de l'anneau $R(G)$, et ξ une indéterminée[24]). Lorsque t décrit $R(G_1)$, on a

$$f_G(\xi, t) = f_{G_1}(\xi, t) \cdot f(\xi, t) \qquad t \in R(G_1) \tag{1}$$

le polynome caractéristique de G_1 divise celui de G. Maintenant G est clos ; lorsque t décrit R^l, $f_G(\xi, t)$ se décompose en un produit de facteurs du premier degré en ξ :

$$f_G(\xi, t) = \xi^l \prod_{1,\ldots,m} [\xi - 2\pi i\, \mu_k(t)][\xi + 2\pi i\, \mu_k(t)] \qquad t \in R^l, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{2}$$

les formes $\pm\mu_1(t), \ldots, \pm\mu_m(t)$ étant les paramètres angulaires de G ; de plus, si t décrit R^h, on a :

$$f_{G_1}(\xi, t) = \xi^h \prod_{1,\ldots,p} [\xi - 2\pi i\, \varrho_j(t)][\xi + 2\pi i\, \varrho_j(t)] \qquad t \in R^h \tag{3}$$

où $\pm\varrho_1(t), \ldots, \pm\varrho_p(t)$ sont les paramètres angulaires de G_1. (1) donne

$$f_G(\xi, t) = f_{G_1}(\xi, t) \cdot f(\xi, t) \qquad t \in R^h .$$

Ainsi, il existe $2p$ facteurs $[\xi \pm 2\pi i \mu_j(t)]$ du second membre de (2) qui deviennent respectivement identiques aux $2p$ facteurs $[\xi \pm 2\pi i\, \varrho_j(t)]$ lorsque t décrit R^h. En particulier, étant donné un paramètre angulaire $\varrho(t)$ de G_1, il existe un paramètre angulaire $\mu(t)$ de G tel que $\varrho(t) \equiv \mu(t)$, $t \in R^h$, c. q. f. d. On peut énoncer aussi le résultat de la manière suivante :

L'ensemble des paramètres angulaires de G se réduit dans R^h à un ensemble de formes qui contient l'ensemble des paramètres angulaires de G_1.

Passons aux vecteurs du diagramme ; le vecteur $\vec{\varrho}$ associé au paramètre angulaire ϱ de G_1 est défini par : $\varrho(x) = -\vec{\varrho} \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in R^h$. On a si ω_i se réduit à ϱ dans R^h :

$$\vec{\omega}_i \cdot \vec{x} = \vec{\varrho} \cdot \vec{x} \qquad \text{et} \qquad \vec{\varrho} \cdot \vec{\omega}_i = \vec{\varrho}^{\,2}$$

quel que soit $x \in R^h$; il en résulte $\dfrac{\vec{\omega}_i \cdot \vec{\varrho}}{|\vec{\varrho}|} = |\vec{\varrho}|$. Ainsi, le vecteur $\vec{\varrho}$ est

---

[24]) *H. Weyl*, Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen II (Math. Zeitschr., t. 24, 1926, p. 356).

donné par la projection du vecteur $\vec{\omega}_i$ sur la droite R^1 support de $\vec{\varrho}$.

Dans ce qui suit, je désigne par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ la suite de tous les paramètres angulaires de G qui se réduisent dans R^h au paramètre angulaire ϱ de G_1 ; *cette suite est associée au paramètre* ϱ.

4. *Sous-groupes de G associés au paramètre angulaire ϱ de G_1.* Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les paramètres angulaires de G associés au paramètre angulaire ϱ de G_1, et g_ρ le sous-groupe simple de rang un de G_1 associé à ϱ[25]). Comment g_ρ est-il contenu dans G?

On a $R(g_\rho) = R^1 + \Pi$; R^1 est la droite support du vecteur $\vec{\varrho}$; Π est un 2-plan du sous-espace $\Sigma \Pi_\alpha$, $\alpha \in \Sigma(G)$. Soit $\Pi_{\mu_1} + \cdots + \Pi_{\mu_k}$ le sous-espace $\Sigma \Pi_\alpha$ minimum qui contient Π ; ce plan étant invariant par tous les automorphismes intérieurs φ_a, $a \in T^h$, les paramètres angulaires $\mu_1, \ldots, \mu_k$ sont nécessairement égaux en tout point z de R^h, et égaux à $\omega_i(z)$. Autrement dit, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ est une suite contenue dans $\omega_1, \ldots, \omega_n$; cela signifie encore que Π appartient au sous-espace $\Pi_{\omega_1} + \cdots + \Pi_{\omega_n}$.

Maintenant, soit G_ρ le sous-groupe de rang l de G dont les paramètres angulaires sont toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers de $\omega_1, \ldots, \omega_n$ qui appartiennent à $\Sigma(G)$. g_ρ est visiblement un sous-groupe de G_ρ.

Remarque. Il ressort du raisonnement précédent que g_ρ appartient à la composante semi-simple de G, car il en est ainsi de Π ; en particulier, g_ρ appartient à la composante semi-simple de G_ρ ; $\vec{\varrho}$ est ainsi une combinaison linéaire de $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$: $\vec{\varrho} = \lambda_1 \vec{\omega}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{\omega}_h$. Cette relation, jointe à $\vec{\omega}_i \cdot \vec{\varrho} = \vec{\varrho}^2$, entraîne $\vec{\varrho}^2 = \vec{\varrho}^2 (\sum_1^n \lambda_i)$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$.

Il résulte encore de cette remarque que tout sous-groupe semi-simple G_1 de G appartient à la composante semi-simple de G, car il en est ainsi de chaque sous-groupe g_ρ, $\varrho \in \Sigma(G_1)$.

§ 6. Sur les groupes finis associés au groupe G et au sous-groupe G_1

5. Les considérations du § 5 permettaient d'établir une relation entre les ensembles finis $\Sigma(G)$ et $\Sigma(G_1)$; ici, j'établis deux théorèmes qui relient les groupes finis $\Phi(G)$ et $\Phi(G_1)$.

---

[25]) Voir chapitre I, § 1, No 8.

Théorème 3. *Soient G un groupe de Lie clos connexe, G_1 un sous-groupe fermé connexe de G, et T^h, T^l deux toroïdes, maximums respectivement dans G_1 et dans G, avec $T^h \subset T^l$; soit φ_1 une opération du groupe fini $\Phi(G_1)$ conservant T^h ; il existe une opération φ du groupe $\Phi(G)$ qui conserve T^h et T^l, en induisant dans T^h la même transformation que φ_1.*

L'énoncé suivant est équivalent à l'énoncé proposé : étant donné une composante aT^h de $N(T^h)$ dans G_1, il existe une composante bT^l de $N(T^l)$ telle que I : $\varphi_b T^h = T^h$; II : φ_a et φ_b induisent dans T^h la même transformation.

Démonstration. L'automorphisme intérieur φ_a conservant T^h conserve le centralisateur Z de T^h, et en particulier le centralisateur connexe Z'. Comme Z' contient T^l, φ_a applique T^l sur un toroïde T^* maximum dans Z' ; d'après la proposition (b) du § 1, il existe un élément $c \in Z'$ tel que $\varphi_c T^* = T^l$. Considérons l'automorphisme $\varphi_c \varphi_a = \varphi_{ca}$; φ_{ca} conserve évidemment T^h, puisque $\varphi_a T^h = T^h$, et que φ_c laisse invariant chaque élément de T^h ; on voit que φ_{ca} conserve T^h en induisant dans ce toroïde la même transformation que φ_a. De plus, on a par construction $\varphi_{ca} T^l = \varphi_c T^*$; φ_{ca} conserve T^l ; on peut donc poser $ca = b \in N(T^l)$, c. q. f. d.

Remarquons que si T^h contient un élément régulier, Z' est identique à T^l, d'où $c \in T^l$; on peut même prendre $c = e$; cela signifie que aT^h appartient à une composante aT^l de $N(T^l) \cdot \Phi(G_1)$ est un sous-groupe de $\Phi(G)$.

6. On peut énoncer comme suit la relation établie entre $\Phi(G_1)$ et $\Phi(G)$.

Théorème 3′. *Le groupe $\Phi(G_1)$ est isomorphe au groupe F/F', où F et F' sont des sous-groupes de $N(T^l)$; F est le sous-groupe des composantes de $N(T^l)$ qui laissent T^h invariant, en induisant dans ce toroïde des transformations de $\Phi(G_1)$; $F' \subset F$ est le sous-groupe des composantes de $N(T^l)$ qui induisent dans T^h la transformation identique.*

On peut dire que $\Phi(G_1)$ *est l'homomorphe d'un sous-groupe de* $\Phi(G)$. En effet, F' est d'abord un sous-groupe invariant de F : si $a_1 \in F$, $a_2 \in F'$, $\varphi_{a_1 a_2 a_1^{-1}}$ se réduit à l'identité dans T^h. Soit maintenant bT^l la composante de $N(T^l)$ associée à la composante aT^h de $N(T^h)$ comme tout à l'heure ; l'application :

$$aT^h \to (bT^l)F'$$

est un isomorphisme de $N(T^h)$ sur F/F' ; cela résulte du fait que deux composantes distinctes de $N(T^h)$ induisent dans T^h deux transformations distinctes.

7. Le théorème 3 peut être précisé si l'on introduit les sous-groupes G_ρ et g_ρ.

Théorème 4. *Soient G un groupe de Lie clos connexe, G_1 un sous-groupe fermé connexe de G, et R^l, R^h les supports des diagrammes respectifs de G, G_1, avec $R^l \supset R^h$; soit ϱ un paramètre angulaire de G_1; il existe une opération de $\Phi(G_\rho)$ qui conserve R^h en induisant dans ce sous-espace la symétrie par rapport au $(h-1)$-plan $\varrho = 0$.*

Considérons les sous-groupes G_ρ et g_ρ: on a $R(g_\rho) = R^1 + \Pi$ avec $R^1 \subset R^h$; d'après le théorème 3, il existe une opération σ de $\Phi(G_\rho)$ qui conserve R^1 et R^l, en induisant dans R^1 la symétrie par rapport à l'origine; or $\sigma \in \Phi(G_\rho)$ montre que chaque point du sous-espace $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$ est conservé par cette opération; mais si x est un point du sous-espace $\varrho = 0$, on a sur x: $\omega_1(x) = \cdots = w_n(x) = \varrho(x) = 0$ d'où $\sigma x = x$. En résumé, σ laisse invariante la droite $R^1 \subset R^h$ en induisant sur cette droite la symétrie par rapport à l'origine, et conserve chaque point du sous-espace à $(h-1)$ dimensions de R^h qui est orthogonal à R^1. Autrement dit, σ conserve R^h en induisant dans ce sous-espace la symétrie par rapport à $\varrho = 0$, c. q. f. d. Dans ce qui suit, je pose: $\sigma = S_\rho$; c'est l'opération de $\Phi(G_\rho)$ associée au paramètre angulaire ϱ; elle jouit de la propriété suivante:

Soit ω un paramètre angulaire du groupe G; l'opération S_ρ associée au paramètre angulaire ϱ du sous-groupe G_1 ajoute à ω une combinaison linéaire à coefficients entiers des paramètres angulaires $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ associés à ϱ

$$S_\rho \omega = \omega + m_1 \omega_1 + \cdots + m_n \omega_n \ .$$

En effet, la symétrie S_μ, $\mu \in \Sigma(G)$ applique $\mu' \in \Sigma(G)$ sur $S_\mu \mu' = \mu' + m\mu$ où m est entier; sachant que S_ρ est un produit de symétries S_{ω_i}, on obtient alors la formule désirée.

