Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Zum Satz von Looman-Menchoff.
Autor: Meier, Kurt
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20702

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zum Satz von Looman-Menchoff

Von Kurt Meier, Zuoz

Einleitung

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit enthält eine vereinfachte und sehr elementare Beweismethode zum bekannten Satz von *Looman-Menchoff*[1]), welche sich auch leicht zum Beweis verschiedener Verschärfungen dieses Satzes erweitern läßt.

Satz 1 (Looman-Menchoff). Voraussetzungen:

I. $f(z)$ sei im Gebiet G stetig ($z = x + iy$).

II. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren in jedem Punkt $z \in G$.

III. In jedem Punkt $z \in G$ sei die Cauchy-Riemannsche Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ erfüllt.

Behauptung: $f(z)$ ist holomorph in G.

Damit der Beweisgedanke klar zum Ausdruck kommt, beweise ich den Satz in dieser einfachsten Form. Bekanntlich dürfte man in Voraussetzung II noch eine abzählbare Menge von Ausnahmepunkten zulassen und in III sogar eine solche vom Flächenmaß 0.

D. Menchoff bemerkt zu diesem Satz und seinen verschiedenen Erweiterungen[2]), daß ihr Beweis weitgehende funktionentheoretische Hilfsmittel erfordert, während zu ihrer Formulierung nur elementarste Begriffe notwendig sind. Er schreibt deshalb: Es wäre interessant, Beweise zu diesen Sätzen zu finden, die keine Begriffe und Methoden der moderneren Funktionentheorie erfordern. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit ist ein Schritt in dieser Richtung.

So stützt sich zum Beispiel der Looman-Menchoffsche Beweis auf eine ziemlich komplizierte Ungleichung[3]), deren Beweis starken Gebrauch von der Lebesgueschen Theorie macht. Im vorliegenden Beweis hingegen

---

[1]) vgl. die Beweisdarstellung in [1] p. 9—16, oder in [2] p. 199—200.

[2]) vgl. [1] Einleitung.

[3]) vgl. [1] p. 10—11.

ist die Anwendung dieser Ungleichung durch eine ganz elementare Betrachtung ersetzt, welche sich auf die Cauchysche Integralformel und das Maximumprinzip stützt.

Die Abschnitte A und B schließen sich übrigens noch fast vollständig an den Menchoffschen Beweis an und benützen einen leicht zu beweisenden Satz von *R. Baire*[4]), aus welchem hervorgeht, daß eine perfekte Punktmenge der komplexen Ebene auf sich von zweiter Kategorie ist.

Der von D. Menchoff dargestellte Beweis stützt sich am Schluß auf den Satz von Morera. An seiner Stelle steht im folgenden Beweis ein Satz von *L. Lichtenstein*[5]), der sich mit noch einfacheren Mitteln beweisen läßt.

Der zweite Teil dieser Arbeit enthält eine Verschärfung zum folgenden

Satz von D. Menchoff[6]). Voraussetzungen:

I. $f(z)$ sei stetig im Gebiet G.

II. Zu jedem Punkt $z_0 \in G$ (abzählbare Menge von Ausnahmepunkten zulässig) existieren zwei verschiedene Geraden d_j $(j = 1, 2)$, welche sich in diesem Punkte z_0 schneiden, so daß die Grenzwerte

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in d_j} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (j = 1, 2)$$

vorhanden sind und denselben endlichen Wert besitzen.

Behauptung: $f(z)$ ist holomorph in G.

Um die zu beweisende Verschärfung dieses Satzes formulieren zu können, sind einige neue Begriffe notwendig:

Es sei z_0 ein Punkt des Gebietes G. Durch $z_0 + z(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ werde ein Jordanbogen C dargestellt, welcher vom Punkt z_0 ausgeht $\big(z(0) = 0\big)$. Die Werte des Argumentes $\varphi(t) = \arg z(t)$ seien so festgelegt, daß $\varphi(t)$ für $0 < t \leqq 1$ stetig ist. Wir setzen:

$$\liminf_{t \to 0} \varphi(t) = \alpha\,, \qquad \limsup_{t \to 0} \varphi(t) = \beta$$

und betrachten im folgenden nur solche Kurven C, für welche $\beta - \alpha < 2\pi$ ist. Der Kurve C ordnen wir den Winkelraum $w(z_0; \alpha, \beta)$ zu, welcher definiert ist als die Menge der Punkte $z_0 + \varrho\, e^{i\psi}$ mit $\varrho > 0$ und $\alpha \leqq \psi \leqq \beta$.

---

[4]) vgl. [2] p. 54.
[5]) vgl. [3].
[6]) vgl. [4].