§ 7. Tableaux associés à un sous-groupe

8. Soient $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ h paramètres angulaires fondamentaux du sous-groupe G_1, et $\varrho_1, \ldots, \varrho_h, \varrho_{h+1}, \ldots, \varrho_p$ les paramètres angulaires positifs de G_1 (combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$). Les h suites associées respectivement à $\varrho_1, \ldots, \varrho_h$ forment par définition le tableau I (G, G_1); les suites associées aux autres forment par définition le tableau I′ (G, G_1);

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}\varrho_1 : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}\\ \varrho_2 : \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2}\\ \ldots\\ \varrho_h : \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_h}\end{array}\right. \qquad \mathrm{I}'\left\{\begin{array}{l}\varrho_{h+1} : \delta_1, \ldots, \delta_{n_{h+1}}\\ \ldots\\ \varrho_p : \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_p}\end{array}\right.$$

Il me semble que l'étude du tableau I est indispensable pour résoudre le problème des sous-groupes, au sens indiqué dans l'introduction. J'établis maintenant deux théorèmes, qui unissent les résultats des deux paragraphes précédents :

9. **Théorème 5.** *Soit σ_1 une opération de $\Phi(G_1)$ appliquant un paramètre angulaire ϱ de G_1 sur un paramètre angulaire ϱ' de ce même sous-groupe ; il existe une opération σ de $\Phi(G)$ appliquant la suite $\omega_1, \ldots, \omega_n$ associée à ϱ biunivoquement sur la suite $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, associée à ϱ'.*

D'après le théorème 3, il existe une opération σ de $\Phi(G)$ qui laisse R^h et R^l invariants, en appliquant ϱ sur ϱ' ; j'examine l'effet de σ sur les paramètres angulaires de G.

σ applique $\vec{\omega}_1$ sur un vecteur $\sigma\vec{\omega}_1$ du diagramme, et $\vec{\varrho}$ sur $\vec{\varrho}'$. Considérons la relation : $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{x} = \vec{\varrho} \cdot \vec{x}$, $x \in R^h$; on a $(\sigma\vec{\omega}_1)\cdot(\sigma\vec{x}) = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{x}$ et $\vec{\varrho}' \cdot \sigma\vec{x} = \vec{\varrho} \cdot \vec{x}$; d'où $(\sigma\vec{\omega}_1)(\sigma\vec{x}) = \vec{\varrho}'(\sigma\vec{x})$ quel que soit $x \in R^h$, c'est-à-dire, puisque $\sigma\vec{x}$ décrit R^h lorsque $\vec{x}$ décrit R^h : $-(\sigma\vec{\omega}_1)\cdot\vec{x} = -\vec{\varrho}' \cdot \vec{x}$, ou $\sigma\omega_1 = \varrho'$ dans R^h ; $\sigma\omega_1$ étant un paramètre angulaire de G qui se réduit à ϱ' dans R^h est l'un des paramètres angulaires ω'_i associés à ϱ'. Le même raisonnement s'applique à $\omega_2, \ldots, \omega_n$: σ détermine une application de la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dans la suite $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, nécessairement biunivoque ; en considérant de même σ^{-1} et $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n'}$, on voit qu'on peut énoncer le théorème 5, avec $n = n'$.

En particulier, si σ_1 applique ϱ sur $-\varrho$, alors σ applique $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sur une permutation de $-\omega_1, \ldots, -\omega_n$.

Les suites $\omega_1, \ldots, \omega_n$ et $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ considérées jouissent de la propriété suivante : on peut numéroter $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ en sorte que $\sigma\omega_i = \omega'_i$; alors $\Sigma m_i \omega_i \in \Sigma(G)$ entraîne $\Sigma m_i \omega'_i \in \Sigma(G)$. En ce sens, on peut dire que les suites ω_i et ω'_i sont isomorphes. Si G_1 est de l'un des types A_l, D_l, E_i, les suites du tableau I (G, G_1) sont deux à deux isomorphes, ce qui prouve à quel point la structure de ce tableau est particulière.

10. **Théorème 6.** *Les éléments du tableau I′ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments du tableau I.*

Soit ϱ un paramètre angulaire de G_1 figurant dans le tableau I', et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ la suite associée. Il existe un paramètre angulaire extrait de $\varrho_1, \ldots, \varrho_h$, soit ϱ_1 par exemple, et une opération σ_1 de $\Phi(G_1)$ appliquant ϱ_1 sur ϱ. Mais σ_1 est un produit de symétries $s_{\rho_1}, \ldots, s_{\rho h}$ par rapport aux $(h-1)$-plans $\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_h = 0$. Si dans ce produit, on remplace chaque facteur s_{ρ_i} par le facteur S_{ρ_i} associé (théorème 4), on obtient une opération σ qui applique encore ϱ_1 sur ϱ. On a, par exemple : $\sigma\alpha_1 = \omega_1$ ou $(\Pi S_{\rho_i})\alpha_1 = \omega_1$; or, d'après la fin du § 6, le premier membre de la dernière relation est une combinaison linéaire à coefficients entiers des paramètres angulaires de G qui figurent dans le tableau I. σ étant une application biunivoque de la suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sur la suite $\omega_1, \ldots, \omega_n$, la conclusion précédente est encore valable pour $\omega_2, \ldots, \omega_n$, et le théorème est établi.

§ 8. Réduction du problème des sous-groupes

11. L'étude des sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos a déjà été commencée dans un mémoire antérieur[26]) ; remarquons que les résultats obtenus dans ce dernier permettent de trouver en fait tous les sous-groupes invariants simples ou semi-simples des sous-groupes de rang maximum du groupe G. Tous ces sous-groupes ont une propriété commune : ils sont contenus dans un sous-groupe propre de rang maximum. Mais le groupe G contient certainement des sous-groupes d'une autre espèce, ne vérifiant pas la propriété indiquée. Je dis que si l'on connaît tous les sous-groupes de G qui ne sont pas contenus dans un sous-groupe de rang maximum, on peut déterminer tous les sous-groupes de G : en effet, soit G_1 un sous-groupe de G ; il existe dans G un sous-groupe G_2 de rang maximum l ayant la propriété d'être un des plus petits sous-groupes de rang l qui contiennent G_1 ; alors, G_1 est, dans G_2, un sous-groupe n'appartenant à aucun sous-groupe de rang l, et l'affirmation est établie.

Définition. Soit G un groupe de Lie clos de rang l ; un sous-groupe fermé connexe de G vérifie l'hypothèse (H) lorsqu'il n'est pas contenu dans un sous-groupe de rang l de G.

Je dirai aussi qu'un tel sous-groupe G_1 est un sous-groupe (H) de G, en écrivant $G_1 \underset{H}{\subset} G$. La réduction du problème des sous-groupes ainsi conçue ne laisse subsister qu'un nombre assez petit de types d'inclusion intéressants.

---

[26]) Voir la note 8 de l'introduction.

Comme la diagonale principale d'un sous-groupe (H) paraît jouer un certain rôle dans cette étude, il me semble utile d'établir d'abord une propriété de la diagonale principale des sous-groupes semi-simples de rang maximum du groupe G, bien que cette propriété ne rencontre dans les pages suivantes aucune application.

12. *Un théorème sur les sous-groupes de rang maximum.*

Théorème 7. *Soient $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie semi-simple clos de rang λ, et $\mathfrak{G}'$ un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, semi-simple, de rang λ ; alors la diagonale principale de $\mathfrak{G}'$ ne contient aucun élément régulier.*

La démonstration doit d'abord être donnée pour les groupes simples, sous la forme du lemme suivant :

Lemme. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, l paramètres angulaires fondamentaux d'un groupe simple G, et $\omega = m_1\varphi_1 + \cdots + m_l\varphi_l$ le paramètre angulaire dominant de G. Soit i un indice tel que m_i soit un entier premier supérieur à 1 ; alors la droite R^1 d'équation :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{i-1} = \varphi_{i+1} = \cdots = \varphi_l = -\omega$$

est singulière.

Remarquons que G ne peut être le groupe simple A_l, dont le paramètre angulaire dominant ω est $\omega = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_l$ (m_i tous égaux à 1). L'équation de R^1 s'écrit :

$$\varphi_1 = t, \varphi_2 = t, \ldots, \varphi_{i-1} = t, \quad \varphi_{i+1} = t, \ldots, \varphi_l = t, \quad \varphi_i = -a_i t \tag{1}$$

avec

$$a_i = \frac{1 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + m_{i+1} + \cdots + m_l}{m_i} .$$

La démonstration du lemme s'effectue en vérifiant pour chaque groupe simple (A_l exclu) que a_i est un entier, et qu'il existe un paramètre angulaire $\overline{\omega}$ de G qui s'annule identiquement sur R^1, considérée sous la forme (1). Par exemple, pour B_l : $\omega = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \cdots + 2\varphi_{l-1} + \varphi_l$; $a_1 = a_2 = \cdots = a_{l-1} = l - 1$; $\overline{\omega} = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_l$, etc.

Passons à la démonstration du théorème 7 : soit $\mathfrak{G}''$ un sous-groupe de rang λ de $\mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{G}'$ soit maximum dans $\mathfrak{G}''$. Si R^1 est singulière dans $\mathfrak{G}''$, elle est aussi singulière dans $\mathfrak{G}$. Je peux donc supposer que $\mathfrak{G}'$ est maximum dans $\mathfrak{G}$.

Soient $G_1, G_2, \ldots, G_k$ les sous-groupes invariants simples de $\mathfrak{G}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l_1}$ l_1 paramètres angulaires fondamentaux de G_1, $\beta_1, \ldots, \beta_{l_2}$

l_2 paramètres angulaires fondamentaux de $G_2, \ldots, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l_k}$ l_k paramètres angulaires fondamentaux de G ; soient $\omega_1, \ldots, \omega_k$ les paramètres angulaires dominants de $G_1, G_2, \ldots, G_k$ respectivement ; soit enfin :

$$\begin{array}{lll} \alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_1) ; & \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_2) ; & \ldots ; \\ \gamma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l_k) ; & & \\ \omega_1 \leq 1 \qquad\qquad ; & \omega_2 \leq 1 \qquad\qquad ; & \ldots ; \quad \omega_k \leq 1 \end{array}$$

le polyèdre fondamental de $\mathfrak{G}$, désigné par $P(\mathfrak{G})$.

$\mathfrak{G}'$ étant maximum, il existe un élément x de $\mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{G}'$ soit le normalisateur connexe de x[27]) ; on peut supposer que x appartient à $P(\mathfrak{G})$; $\mathfrak{G}'$ étant semi-simple, x est un sommet de $P(\mathfrak{G})$; soient :

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{l_1} = \beta_1 = \cdots = \gamma_{l_k} = 0 \; ; \qquad \alpha_i = \frac{1}{m_i}$$

les coordonnées de x ; m_i est un entier premier supérieur à un. Les paramètres angulaires fondamentaux de $\mathfrak{G}'$ sont alors :

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{l_1}, -\omega_1, \beta_1, \ldots, \beta_{l_2}, \ldots, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l_k}$$

et l'équation de la diagonale principale de $\mathfrak{G}'$ s'écrit alors

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{i-1} = -\omega_1 = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{l_1} = \beta_1 = \cdots = \gamma_{l_k} = t > 0$$

ou :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \cdots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{l_1} = \beta_1 = \cdots = \gamma_{l_k} = t \\ \alpha_i = -at \qquad\qquad a = \dfrac{1 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + m_{i+1} + \cdots + m_{l_1}}{m_i} , \end{array}\right\} \quad (1)'$$

D'après le lemme, il existe un paramètre $\sum_1^{l_1} p_i \alpha_i$ qui s'annule identiquement pour les valeurs des α_i données par (1) ; autrement dit, il existe un paramètre angulaire de $\mathfrak{G}$ qui s'annule identiquement sur R^1, et la démonstration est achevée.

13. *Sur les sous-groupes* (H) *d'un groupe clos.* L'hypothèse (H) permet d'établir facilement quelques théorèmes.

Proposition 1. Soient G un groupe de Lie clos, et G_1 un sous-groupe (H) de G ; le centre de G_1 est l'intersection de G_1 et du centre de G.

Soit $Z(G)$ le centre de G ; si $x \in Z(G) \cap G_1$, on a $x \in Z(G_1)$; inversement, soit $x \in Z(G_1)$; si $x \in Z(G)$, G_1 appartient au normalisateur

[27]) *A. Borel et J. de Siebenthal,* Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos (Comment. Math. Helv. 23, 1949, corollaire du théorème 5, p. 214).

$N(x)$, qui est un sous-groupe de G ayant même rang que G, distinct de G ; cela contredit l'hypothèse faite sur G_1 ; donc

$$\boxed{Z(G_1) = Z(G) \cap G_1} \quad . \tag{1}$$

En particulier, *si G est semi-simple, tout sous-groupe (H) de G est aussi semi-simple.*

On peut modifier la formule (1) de façon à faire apparaître le toroïde T^h, maximum dans G_1 ; en effet, soit T^l un toroïde maximum de G contenant T^h ; l'intersection $T^l \cap G_1$ se réduit à T^h (§ 4, n° 1) $T^h = T^l \cap G_1$. Or, $Z(G_1) \subset T^h$ et $Z(G) \subset T^l$; soit $x \in Z(G) \cap G_1$; on a $x \in Z(G) \cap T^h$; de plus, $x \in Z(G) \cap T^h$ entraîne $x \in Z(G) \cap G_1$; donc : $Z(G) \cap G_1 = Z(G) \cap T^h$, et

$$\boxed{Z(G_1) = Z(G) \cap T^h} \quad .$$

Proposition 2. Soient G un groupe de Lie clos, et G_1, G_2 deux sous-groupes propres de G tels que $G_1 \subset G_2$, G_1 étant un sous-groupe (H) ; alors les rangs de G_1, G_2, G forment une suite croissante.

Supposons que le rang de G_1 soit égal au rang de G_2 ; soient T^h un toroïde maximum de G_1 (T^h est aussi toroïde maximum de G_2), et T^l un toroïde maximum de G, tel que $T^h \subset T^l$. On a : $Z(G_1) \subset T^h$, $Z(G_2) \subset T^h$, $Z(G) \subset T^l$. Comme G_1 et G_2 n'appartiennent à aucun sous-groupe de rang maximum, on a : $Z(G_1) = Z(G) \cap T^h$, $Z(G_2) = Z(G) \cap T^h$, soit $Z(G_1) = Z(G_2)$. G_1 est ainsi un sous-groupe de G_2, ayant même rang, et même centre ; d'après un théorème établi antérieurement[28]), G_1 et G_2 sont identiques. En supposant $G_1 \neq G_2$, on a nécessairement $r(G_1) < r(G_2)$. G_2 étant un sous-groupe (H) de G, on a de même $r(G_2) < r(G)$.

Une conséquence immédiate de la proposition 2 est :

Soit $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \cdots \subset G$ une suite croissante de sous-groupes de G, le premier G_1 étant un sous-groupe (H) de G ; alors les rangs de ces sous-groupes forment une suite croissante

$$r(G_1) < r(G_2) < r(G_3) < \cdots < r(G) \quad .$$

Proposition 3. Soient G un groupe de Lie clos semi-simple de rang l, et G_1 un sous-groupe (H) de G ; tout paramètre angulaire de G est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments du tableau I (G, G_1).

---

[28]) cf. note 27, théorème 5, p. 214.

G étant semi-simple, et G_1 un sous-groupe (H) de G, G_1 est aussi semi-simple. Considérons le sous-groupe G' de rang l de G dont les paramètres angulaires sont toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers contenues dans $\Sigma(G)$ des éléments des tableaux I et I'. Tous les sous-groupes g_ρ, $\varrho \in \Sigma(G_1)$ de G_1 appartiennent à ce sous-groupe[29]; par conséquent, comme G_1 est semi-simple, $G_1 \subset G'$. On a donc nécessairement $G = G'$, c'est-à-dire que les combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments des tableaux I et I' contenues dans $\Sigma(G)$ recouvrent $\Sigma(G)$. D'après le théorème 6, il en est de même des combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments du tableau I; c'est ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, le tableau I contient l paramètres angulaires indépendants.

14. *Sur la diagonale principale d'un sous-groupe* (H).

L'examen de la diagonale principale d'un sous-groupe (H) montre que celle-ci ne peut occuper qu'une position très particulière dans le diagramme du groupe G; de plus, les paramètres angulaires du tableau I prennent une forme spéciale; de façon précise:

Théorème 8. *Soient G un groupe de Lie clos, G_1 un sous-groupe (H) de G; alors la diagonale principale de G_1 est une diagonale de G.*

De plus, si cette diagonale est définie par $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$, $\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_l$ dans G et par $\varrho_1 = \cdots = \varrho_h$ dans G_1, tout paramètre angulaire de G associé à l'un des $\varrho_1, \ldots, \varrho_h$ est de la forme $\varphi_{k+j} + \sum_{i=1}^{k} m_i \varphi_i$, les m_i étant des entiers non négatifs.

La diagonale principale R^1_+ de G_1, d'équation $\varrho_1 = \cdots = \varrho_h = t > 0$ appartient à un angle polyèdre fondamental $P(G)$ de G au moins, qu'on peut supposer défini par $\varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ étant l paramètres angulaires fondamentaux de G. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ ceux de ces paramètres qui s'annulent identiquement sur R^1.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$; $\beta_1, \ldots, \beta_{n_2}$; ...; $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ les suites respectivement associées à $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$; chaque paramètre angulaire de la suite $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ est une combinaison linéaire à coefficients nuls ou de même signe de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Sur tout point z de R^1_+, on a $\varrho_1 > 0, \ldots, \varrho_h > 0$ soit $\alpha_1 > 0, \ldots, \beta_1 > 0, \ldots, \gamma_{n_h} > 0$. Les paramètres angulaires $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Considérons par exemple:

---

[29]) § 5, No 4.

$$\alpha_1 = m_1\varphi_1 + \cdots + m_k\varphi_k + m_{k+1}\varphi_{k+1} + \cdots + m_l\varphi_l$$

et soit z le point de R^1_+ tel que $\varrho_1(z) = \cdots = \varrho_h(z) = 1$. Les paramètres angulaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ prennent sur z des valeurs entières, car z appartenant au centre de G_1 appartient au centre de G, d'après l'hypothèse (H) et d'après la proposition 1 ; ces valeurs sont de plus non négatives, vu que $z \in P(G)$. On a $\varphi_1(z) = \cdots = \varphi_k(z) = 0$ et certainement $\varphi_{k+j}(z) \neq 0$, sinon on aurait identiquement $\varphi_{k+j} = 0$ sur R^1. En résumé, sur z

$$1 = m_{k+1}\varphi_{k+1}(z) + \cdots + m_l\varphi_l(z)$$

($\varphi_{k+j}(z)$ entier positif, m_{k+j} entier positif ou nul). Parmi les m_{k+j}, qui ne sont pas tous nuls, un seul n'est pas nul, égal à 1 ; le facteur $\varphi_{k+j}(z)$ qui l'accompagne est lui-même égal à 1. Ainsi, α_1 est de la forme $\varphi_{k+j} + \sum_1^k m_i\varphi_i$; il en est de même de $\alpha_2, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$.

D'après cela, on a sur R^1 : $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$, et l'égalité des φ_{k+j} qui figurent dans l'expression de $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$; mais si φ_{k+1} par exemple ne figurait pas dans ces expressions, G ne pourrait être un sous-groupe (H). En résumé, on a sur R^1 : $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$, $\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_l$ et cette droite est une diagonale de G, ce qui achève la démonstration.

Le chapitre suivant est basé sur une conséquence importante du théorème 8 :

Proposition 4 : Si la diagonale principale d'un sous-groupe (H) est régulière, les paramètres angulaires du tableau I forment une permutation de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$.

En effet, si R^1 est régulière, on a $k = 0$, et les paramètres $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ sont de la forme $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$; comme deux paramètres du tableau I ne peuvent être identiques, et que la suite $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ contient l paramètres angulaires indépendants (d'après la remarque relative à la proposition 3, la suite $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$ est nécessairement une permutation de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, et la proposition est établie.

Je désigne par sous-groupe $(H)_k$ un sous-groupe (H) dont la diagonale principale est de la forme $\varphi_1 = \cdots = \varphi_k = 0$, $\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_l$. Alors, un sous-groupe (H) à diagonale principale régulière est un sous-groupe $(H)_0$. L'étude des sous-groupes $(H)_0$ est notablement plus simple que celle des sous-groupes $(H)_{k>0}$; cela est dû au fait que le centralisateur de la diagonale principale du sous-groupe est un toroïde maximum.

CHAPITRE III

Sous-groupes $(H)_0$ de rang supérieur à un

§ 9. Vecteurs du diagramme de G_1. Suites orthogonales

1. Soient G un groupe de Lie clos semi-simple de rang l, et G_1 un sous-groupe $(H)_0$ de G. Le tableau I (G, G_1) contient exactement l paramètres angulaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, fondamentaux pour G.

$$\mathrm{I} \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 : \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n_1} \\ \varrho_2 : \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2} \\ \ldots \\ \varrho_h : \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n_h} \end{array} \right.$$

Ainsi, la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ doit être appliquée convenablement sur ce tableau. Remarquons que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques extraits de $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{n_h}$ est négatif ou nul, et que tout paramètre angulaire de G est une combinaison linéaire à coefficients entiers nuls ou de même signe de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \ldots, \gamma_{n_h}$.

2. Comparons les vecteurs $\vec{\varrho}_i$ aux vecteurs $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{n_h}$. D'après la remarque faite à la fin du § 5, on a par exemple :

$$\vec{\varrho}_1 = \lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{\alpha}_n .$$

Proposition 1 : Le vecteur $\vec{\varrho}$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs qui lui sont associés.

En effet, $\vec{\varrho}_1$ étant une combinaison linéaire de $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ est un vecteur du sous-espace engendré par $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$. Ces vecteurs étant indépendants forment une base, et les composantes du tenseur métrique dans cette base sont : $a_{ij} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j$, avec $a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$. D'après un lemme de Stieltjès[30]), on a $a^{ij} \geq 0$. Cela étant, les composantes covariantes a_i de $\vec{\varrho}_1$ dans le repère envisagé sont $\vec{\varrho} \cdot \vec{\alpha}_i = \vec{\varrho}_1^2$ et sont toutes positives ; les composantes contravariantes a^i, données par $a^i = a^{ij} a_j$ sont encore toutes positives, et la proposition est établie.

---

[30]) *Stieltjes*, Oeuvres complètes, t. 2, LII, p. 73—75.

3. *Longueur du vecteur* $\vec{\varrho}$. On peut facilement évaluer la longueur du vecteur $\vec{\varrho}$ associé aux vecteurs $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$ lorsque ceux-ci ont la même longueur, égale à l'unité.