Wenn wir im folgenden sagen, die Funktion $f(z)$ besitze im Punkt z_0 die Eigenschaft Q, so bedeutet dies:

Es existieren drei Jordanbögen C_j $(j = 1, 2, 3)$, welche vom Punkt z_0 ausgehen, und deren zugeordnete Winkelräume paarweise punktfremd sind, derart, daß die drei Grenzwerte

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in C_j} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

vorhanden sind und denselben endlichen Wert besitzen.

Mit dieser Definition läßt sich der zu beweisende Satz nun folgendermaßen aussprechen:

Satz 2. Voraussetzungen:

I. $f(z)$ sei im Gebiet G stetig.

II. In allen Punkten $z \in G$ besitze $f(z)$ die Eigenschaft Q (zulässig ist eine abzählbare Menge von Ausnahmepunkten).

Behauptung: $f(z)$ ist in G holomorph.

I. Beweis zu Satz 1 (Looman-Menchoff).

A. *Bezeichnungen.* $S(z; r)$ sei die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z und Radius r. Unter $H(z; r)$ verstehen wir die Halbkreisscheibe, deren Punkte $z + \varrho e^{i\varphi}$ charakterisiert sind durch $0 < \varrho < r$, $-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{4}$. Ferner bezeichnen wir mit $w(z; \alpha, \beta)\,(-\pi < \alpha < \beta < +\pi)$ den Winkelraum, dessen Punkte den Bedingungen $\varrho > 0$, $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ genügen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, G sei die Vollebene. Mit P bezeichnen wir die perfekte Menge der Punkte z, in welchen $f(z)$ nicht regulär analytisch ist. Wir setzen voraus, P sei nicht leer.

$F(\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ sei die Menge der Punkte $z \in P$, in welchen $|f(z + h) - f(z)| \leqq \nu |h|$ und $|f(z + ih) - f(z)| \leqq \nu |h|$, sofern $|h| \leqq \frac{1}{\nu}$ (h reell).

B. Infolge der Stetigkeit von $f(z)$ sind die Mengen $F(\nu)$ abgeschlossen, und ferner folgt aus Voraussetzung II leicht $P = \Sigma F(\nu)$. Nach dem in der Einleitung erwähnten Satz von R. Baire existiert daher eine natürliche Zahl N, sowie eine Kreisscheibe $S(a; R)$ $(a \in P,\ R > 0)$, so daß $F(N) \supseteqq P \cdot S(a; R)$. Man darf dazu annehmen $2RN \leqq 1$.

Wir bezeichnen nun mit Π die abgeschlossene Hülle von $P \cdot S(a\,;\,R)$. Π ist perfekt und für $z \in \Pi$ gilt jetzt also:

$$|f(z+h) - f(z)| \leqq N\,|h|\,, \qquad |f(z+ih) - f(z)| \leqq N\,|h|\,, \tag{1}$$

sofern $h \leqq 2R$ (h reell).

Unabhängig von der obigen Betrachtung erkennt man ferner, daß eine Schranke N' existiert, so daß

$$|f(z') - f(z)| \leqq N'\,|z' - z| \quad \text{für} \quad |z' - z| = \tfrac{1}{2}R \quad z \in S(a\,;\tfrac{1}{2}R)\,. \tag{2}$$

Es sei nun $z_0 = x_0 + i y_0$ ein beliebiger Punkt von $P \cdot S(a\,;\tfrac{1}{2}R)$. Ich beweise zunächst

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M\,|\xi - z_0| \quad \text{für} \quad |\xi - z_0| \leqq \tfrac{1}{2}R\,, \tag{3}$$

wobei $M = \max[4N, N']$. Ich führe den Beweis nur für den Fall durch, daß $\xi = \sigma + i\tau$, $\sigma > x_0$, $\tau \geqq y_0$. (Ist $\sigma = x_0$, so folgt (3) direkt aus (1). Für die übrigen Fälle $\sigma \leqq x_0$, $\tau \geqq y_0$; $\sigma \leqq x_0$, $\tau \leqq y_0$; $\sigma \geqq x_0$, $\tau \leqq y_0$ verläuft der Beweis ganz analog.)

C. Wir spalten nun die perfekte Menge Π in zwei Klassen K und K'. Der Punkt $z \in \Pi$ sei $\in K$, falls eine gegen z konvergierende Folge von Punkten von Π existiert: $z + \varrho_k e^{i\varphi_k}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ mit $-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi_k \leqq \frac{3\pi}{4}$.

Ist demnach $z \in K'$, so gibt es eine natürliche Zahl l, so daß $\Pi \cdot H\left(z\,;\frac{1}{l}\right) = 0$. Bezeichnen wir also mit $K'(\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, 3 \ldots)$ die Menge der Punkte $z \in \Pi$ mit $\Pi \cdot H\left(z\,;\frac{1}{\lambda}\right) = 0$, so gilt $K' = \Sigma K'(\lambda)$.