Proposition 2. Soient $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ *les vecteurs associés au vecteur* $\vec{\varrho}_1$ *de* G_1 ; si $|\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = \cdots = |\vec{\alpha}_n| = 1$, *alors on a* (1) $|\vec{\varrho}_1| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ *l'égalité n'étant atteinte que lorsque les* $\vec{\alpha}_i$ *sont orthogonaux deux à deux.*

Avec les notations précédentes, on a $\vec{\varrho}_1^2 = \sum_{i,j} a^{ij} \lambda_i \lambda_j$; or $\lambda_i = \lambda_j = \vec{\varrho}_1^2$ d'où $\vec{\varrho}_1^2 = \vec{\varrho}_1^2 \cdot \vec{\varrho}_1^2 (\sum_{i,j} a^{ij})$, soit :

$$\boxed{\vec{\varrho}_1^2 = \frac{1}{\sum_{i,j} a^{ij}} \; ; \qquad a_{ij} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j} \; .$$

Pour établir la relation proposée, il suffit de montrer qu'on a $\sum_{i,j} a^{ij} \geq n$; comme les a^{ij} sont positifs ou nuls, on peut se borner à établir la relation $\sum_i a^{ii} \geq n$, ou encore $a^{ii} \geq 1$. On a par exemple :

$$a^{11} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{2n} \\ a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}}{|a_{ij}|} = \frac{D}{\Delta} \; .$$

Or $\Delta = a_{11} D + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n}$; les mineurs A_{ij} sont positifs ou nuls, et les coefficients a_{ij} sont négatifs ou nuls. On peut poser ($a_{11} = 1$)

$$\Delta = D - k \; ; \qquad k \geq 0 \; ; \qquad D = \Delta + k \; ; \frac{D}{\Delta} = 1 + \frac{k}{\Delta} \geq 1 \; .$$

Maintenant, si l'un des a_{ij} $(i \neq j)$ n'est pas nul, l'un au moins des a^{ij} $(i \neq j)$ est positif, sinon (a^{ij}) est une matrice diagonale, ainsi que son inverse (a_{ij}). On a $\sum a^{ii} \geq n$ et $\sum_{i,j} a^{ij} > n$.

4. Les paramètres angulaires de G peuvent être facilement comparés à ceux du sous-groupe G_1 considéré, à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1. *Soit* ω *un paramètre angulaire de* G ; *il existe un paramètre angulaire* ϱ *de* G_1 *tel que* ω *soit une combinaison linéaire à coefficients entiers nuls ou tous de même signe des paramètres angulaires de* G *associés à* ϱ.

Comme le support R^h du diagramme de G_1 contient un élément régulier, ω ne s'annule pas identiquement dans R^h, et se réduit dans R^h à une forme linéaire $\overline{\omega}$; $\overline{\omega} = 0$ définit un $(h-1)$-plan de R^h. On a

$$\omega = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \cdots + m_l\varphi_l$$
$$m_1, m_2, \ldots, m_l \text{ entiers } \geq 0$$
$$\overline{\omega} = m'_1\varrho_1 + m'_2\varrho_2 + \cdots + m'_h\varrho_h$$
$$m'_1, m'_2, \ldots, m'_h \text{ entiers non tous nuls, } \geq 0$$

Deux cas doivent être distingués :

(a) $\overline{\omega} = 0$ coïncide avec l'un des $(h-1)$-plans $\varrho_i = 0$ du diagramme de G_1 ; on peut supposer qu'il s'agit de $\varrho_1 = 0$. Alors $\varrho_1 = 0$ entraîne $\overline{\omega} = 0$ quels que soient $\varrho_2, \ldots, \varrho_h$; il en résulte $m'_2 = \cdots = m'_h = 0$ et $\overline{\omega} = m'_1\varrho_1$, $\omega = n_1\alpha_1 + \cdots + n_{n_1}\alpha_{n_1}$. Le théorème est vérifié dans ce cas.

(b) $\overline{\omega} = 0$ ne coïncide pas avec l'un des $\varrho_i = 0$; on peut supposer $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ choisis en sorte que $\overline{\omega}$ s'annule en un point intérieur à $\varrho_1 > 0, \ldots, \varrho_h > 0$; l'expression donnée ci-dessus pour $\overline{\omega}$ prouve que cela n'est pas possible. Seul le cas (a) peut être envisagé et le théorème est établi.

Corollaire. Tout paramètre angulaire de G se réduit dans R^h à un multiple non nul d'un paramètre angulaire de G_1.

5. Soient ϱ_1 et ϱ_2 deux paramètres angulaires du tableau I $(\varrho_1, \varrho_2 \in \Sigma(G_1))$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2}$ les suites respectivement associées ; que peut-on dire des vecteurs $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_{n_1}, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{n_2}$ lorsque $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}_2$ sont orthogonaux ?

Proposition 3. Si les vecteurs $\vec{\varrho}_i$ et $\vec{\varrho}_j$ du tableau I (G, G_1) sont orthogonaux, alors tout vecteur associé au premier est orthogonal à tout vecteur associé au second.

En effet, $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}_2$ étant orthogonaux, $\varrho_1 + \varrho_2$ n'est pas un élément de $\Sigma(G_1)$. Si $\vec{\alpha}_1$, par exemple, n'est pas orthogonal à $\vec{\beta}_1$, on a $\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 < 0$ et $\alpha_1 + \beta_1$ appartient à $\Sigma(G)$. Mais $\alpha_1 + \beta_1$ se réduit dans R^h à $\varrho_1 + \varrho_2$ qui n'est pas le multiple d'un paramètre angulaire de G_1. $\vec{\alpha}_1$ est nécessairement orthogonal à $\vec{\beta}_1$; comme on peut faire ce raisonnement pour tout couple α_i, β_j, la proposition est établie.

Il est facile de donner une démonstration qui n'utilise pas le théorème 1 ; on a $\vec{\varrho}_1 = \lambda_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{n_1}\vec{\alpha}_{n_1}$ et $\vec{\varrho}_2 = \mu_1\vec{\beta}_1 + \cdots + \mu_{n_2}\vec{\beta}_{n_2}$, les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$ étant tous positifs (proposition 1). Formons le produit scalaire

$$\vec{\varrho}_1 \cdot \vec{\varrho}_2 = \Sigma\, \lambda_i \mu_j \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j \ .$$

Les produits $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j$ sont tous négatifs ou nuls, tandis que les coefficients $\lambda_i \mu_j$ sont positifs. Alors : (1) $\vec{\varrho}_1 \cdot \vec{\varrho}_2 = 0$ entraîne (2) $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j = 0$ quels que soient i et j. Remarquons que (2) entraîne (1).

6. *Proposition 4: Si G est simple, il en est de même de tout sous-groupe $(H)_0$.*

En effet, si le sous-groupe G_1 semi-simple n'est pas simple, la suite $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ se décompose en deux suites partielles $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_{h'}$ et $\vec{\varrho}_{h'+1}, \ldots, \vec{\varrho}_h$, tout vecteur de la première étant orthogonal à tout vecteur de la seconde. Alors, d'après la proposition 3, tous les vecteurs associés aux vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_{h'}$ sont orthogonaux à tous les vecteurs associés aux vecteurs $\vec{\varrho}_{h'+1}, \ldots, \vec{\varrho}_h$; G serait semi-simple, ce qui est contraire à l'hypothèse. G_1 est bien simple.

§ 10. Couple de suites non orthogonales

7. Si les vecteurs $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}_2$ ne sont pas orthogonaux, la somme $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ est un paramètre angulaire de G_1. Je me propose d'étudier les suites associées aux paramètres angulaires ϱ_1, ϱ_2 et $\varrho_1 + \varrho_2$; soit donc le tableau restreint:

$$\begin{cases} \varrho_1 : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1} \\ \varrho_2 : \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2} \\ \varrho \ : \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \end{cases}$$

Comme $\vec{\varrho}_1 \cdot \vec{\varrho}_2 < 0$, la position relative des deux vecteurs $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}_2$ est donnée par l'un des trois graphiques suivants:

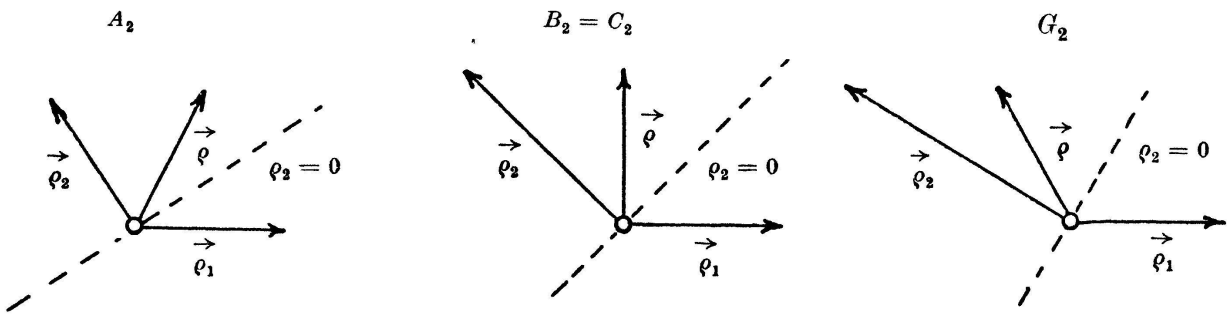


Fig. 3

On peut, en changeant au besoin les notations, supposer que $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}$ ont la même longueur; l'opération de $\Phi(G_1)$ qui produit dans R^h la

symétrie par rapport à $\varrho_2 = 0$ applique alors ϱ_1 sur ϱ. Le nombre des paramètres angulaires associés à ϱ_1 est égal au nombre n des paramètres associés à ϱ. L'opération σ de $\Phi(G_{\varrho_2})$ associée à la symétrie précédente applique la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sur la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; je choisis les notations en sorte que $\sigma\alpha_i = \omega_i$. On peut former les relations:

$$\vec{\varrho}_1 = \lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \lambda_2 \vec{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{\alpha}_n \qquad \lambda_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\vec{\varrho}_2 = \mu_1 \vec{\beta}_1 + \mu_2 \vec{\beta}_2 + \cdots + \mu_r \vec{\beta}_r \qquad \mu_j > 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

$$\vec{\varrho} = \lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{\omega}_n$$

8. Considérons la relation $\sigma\alpha_1 = \omega_1$; $\sigma = S_{\varrho_2}$ ajoute à α_1 une expression $m_1\beta_1 + \cdots + m_r\beta_r$:

$$\sigma\alpha_1 = \omega_1 = \alpha_1 + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + \cdots + m_r\beta_r \tag{1}$$

$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_r$ étant extraits de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, et le coefficient de α_1 étant positif, les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_r$ sont positifs ou nuls; (1) devient dans R^h

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2(\sum_1^r m_i) \tag{2}$$

d'où $\sum_1^r m_i = 1$; ainsi, parmi les nombres $m_1, \ldots, m_r$, un seul n'est pas nul, et est égal à un; je le désigne par m_j. On peut écrire

$$\sigma\alpha_1 = \omega_1 = \alpha_1 + \beta_j \ . \tag{3}$$

Supposons qu'il existe un paramètre β_i tel que $\alpha_1 + \beta_i = \omega_2$. D'après la relation (3), on a $\omega_2 = \sigma\alpha_2 = \alpha_2 + \beta_{i'}$, et $\alpha_1 + \beta_i = \alpha_2 + \beta_{i'}$, avec $i \neq i'$; mais cette relation est impossible, puisque les paramètres α_1, β_i, α_2, $\beta_{i'}$ sont indépendants. On peut énoncer:

Proposition 5 (*a*). *Etant donné un vecteur* $\vec{\alpha}_i$ *associé à* $\vec{\varrho}_1$, *il existe un vecteur* $\vec{\beta}_j$ *associé à* $\vec{\varrho}_2$ *et un seul tel que* $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j < 0$.

Remarque: le raisonnement précédent montre que, étant donné un vecteur $\vec{\omega}_i$ associé à $\vec{\varrho}$, il existe un vecteur $\vec{\alpha}_i$ associé à $\vec{\varrho}_1$ et un vecteur $\vec{\beta}_j$ associé à $\vec{\varrho}_2$, la somme des deux derniers étant égale au premier, avec $\sigma\alpha_i = \omega_i$.

J'étudie maintenant la relation $\vec{\varrho}_1 + \vec{\varrho}_2 = \vec{\varrho}$; elle peut s'écrire

$$\sum_1^n \lambda_i \vec{\alpha}_i + \sum_1^r \mu_i \vec{\beta}_i = \lambda_1(\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_{i_1}) + \cdots + \lambda_n(\vec{\alpha}_n + \vec{\beta}_{i_n}) \ ,$$

les vecteurs $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_r$ étant indépendants ; le second membre a été écrit en tenant compte de la remarque précédente. Comme $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont positifs, tous les vecteurs $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_r$ figurent au premier membre ; ils figurent donc tous au second membre. Un vecteur $\vec{\beta}_j$ donné figure nécessairement dans l'une des parenthèses ; il existe ainsi un $\vec{\alpha}_i$ tel que $\vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_j$ soit un vecteur du diagramme. D'où :

Proposition 5 (*b*). *Etant donné un vecteur* $\vec{\beta}_j$ *associé à* $\vec{\varrho}_2$, *il existe au moins un vecteur* $\vec{\alpha}_i$ *associé à* $\vec{\varrho}_1$, *tel que* $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j < 0$.

Les énoncés 5 (a) et 5 (b) peuvent être complétés par le suivant :

Proposition 5 (*c*). *Les vecteurs* $\vec{\beta}_j$ *associés à* $\vec{\varrho}_2$ *sont orthogonaux deux à deux.*

En effet, soient β_s et β_t deux paramètres angulaires associés à ϱ_2 ; d'après 5 (b), il existe deux paramètres α_s et α_t tels que $\alpha_s + \beta_s = \omega_s$ et $\alpha_t + \beta_t = \omega_t$; d'après 5 (a), β_s est l'unique β_j non orthogonal à α_s. Ainsi, $\sigma \alpha_s = \alpha_s + \beta_j$ donne $j = s$ et $\sigma \alpha_s = \alpha_s + \beta_s = \omega_s$; de même $\sigma \alpha_t = \alpha_t + \beta_t = \omega_t$. On a

$$\vec{\alpha}_s \cdot \vec{\alpha}_t = \vec{\omega}_s \cdot \vec{\omega}_t \,, \qquad \text{ou:} \qquad \vec{\alpha}_s \cdot \vec{\alpha}_t = (\vec{\alpha}_s + \vec{\beta}_s)(\vec{\alpha}_t + \vec{\beta}_t)$$

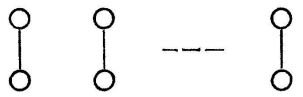
Comme $s \neq t$, on a $\vec{\alpha}_s \cdot \vec{\beta}_t = 0$, $\vec{\alpha}_t \cdot \vec{\beta}_s = 0$, d'ou $\vec{\alpha}_s \cdot \vec{\alpha}_t = \vec{\alpha}_s \cdot \vec{\alpha}_t + \vec{\beta}_s \cdot \vec{\beta}_t$ et $\vec{\beta}_s \cdot \vec{\beta}_t = 0$ quel que soit $s \neq t$.

Les propositions 5 entraînent le théorème suivant :

9. **Théorème 2.** *Si les vecteurs* $\vec{\varrho}_1$ *et* $\vec{\varrho}_2$ *extraits de* $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ *forment un angle de 120°, on a :*

$$\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j = \vec{\beta}_i \cdot \vec{\beta}_j = 0 \quad (i \neq j) \qquad \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_j = 0 \quad (i \neq j) \,; \qquad \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\beta}_i < 0$$

Autrement dit, la figure de Schläfli qui représente les suites associées à ϱ_1 et à ϱ_2 est :



En effet, il résulte de l'hypothèse que les vecteurs $\vec{\varrho}_1$ et $\vec{\varrho}_2$ ont la même longueur et qu'ils peuvent être permutés dans les raisonnements précé-

dents. Alors, les vecteurs d'une même ligne sont orthogonaux deux à deux, et un vecteur de l'une des lignes est orthogonal à tous les vecteurs de l'autre, sauf à l'un d'entre eux, c. q. f. d.

Remarque: On a nécessairement $n \geq r$, comme le montre la démonstration de 5 (b).

§ 11. Sur les inclusions possibles

10. Soient G un groupe simple clos, et G_1 un sous-groupe $(H)_0$ de G, de rang h; le but de ce paragraphe est de trouver quand l'inclusion $G_1 \subset G$ est possible en vertu des conditions nécessaires établies au paragraphe 10, dans le cas où le rang h de G_1 est au moins égal à deux. Je montre d'abord que le sous-groupe G_1 n'est pas quelconque:

Proposition 6. Parmi les sous-groupes $(H)_0$ propres d'un groupe simple G, il n'y a jamais l'un des groupes A_h, D_h, E_6, E_7, E_8 $(h \geq 2)$.

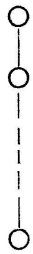


Fig. 4

Supposons que G_1 soit de l'un des types A_h, D_h, E_i, avec un rang supérieur à un; alors les vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ ont tous la même longueur; $\Phi(G_1)$ opère transitivement sur eux. Si G_1 est du type A_h, $\mathfrak{F}(G_1)$ est représentée par la figure 4. Les suites associées ont un nombre d'éléments fixe, égal à n. Il résulte du théorème 2 que la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ a la structure indiquée par la figure 5. Il ne peut y avoir d'autres traits que ceux qui sont indiqués; pour deux lignes associées à ϱ_i et ϱ_j avec $\vec{\varrho}_i \cdot \vec{\varrho}_j < 0$, cela résulte du théorème 2; si $\vec{\varrho}_i \cdot \vec{\varrho}_j = 0$, c'est une conséquence de la proposition 2 du § 9. Ainsi, on a nécessairement $n = 1$, sinon G n'est pas simple. Un raisonnement analogue peut être appliqué aux cas D_h et E_i, c. q. f. d.

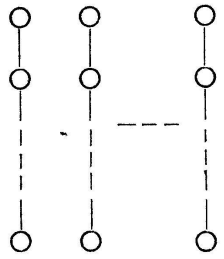


Fig. 5

G_1 est nécessairement de l'un des types B_h, C_h, F_4, G_2. Remarquons que la proposition 6 est évidente pour $G_1 = D_2$ qui n'est pas simple. Il est commode de séparer maintenant les cas $h = 2$ et $h > 2$.

I. *Le rang de G_1 est supérieur à 2.*

11. A son tour, le groupe G n'est pas quelconque:

Proposition 7: Tout groupe de l'un des types B_l, C_l, F_4 ne contient aucun sous-groupe $(H)_0$ propre de rang supérieur à deux.

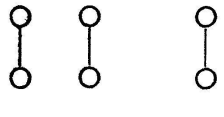


Fig. 6

Le rang de G_1 est supérieur à 2 ; je peux supposer $|\vec{\varrho}_1| = |\vec{\varrho}_2|$, $\vec{\varrho}_1 \cdot \vec{\varrho}_2 < 0$, $\vec{\varrho}_1 \cdot \vec{\varrho}_i = 0$ $(i > 2)$; alors la figure de Schläfli est appliquée sur le tableau I (G, G_1) comme indiqué dans la figure 6, le contenu des $(h-2)$ dernières lignes n'étant pas précisé. Soit n le nombre des éléments dans chacune des deux premières lignes ; on ne peut avoir $n \geq 3$, sinon la figure connexe $\mathfrak{F}(G)$ présenterait plus de deux terminaisons à deux éléments au moins (Chapitre I, n° 12 (b)). Si $n = 2$, $\mathfrak{F}(G)$ présente deux terminaisons à trait simple, et G n'est pas de l'un des types B_l ou C_l ; comme il y a plus de quatre éléments dans $\mathfrak{F}(G)$, G n'est pas non plus du type F_4. Cela étant, si $n = 1$, chaque ligne associée à $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ ne contient qu'un seul élément ; dans le cas contraire, il se présente la figure 7, la première ligne non marquée contenant deux éléments au moins. D'après la proposition 5 (a), le dernier point marqué est d'ordre 3 au moins, ce qui ne peut se présenter si G est de l'un des types B_l, C_l, F_4. Mais alors, le rang de G_1 est égal au rang de G, ce qui entraîne $G_1 = G$. La proposition est établie.

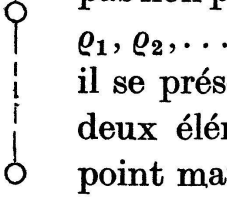


Fig. 7

Maintenant, dans la recherche des sous-groupes $(H)_0$ propres de G, de rang supérieur à deux, je peux me borner à chercher, dans les groupes simples du type A_l, D_l, E_i, les sous-groupes de l'un des types B_h, C_h, F_4. Il convient de se donner le sous-groupe G_1 et de chercher les groupes G tels que $G_1 \underset{H_0}{\subset} G$.

12. *Cas où G_1 est un groupe simple du type B_h ou C_h.* $\mathfrak{F}(G_1)$ est (Fig. 8) :

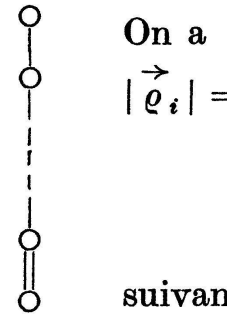


Fig. 8

On a $\vec{\varrho}_i \cdot \vec{\varrho}_{i+1} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$, sinon $\vec{\varrho}_i \cdot \vec{\varrho}_j = 0$ et $|\vec{\varrho}_i| = |\vec{\varrho}_1|$ $(i = 2, 3, \ldots, h-1)$ avec :

$$\frac{|\vec{\varrho}_h|}{|\vec{\varrho}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{|\vec{\varrho}_h|}{|\vec{\varrho}_1|} = \sqrt{2}$$

suivant que $G_1 = B_h$ ou $G_1 = C_h$. Le nombre des éléments associés à l'un des pyramètres $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{h-1}$ est constant, égal à n ; soit encore s le nombre des paramètres associés à ϱ_h. Comme au numéro 11, on ne peut avoir $n \geq 3$. En discutant les cas $n = 1$ et $n = 2$ conformément aux propositions 5, et en se servant de l'inégalité $|\vec{\varrho}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ (n° 3 du § 9), on obtient $s = 1$ ou 2, et les résultats consignés dans le tableau ci-dessous, qui contient aussi l'unique cas $G_1 = F_4$.

Tableau des inclusions $G_1 \underset{H_0}{\subset} G$ *possibles, le rang de* G_1 *étant* > 2.

$$\begin{array}{c|l}
1 & \varrho_1 : \varphi_1 \\
1 & \varrho_2 : \varphi_2 \\
 & \vdots \\
1 & \varrho_{h-1} : \varphi_{l-2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_h : \varphi_{l-1} \quad \varphi_l
\end{array}$$

$B_h \subset D_{h+1}$

$$\begin{array}{c|l}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_l \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_2 : \varphi_2 \quad \varphi_{l-1} \\
 & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_{h-1} : \varphi_{h-1} \quad \varphi_{h+1} \\
1 & \varrho_h : \varphi_h
\end{array}$$

$C_h \subset A_{2h-1}$

$$\begin{array}{c|l}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_l \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_2 : \varphi_2 \quad \varphi_{l-1} \\
 & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_{h-1} : \varphi_{h-1} \quad \varphi_{h+2} \\
\frac{1}{2} & \varrho_h : \varphi_h — \varphi_{h+1}
\end{array}$$

$B_h \subset A_{2h}$

$$\begin{array}{c|l}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_5 \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \varrho_2 : \varphi_2 \quad \varphi_4 \\
1 & \varrho_3 : \varphi_3 \\
1 & \varrho_4 : \varphi_6
\end{array}$$

$F_4 \subset E_6$

Les vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ obtenus ont les longueurs indiquées à gauche de chaque tableau I (G, G_1); ils correspondent bien aux inclusions indiquées au-dessous de chaque I.

II. *Le rang de* G_1 *est égal à deux.*

13. Ce cas ne peut être traité comme précédemment, puisque G_1 est nécessairement l'un des groupes B_2 ou G_2, les deux vecteurs fondamentaux n'ayant pas la même longueur. Par contre, on peut faire usage du théorème 1, § 9. Le tableau I (G, G_1) est

$$\text{I} \quad \begin{cases} \varrho_1 : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \varrho_2 : \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \end{cases} \qquad (r < n)$$

avec les notations du no 6 (§ 10). Si $G_1 = B_2$ ou $G_1 = G_2$, les paramètres angulaires positifs du sous-groupe envisagé sont respectivement:

$$\begin{cases} \varrho_1 & \varrho_1 + \varrho_2 \\ \varrho_2 & 2\varrho_1 + \varrho_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varrho_1 & \varrho_1 + \varrho_2 & 3\varrho_1 + \varrho_2 \\ \varrho_2 & 2\varrho_1 + \varrho_2 & 3\varrho_1 + 2\varrho_2 \end{cases}$$

14. *Proposition 7′: Tout groupe de l'un des types* B_l, C_l, F_4 *excepté éventuellement* B_3, *ne contient aucun sous-groupe* $(H)_0$ *de rang 2.*

Posons d'abord $G = B_l$ ou C_l; la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ peut être appliquée sur le tableau I de deux façons:

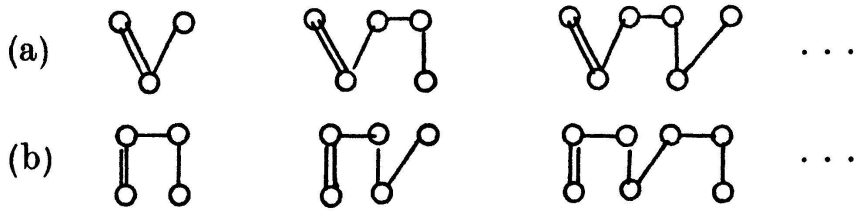


Fig. 9

Je tiens compte ici des propositions 5 (a), (b) et (c). Dans la première ligne, chaque figure est contenue dans la suivante; il en est de même dans la seconde ligne. Les paramètres angulaires fondamentaux sont numérotés en partant de l'élément extrême gauche. Alors, avec ces notations, $\omega = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4$ est un paramètre angulaire de B_4, $B_5, B_7, \ldots$; (ligne (b)), qui se réduit à $4\varrho_1 + 3\varrho_2$ dans le sous-éspace R^2; mais cette forme n'est pas le multiple d'un paramètre angulaire de B_2 ou de G_2. Les dispositions indiquées par la ligne (b) doivent être éliminées.

Pour étudier la ligne (a), je pose $\omega = 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, qui est un paramètre angulaire de $B_5, B_6, \ldots$; on a, dans R^2, $\omega = 4\varrho_1 + \varrho_2$, qui n'est pas le multiple d'un paramètre angulaire de B_2 ou de G_2. En résumé, parmi les groupes B_l, seul B_3 contient éventuellement un sous-groupe $(H)_0$ de rang 2. Un raisonnement analogue élimine tous les groupes $C_3, C_4, \ldots$, et F_4.

15. Quels sont maintenant les groupes de l'un des types A_l, D_l, E_i qui peuvent contenir un sous-groupe $(H)_0$ de rang 2?

Proposition 8. Les seuls groupes de l'un de types A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 qui sont susceptibles de contenir un sous-groupe $(H)_0$ de rang 2 sont A_3, A_4, A_6, D_4.

$G = A_l$. Deux dispositions sont possibles (Figure 10):

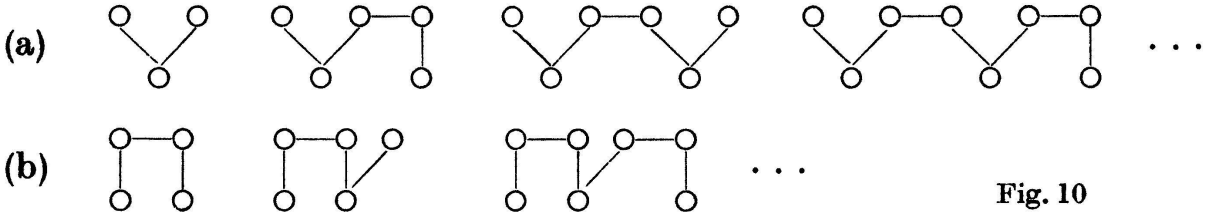


Fig. 10

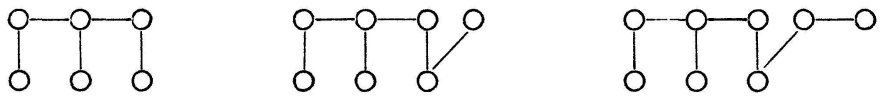
Dans une même ligne, chaque figure contient la précédente. Les paramètres angulaires sont numérotés en partant de l'élément extrême gauche. Avec ces notations, $\omega = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_7$ est un paramètre angulaire de $A_7, A_8, A_9, \ldots$ (ligne (a)), se réduisant à $5\varrho_1 + 2\varrho_2$ dans R^2. Les groupes A_l $(l \geq 7)$ sont exclus (disposition (a)). A_5 doit être éliminé, car $|\vec{\varrho}_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|\vec{\varrho}_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Seuls restent A_3 et A_6.

Etudions la disposition (b); $\omega = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_7$ est un paramètre angulaire de $A_7, A_8, A_9, \ldots$ se réduisant à $4\varrho_1 + 3\varrho_2$ dans R^2; A_6 disposé suivant (b) ne convient pas, et A_5 non plus, comme tout à l'heure. Seul reste A_4.

En résumé, si un groupe A_l contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang 2, on a nécessairement $G = A_3, A_4, A_6$.

$G = D_l$ $(l \geq 3)$. On a $D_3 = A_3$, qui convient. Pour D_4, seule la disposition où le point triple est seul dans la seconde ligne est compatible avec les propositions 5. Ces mêmes propositions montrent que $D_5, D_6 \ldots$ ne conviennent pas.

$G = E_6, E_7, E_8$. Les figures de Schläfli montrent qu'il existe dans les trois cas une terminaison à deux éléments issue du point triple. Il en résulte que ce dernier ne peut figurer dans la seconde ligne. S'il figure dans la première ligne, on a les dispositions suivantes Fig. 11



La dernière ne convient pas (propositions 5) ; les deux autres également comme on le voit en calculant dans R^2 la valeur des paramètres angulaires dominants des groupes E_6, E_7. La proposition 8 est maintenant établie.

Tableau des inclusions $G_1 \underset{H_0}{\subset} G$ *possibles, le rang de* G_1 *étant égal à* 2.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_3$	$\frac{1}{2}$	$\varrho_1 : \varphi_2 — \varphi_3$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_3 — \varphi_4 \quad \varphi_6$
1	$\varrho_2 : \quad \varphi_2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\varrho_2 : \varphi_1 \quad \varphi_4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\varrho_2 : \quad \varphi_2 \quad \varphi_5$
$B_2 \subset A_3$		$B_2 \subset A_4$		$G_2 \subset A_6$	

$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$\varrho_1 : \varphi_1 \quad \varphi_3$
1	$\varrho_2 : \quad \varphi_2$	$\sqrt{2}$	$\varrho_2 : \quad \varphi_2$
$G_2 \subset D_4$		$G_2 \subset B_3$	

Les figures $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ obtenues correspondent aux inclusions indiquées, les longueurs $|\vec{\varrho}_i|$ ayant été calculées au moyen de la formule du no 3 § 9. Les deux premières inclusions ont déjà été obtenues au numéro 12.

16. En résumé, dans l'étude des sous-groupes $(H)_0$ de rang ≥ 2, les conditions nécessaires des § 9 et 10 ont montré qu'il ne peut subsister qu'un nombre très restreint d'inclusions, présentées dans les tableaux des numéros 12 et 15. Nous verrons que ces inclusions se présentent effectivement au chapitre suivant, qui traite des sous-groupes $(H)_0$ de rang un ; dans ce cas, les méthodes du présent chapitre sont inopérantes.

CHAPITRE IV

Sous-groupes $(H)_0$ de rang un

§ 12. Existence des sous-groupes $(H)_0$ de rang un

1. S'il existe dans G un sous-groupe $(H)_0$ de rang un, le tableau I relatif à ce sous-groupe est :

$$\varrho : \quad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l \ .$$

Seules les propositions 1 et 2 du § 9 conservent un sens, sans donner d'ailleurs de critère. En se servant des méthodes infinitésimales, on peut montrer que tout groupe de Lie clos semi-simple contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un. Cette proposition est établie dans ce § 12 qui n'emprunte aux chapitres II et III que la définition des sous-groupes (H).

2. *Anneau complexe* $\mathfrak{R}$[31]). C'est un espace vectoriel complexe, somme directe de deux sous-espaces $\mathfrak{R}^l$ et $\mathfrak{R}^{2m}$. En choisissant dans $\mathfrak{R}^l$ une base S, on peut décomposer $\mathfrak{R}^l$ en deux sous-espaces R_1^l et R_2^l, qui sont respectivement la composante réelle et la composante imaginaire de $\mathfrak{R}^l$.

Soit Σ l'ensemble des racines de $\mathfrak{R}$; il est constitué par $2m$ formes linéaires $\pm\mu_1(x), \ldots, \pm\mu_m(x)$ des coordonnées d'un point x variable dans $\mathfrak{R}^l$; on a :

$$\mu_i(x) = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} x^j$$

les x^j étant les coordonnées de x dans la base S. Les coefficients a_{ij} sont des nombres rationnels réels.

Il existe un isomorphisme additif de Σ sur un sous-ensemble Σ_h de vecteurs de R_1^l ; à la racine $\alpha \in \Sigma$ correspond un vecteur $h_\alpha \in \Sigma_h$, avec :

$$\boxed{\begin{array}{ll} h_\alpha + h_\beta = h_{\alpha+\beta} & \\ h_\alpha \qquad\quad = -h_{-\alpha} & \alpha(h_\alpha) \neq 0 \end{array}}$$

[31]) Cf. *H. Weyl*, Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen (Math. Zeitschr., t. 24, 1926, p. 371—375).

De plus, il existe une correspondance biunivoque entre Σ et un ensemble de $2m$ vecteurs $e_{\mu_1}, e_{-\mu_1}, \ldots, e_{\mu_m}, e_{-\mu_m}$ formant une base de $\mathfrak{R}^{2m}$. Cela posé, la structure de l'anneau de Lie semi-simple $\mathfrak{R}$ est définie par les formules :

$[h, h'] = 0$	$(h, h' \in \mathfrak{R}^l)$	$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}\, e_{\alpha+\beta}$	
$[h, e_\alpha] = \alpha(h)\, e_\alpha$		$N_{\alpha\beta} = 0$	si $\alpha + \beta \notin \Sigma$
$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$		$N_{\alpha\beta} \neq 0$	si $\alpha + \beta \in \Sigma$
		$N_{\alpha\beta}$ réel ;	$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}$

En particulier, si

$$y = \lambda_1 e_{\mu_1} + \lambda_1' e_{-\mu_1} + \cdots + \lambda_m e\, \mu_m + \lambda_m' e - \mu_m$$

on a

$$[h, y] = \mu_1(h)\, \lambda_1 e_{\mu_1} - \mu_1(h)\, \lambda_1' e_{-\mu_1} + \cdots + \mu_m(h)\, \lambda_m e_{\mu_m} - \mu_m(h)\, \lambda_m' e_{-\mu_m} .$$

3. *Anneau réel R à structure close.* Soit Π_{μ_i} le plan de $\mathfrak{R}^{2m}$ lieu des vecteurs $b\, e_{\mu_i} + \bar{b}\, e_{-\mu_i}$; le sous-espace $R = R_2^l + \Pi_{\mu_1} + \cdots + \Pi_{\mu m}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{R}$, à structure réelle close ; il engendre un groupe clos G semi-simple. Les racines de R sont les formes $\pm\mu_j(x)$, $x \in R_2^l$; on peut poser : $\mu_j(x) = i\, \nu_j(x)$, $\nu_j(x)$ étant une forme linéaire des coordonnées de x dans la base iS.

Cela étant, le groupe adjoint linéaire de G laisse invariante dans R une forme quadratique définie positive se réduisant dans R_2^l à $\Sigma\, \nu_j^2(x)$. En posant $\vec{\nu}_j = i\, h_{\mu j}$, on a $\nu_j(x) = -\vec{\nu}_j \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in R_2^l$.

Je suppose maintenant que $\pm\nu_1, \ldots, \pm\nu_m$ sont des combinaisons linéaires entières de $\nu_1, \ldots, \nu_l$, à coefficients nuls ou de même signe. Alors $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_l > 0$ définit une diagonale principale R_1 de R_2^l, et on a $g_{ij} = \vec{\nu}_i \cdot \vec{\nu}_j \leq 0$ $(i \neq j\,;\, i, j = 1, \ldots, l)$. En particulier, $\mu_i - \mu_j$ n'est pas une racine de $\mathfrak{R}$.

4. *Existence du sous-groupe $(H)_0$ de rang un.* Soit $h \in R^1$; on a $\mu_1(h) = \cdots = \mu_l(h) = it$ (t paramètre réel). Posons

$$y = \lambda_1 e_{\mu_1} + \bar{\lambda}_1 e_{-\mu_1} + \cdots + \lambda_l e_{\mu_l} + \bar{\lambda}_l e_{-\mu_l} \qquad (y \in R)$$

ou

$$y = (\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_l, \bar{\lambda}_l)$$

puis

$$y' = (i\, \lambda_1, -i\, \bar{\lambda}_1, \ldots, i\, \lambda_l, -i\, \bar{\lambda}_l) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

ces deux vecteurs déterminent un plan $\Pi \subset \Pi_{\mu_1} + \cdots + \Pi_{\mu_l}$. On a

$$[h, y] = (it\lambda_1, -it\bar{\lambda}_1, \ldots, it\lambda_l, -it\bar{\lambda}_l) = ty' ,$$
$$[h, y'] = (-t\lambda_1, -t\bar{\lambda}_1, \ldots, -t\lambda_l, -t\bar{\lambda}_l) = -ty .$$

Le plan Π est invariant par la transformation infinitésimale h. Maintenant

$$[y, y'] = -2i\sum_1^l \lambda_j\bar{\lambda}_j[e_{\mu_j}, e_{-\mu_j}] + 2\left\{\sum_{k<j}^{1,\ldots,l}(i\bar{\lambda}_k\lambda_j[e_{-\mu_k}, e_{\mu_j}] - i\lambda_k\bar{\lambda}_j[e_{\mu_k}, e_{-\mu_j}])\right\} .$$

Comme $\mu_i - \mu_j$ n'est pas un paramètre angulaire, on a $(i \neq j)$:

$$[y, y'] = -2i\sum_1^l \lambda_j\bar{\lambda}_j h_{\mu_j} = -2\sum_1^l \lambda_j\bar{\lambda}_j\vec{v}_j .$$

Peut-on disposer des λ_j en sorte que $[y, y'] \in R^1$? Etudions le vecteur $\vec{\omega} = \sum_1^l \lambda_j\bar{\lambda}_j\vec{v}_j$. Lorsque $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ varient, $\vec{\omega}$ décrit dans R_2^l l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_l$ (premier quadrant). Posons $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = g_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, l)$; alors $g^{ij} \geq 0$[32]). Les composantes covariantes h_j du vecteur $h = \vec{h}$ sont égales, à 1 par exemple. Alors: $h^k = \sum_{j=1}^l g^{kj} > 0$, ce qui signifie que $\vec{h}$ appartient au premier quadrant. Le système $\lambda_j\bar{\lambda}_j = h^j$ admet la solution $\lambda_j = \sqrt{h^j}$ $(j = 1, \ldots, l)$. Avec ces valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, on a

$$[h, y] = ty' \qquad [h, y'] = -ty \qquad [y, y'] = sh \qquad (t,\ s \text{ nombres réels})$$

ce qui montre qu'il existe un sous-anneau simple r à trois paramètres dans R, contenant la diagonale principale R^1, avec $r = R^1 + \Pi$, et $\Pi_{\mu_1} + \cdots + \Pi_{\mu_l}$ étant le sous-espace $\Sigma\Pi_{\mu_j}$ minimum qui contient Π. On peut énoncer:

Théorème 1. *Soient G un groupe de Lie semi-simple clos, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ l paramètres angulaires fondamentaux de G, $\varphi_1 = \cdots = \varphi_l$ une diagonale principale R^1 de G, et Π_{φ_i} le plan de $R(G)$ associé au paramètre φ_i; il existe dans G un sous-groupe g simple de rang un, tel que $R(g) = R^1 + \Pi$. $\Pi_{\varphi_1} + \cdots + \Pi_{\varphi_l}$ étant le sous-espace $\Sigma\Pi_{\varphi_i}$ minimum qui contient Π.*

C'est le théorème 1 du chapitre II qui permet de passer du sous-anneau r au sous-groupe g. Je dis maintenant que g est un sous-groupe $(H)_0$ de G.

En effet, supposons $g \subset G'$, G' étant un sous-groupe de rang l de G. g contient un sous-groupe t à un paramètre recouvert par R^1 et t appar-

---

[32]) Voir note 30 du chapitre III.

tient à un toroïde maximum T^l de G' ; comme t contient un élément régulier dans G, T^l est l'unique toroïde maximum de G qui contient t et est précisément le toroïde recouvert par R^l. G' est ainsi déterminé par T^l et par $\Pi_{\varphi_1}, \ldots, \Pi_{\varphi_l}$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont alors des paramètres angulaires de G', d'où $G' = G$, et $g \underset{H}{\subset} G$. La diagonale principale R^1 de g étant régulière dans G, on a bien $g \underset{H_0}{\subset} G$. D'où :

Théorème 1′. *Tout groupe de Lie clos semi-simple contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un.*

Généralisons un peu : si G n'est pas abélien, sa composante semi-simple contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un, qui est aussi $(H)_0$ dans G, d'où :

Théorème 1″. *Tout groupe de Lie clos non abélien contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un.*

Il est avantageux de caractériser les sous-groupes trouvés d'une manière qui ne fasse pas apparaître le diagramme. Considérons *un sous-groupe (H) de rang un g contenant un élément z régulier dans G*. Il existe un sous-groupe fermé à un paramètre de g joignant l'élément neutre e à z ; ce sous-groupe contenant un élément régulier est représenté dans le diagramme R^l de G par une droite qui contient un élément régulier ; comme g n'est pas contenu dans un sous-groupe de rang l, cette droite R^1 est une diagonale principale de R^l. Si l'équation de R^1 est $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_l$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ sont l paramètres angulaires fondamentaux de G, le plan Π tel que $R(g) = R^1 + \Pi$ appartient nécessairement à $\Pi_{\varphi_1} + \cdots + \Pi_{\varphi_l}$, sinon g est contenu dans un sous-groupe de rang l. En résumé, un sous-groupe (H) de rang un qui contient un élément régulier est un sous-groupe $(H)_0$ de rang un, et est représenté par la diagonale principale R^1 dans R^l.

Théorème 1‴. *Tout groupe de Lie clos non abélien contient un sous-groupe (H) de rang un contenant un élément régulier.*

Dès maintenant j'appelle *sous-groupe principal* un tel sous-groupe de rang un.

§ 13. Propriétés des sous-groupes principaux

5. Un sous-groupe principal contient un élément régulier et n'est pas contenu dans un sous-groupe de rang maximum de G ; ces propriétés sont invariantes par tout automorphisme ; donc, tout sous-groupe déduit

d'un sous-groupe principal par un automorphisme est encore un sous-groupe principal. Il se trouve même que les sous-groupes principaux forment une seule classe de sous-groupes conjugués.

Théorème 2. *Deux sous-groupes principaux sont conjugués.*

Soient g_1 et g_2 deux sous-groupes principaux dans le groupe G ; considérons deux toroïdes T_1^1 et T_2^1, maximums respectivement dans g_1 et g_2 ; ils appartiennent respectivement à deux toroïdes T_1^l et T_2^l, maximums dans G, conjugués dans G ; soit σ l'automorphisme intérieur de G qui applique T_2^l sur T_1^l ; σ applique g_2 sur un sous-groupe simple de rang un, et T_2^1 sur $T_2^{1'} \subset T_1^l$. On peut donc supposer T_1^1 et T_2^1 dans un même toroïde T^l. Dans $R^l = R(T^l)$, $R(T_1^1)$ et $R(T_2^1)$ sont deux diagonales principales ; il existe un automorphisme intérieur de G qui conserve T^l en appliquant T_2^1 sur T_1^1. En résumé, on peut se ramener au cas où g_1 et g_2 coupent un toroïde T^l suivant un sous-groupe à un paramètre représenté dans R^l par une même diagonale principale R^1.

Soient donc : $R(g_1) = R^1 + \Pi$, $R(g_2) = R^1 + \Pi'$; les plans Π et Π' sont tous deux contenus dans le sous-espace $\Pi_{\varphi_1} + \cdots + \Pi_{\varphi_l}$, les paramètres $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ étant fondamentaux, et $\varphi_1 = \cdots = \varphi_l$ étant l'équation de R^1.

Considérons le repère $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$ de R^l, et soit $\vec{v} = r_1 \vec{\varphi}_1 + \cdots + r_l \vec{\varphi}_l$ un vecteur de R^1 $(r_i > 0)$. En adoptant les notations du § 12, on voit qu'il existe dans Π deux vecteurs

$$(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_l, \bar{\lambda}_l) \quad \text{et} \quad (i\,\lambda_1, -i\,\bar{\lambda}_1, \ldots, i\,\lambda_l, -i\,\bar{\lambda}_l \tag{1}$$

dont le crochet est $\vec{v}$, avec $\lambda_i \bar{\lambda}_i = r_i$. De même, il existe dans Π' deux vecteurs

$$(\lambda_1', \bar{\lambda}_1', \ldots, \lambda_l', \bar{\lambda}_l') \quad \text{et} \quad (i\,\lambda_1', -i\,\bar{\lambda}_1', \ldots, i\,\lambda_l', -i\,\bar{\lambda}_l') \tag{2}$$

de crochet $s\vec{v}$, avec $s > 0$, $\lambda_j' \bar{\lambda}_j' = s r_j$; alors il existe dans Π' deux vecteurs $(s^{-\frac{1}{2}} \lambda_1', \ldots, s^{-\frac{1}{2}} \bar{\lambda}_l')$, $(i s^{-\frac{1}{2}} \lambda_1', \ldots, -i s^{-\frac{1}{2}} \bar{\lambda}_l')$ de crochet $\vec{v}$. Je désigne ces deux vecteurs par la notation (2). Ainsi, on a $\lambda_j \bar{\lambda}_j = \lambda_j' \bar{\lambda}_j' = r_i$.

Les nombres λ_j et λ_j' ont le même module ; il existe l nombres réels $\nu_1, \ldots, \nu_l$ tels que $\lambda_j' = e^{2\pi i \nu_j} \lambda_j$; de plus, on peut trouver dans R^l un point y tel que $\varphi_j(y) = \nu_j$. Alors l'automorphisme intérieur déterminé par y applique les vecteurs (1) sur les vecteurs (2) et g_1 sur g_2. Ces deux sous-groupes sont bien conjugués.

6. L'existence des sous-groupes principaux permet de formuler autrement l'hypothèse $(H)_0$.

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe G_1 de G soit un sous-groupe $(H)_0$ est que G_1 contienne un sous-groupe principal dans G.*

La condition est suffisante : Soient g et G_1 deux sous-groupes de G tels que $g \subset G_1$, g étant un sous-groupe principal dans G. Tout d'abord, G_1 est un sous-groupe (H) de G, sinon g serait contenu dans un sous-groupe de rang maximum l de G, ce qui n'est pas. Maintenant, un sous-groupe G_1' de G_1 qui contient g a nécessairement un rang inférieur au rang de G_1 (proposition 2 § 8) ; donc g n'est pas contenu dans un sous-groupe de G_1 ayant même rang ; g est un sous-groupe (H) de G_1. La diagonale principale de g est ainsi une diagonale de G_1, et comme elle est régulière dans G par hypothèse, elle est aussi régulière dans G_1 ; c'est une diagonale principale de G_1. Ainsi, la diagonale principale de G_1 est régulière, et G_1 est un sous-groupe $(H)_0$ de G.

Cette démonstration entraîne la remarque suivante :

Remarque : *Si $g \subset G_1$ est principal dans G, g est principal dans G_1.*

La condition est nécessaire : Considérons un sous-groupe G_1 sous-groupe $(H)_0$ de G ; je dis que G_1 contient un sous-groupe principal de G. Soit g un sous-groupe principal dans G_1 ; la diagonale principale R^1 de g admet l'équation $\varrho_1 = \cdots = \varrho_h$, où $\varrho_1, \ldots, \varrho_h$ sont h paramètres angulaires fondamentaux de G_1. Comme G_1 est un sous-groupe $(H)_0$ de G, $\varrho_1 = \cdots = \varrho_h$ entraîne $\varphi_1 = \cdots = \varphi_l$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ sont l paramètres angulaires fondamentaux de G ; ainsi R^1 est une diagonale principale de G, et $\vec{\varrho} \in R^1$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$. Soit $R(g) = R^1 + \Pi$; Π appartient au sous-espace $\Pi_{\rho_1} + \cdots + \Pi_{\rho_h}$ qui est lui-même contenu dans le sous-espace $\Pi_{\varphi_1} + \cdots + \Pi_{\varphi_l}$; ce dernier est de plus le sous-espace $\Sigma \Pi_{\varphi_i}$ minimum contenant Π, sinon $\vec{\varrho}$ ne pourrait être une combinaison linéaire à coefficients positifs de $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$. De là résulte $g \underset{H_0}{\subset} G$, et g est un sous-groupe principal de G.

Remarque : Un sous-groupe g principal dans un sous-groupe $(H)_0$ de G est principal dans G.

7. **Théorème 4.** *Soient $G = G' + G'' + \cdots$ un groupe de Lie clos, G' étant la composante connexe de l'élément neutre, G'' une autre composante*

connexe, et g un sous-groupe principal de G'. Il existe dans G'' un élément x échangeable avec chaque élément de g.

Il existe dans G'' un élément y tel que l'automorphisme déterminé par y laisse invariants un toroïde maximum T^l de G' ainsi qu'un angle polyèdre fondamental dont la diagonale principale est celle de g ; cet automorphisme laisse donc invariants T^l et chaque point d'une diagonale principale R^1 de G. Il applique le sous-groupe principal g, de diagonale principale R^1 sur un autre sous-groupe principal g' de même diagonale principale. Or, g et g' sont conjugués dans G' ; il existe dans T^l un élément a tel que φ_a applique g' sur g ; φ_{ay} applique T^l sur lui-même, conserve g et chaque point de R^1 ; de plus, il induit dans le plan Π tel que $R(g) = R^1 + \Pi$ une certaine rotation ; on peut trouver enfin dans T^l un élément b tel que φ_{bay} ait les mêmes propriétés que φ_{ay} en induisant dans Π la rotation nulle. L'élément $x = bay$ est échangeable avec chaque élément de g, et appartient à G''.

§ 14. Applications

8. *Sous-groupes principaux maximums.*

Proposition : Soit G un groupe de Lie clos ne contenant aucun sous-groupe $(H)_0$ de rang supérieur à un. Tout sous-groupe principal de G est maximum.

En effet, soit G_1 un sous-groupe connexe de G contenant le sous-groupe principal g ; d'après le théorème 3, G_1 est un sous-groupe $(H)_0$ de G, nécessairement identique à g d'après l'hypothèse, c. q. f. d.

Remarque : Un sous-groupe principal dans l'un des groupes B_l, C_l, F_4 est maximum (B_3 exclu). Cela résulte de la proposition précédente et des propositions 7 et 7′ du chapitre III. On voit ainsi qu'*il existe des groupes simples clos de dimensions aussi grandes qu'on le veut dans lesquels existent des sous-groupes simples à trois paramètres non contenus dans un sous-groupe propre de dimension supérieure.*

9. *Sur les inclusions $B_h \subset D_{h+1}$, $B_h \subset A_{2h}$, $C_h \subset A_{2h-1}$, $F_4 \subset E_6$.* Soit $G = G' + G'' + \cdots$ l'un des groupes D_{h+1}, A_{2h}, A_{2h-1}, E_6 ; chacun d'eux contient une composante connexe G'' ne contenant pas l'élément neutre, avec, dans cette composante, un élément y déterminant un automorphisme σ_y ; cet automorphisme conserve un toroïde maximum T^l de G', un angle polyèdre fondamental $P(G)\ \varphi_1 \geq 0, \ldots, \varphi_l \geq 0$, chaque point de la diagonale principale R^1 d'équation $\varphi_1 = \cdots = \varphi_l$, et produit

sur les paramètres angulaires fondamentaux une permutation involutive (Chapitre I, 12 (d)). D'après le théorème 4, il existe dans G'' un élément x tel que σ_x produise dans R^l les mêmes effets que σ_y, en laissant invariant chaque point d'un sous-groupe principal g de G, de diagonale R^1.

Considérons le sous-groupe G_1 de G' formé des éléments échangeables avec x. Comme il contient g, c'est un sous-groupe $(H)_0$ de G' ; $R(G_1)$ coupe R^l suivant l'ensemble des solutions du système obtenu en égalant les paramètres φ_i qui sont permutés par σ_x, c'est-à-dire suivant le sous-espace R^h étudié au chapitre précédent. G_1 est ainsi un sous-groupe $(H)_0$ de rang h. Or les paramètres angulaires fondamentaux d'un tel sous-groupe sont les formes linéaires obtenues en considérant les valeurs dans R^h des paramètres $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Le tableau I relatif au sous-groupe G_1 est ainsi précisément le tableau trouvé au § 11. Les inclusions de diagramme considérées alors correspondent bien à des inclusions de groupes.

10. *Sur l'inclusion* $G_2 \subset B_3$. Montrons que le groupe B_3 contient un sous-groupe $(H)_0$ du type G_2. Les paramètres angulaires fondamentaux de B_3 peuvent être choisis ainsi :

$$\varphi_1 = \tau_1, \qquad \varphi_2 = -\tau_1 + \tau_2, \qquad \varphi_3 = -\tau_2 - \tau_3$$

où $\pm\tau_i$, $\pm\tau_i \pm \tau_j$ $(i \neq j\,;\ i, j = 1, 2, 3)$ sont les paramètres angulaires de B_3 sous la forme habituelle. Le plan R^2 défini au § 11 admet l'équation $\varphi_1 = \varphi_3$, soit $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Les matrices de B_3 qui représentent les éléments de R^2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & D_1 & & 0 \\ & & D_2 & \\ 0 & & & D_3 \end{pmatrix}, \quad D_j = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\tau_j & -\sin 2\pi\tau_j \\ \sin 2\pi\tau_j & \cos 2\pi\tau_j \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$
$$(j = 1, 2, 3)$$

Or, ces matrices appartiennent à une représentation linéaire orthogonale réelle du groupe G_2. Ainsi, le groupe B_3 contient un sous-groupe G_2 qui coupe T^3 suivant un toroïde T^2 recouvert par le plan R^2 d'équation : $\varphi_1 = \varphi_3$. Les paramètres angulaires de ce sous-groupe sont parmi les formes linéaires obtenues en réduisant les paramètres angulaires de B_3 dans le plan R^2, c'est-à-dire en tenant compte de $\varphi_1 = \varphi_3$ dans l'ensemble :

$$\pm \begin{cases} \varphi_1 & \varphi_1 + \varphi_2 & \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 & 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 & 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_2 + \varphi_3 & 2\varphi_1 + \varphi_2 & & \\ \varphi_3 & & & & \end{cases}$$

On obtient

$$\pm \begin{cases} \varrho_1 & \varrho_1 + \varrho_2 & 2\varrho_1 + \varrho_2 & 3\varrho_1 + \varrho_2 & 3\varrho_1 + 2\varrho_2 \\ \varrho_2 & \varrho_1 + \varrho_2 & 2\varrho_1 + \varrho_2 & & \\ \varrho_1 & & & & \end{cases}$$

Les paramètres angulaires fondamentaux du sous-groupe étudié sont visiblement ϱ_1 et ϱ_2 ; le tableau I est dans ce cas

$$\mathrm{I} \begin{cases} \varrho_1 : & \varphi_1, \varphi_3 \\ \varrho_2 : & \varphi_2 \end{cases}$$

ce qui signifie que le sous-groupe étudié est un sous-groupe $(H)_0$ de B_3. L'inclusion $G_2 \subset B_3$ signalée comme possible au § 11 est effective.

11. *Sur les inclusions* $G_2 \subset A_6$ *et* $G_2 \subset D_4$. D'après les numéros 9 et 10, le groupe A_6 contient un sous-groupe $(H)_0$ du type B_3, qui contient à son tour un sous-groupe $(H)_0$ du type G_2 ; un sous-groupe principal dans G_2 est principal dans B_3, donc principal dans A_6. Il en résulte que A_6 contient un sous-groupe $(H)_0$ du type G_2, et que l'inclusion mentionnée au § 11 est réelle. Ce même raisonnement s'applique à l'inclusion $G_2 \subset D_4$, car D_4 contient un sous-groupe $(H)_0$ du type B_3. On pourrait aussi utiliser le raisonnement fait au numéro 9, en considérant la composante connexe de D_4 qui produit sur la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(D_4)$ une permutation circulaire des trois points distincts du point d'ordre trois.

(Reçu le 16 octobre 1950.)