Ist nun $z_1 \in K'(\lambda)$, $z_2 \in K'(\lambda)$, so folgt aus der geometrischen Bedeutung sofort $|z_2 - z_1| \geqq \frac{1}{\lambda}$. Jede Menge $K'(\lambda)$ enthält also nur endlichviele Punkte, und folglich ist die Menge K' abzählbar.

Für das folgende ist nur wichtig, daß K auf Π überall dicht liegt, und dies folgt daraus, daß Π pefekt und K' abzählbar ist.

Da jetzt K auf Π überall dicht liegt und $f(z)$ stetig ist, genügt es, die Behauptung (3) unter der Annahme $z_0 \in K \cdot S(a\,;\tfrac{1}{2}R)$ zu beweisen. In diesem Fall existiert eine Folge von Punkten von Π, welche im Winkelraum $w\left(z_0\,;\,-\frac{\pi}{4}\,,+\frac{3\pi}{4}\right)$ gegen z_0 konvergiert. Mindestens einer der Winkelräume $w\left(z_0\,;\,-\frac{\pi}{4}\,,\,+\frac{\pi}{4}\right)$, $w\left(z\,;\,\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4}\right)$ enthält daher eine

gegen z_0 konvergierende Teilfolge $z_\lambda = x_\lambda + i y_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3 \ldots)$. Wir nehmen an, es sei dies $w\left(z_0\,;\ -\frac{\pi}{4},\ +\frac{\pi}{4}\right)$. Der Beweis für den andern Fall verläuft analog.

Da $\sigma > x_0$ vorausgesetzt wurde $(\xi = \sigma + i\,\tau,\ z_0 = x_0 + i y_0)$, existiert nun ein Index l, so daß $x_l \leqq \sigma$. Wir bezeichnen mit Δ das Gebiet, dessen Punkte $z = x + i y$ durch $x > x_l$, $y > y_0$, $|z - z_0| < \frac{1}{2} R$ charakterisiert sind. Der Rand dieses Gebietes setzt sich aus den Strecken $\overline{\overline{uv}}$, $\overline{\overline{uw}}$, und dem Kreisbogenstück $\widehat{\widehat{vw}}$ zusammen (Fig. 1). $\xi = \sigma + i\tau$ liegt nun im Innern oder auf dem Rand von Δ.

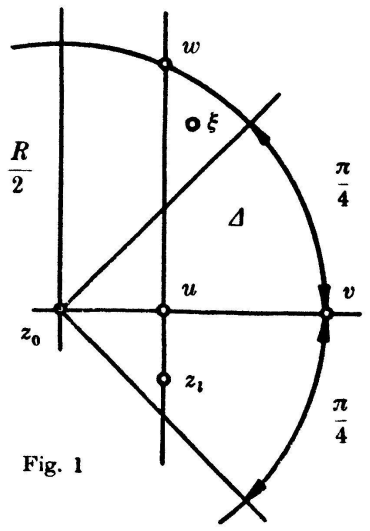

Fig. 1

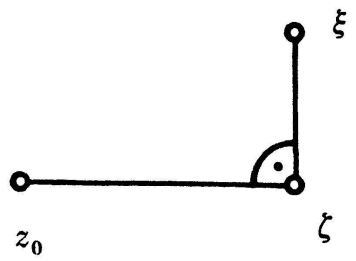

Fig. 2

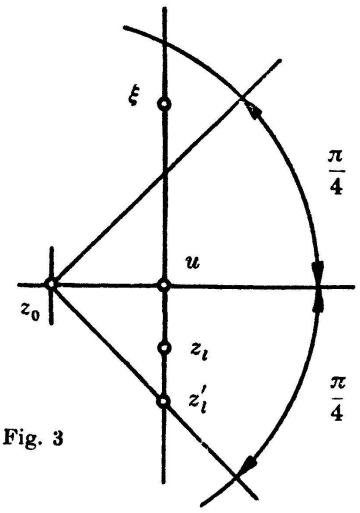

Fig. 3

Für ξ kommen jetzt folgende Lagemöglichkeiten in Frage:

(α) $\xi \in \overline{\overline{uv}}$. In diesem Fall gilt nach (1) $|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M\,|\xi - z_0|$.

(β) $\xi \in \widehat{\widehat{vw}}$. Nach (2) gilt hier ebenfalls $|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M\,|\xi - z_0|$.

(γ) Für $\xi \in \Pi \cdot \Delta$ folgt durch Anwendung von (1) (vgl. Fig. 2)

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq |f(\xi) - f(\zeta)| + |f(z_0) - f(\zeta)| \leqq$$
$$N\,|\xi - \zeta| + N\,|z_0 - \zeta| < 2N\,|\xi - z_0| < M\,|\xi - z_0|$$

(δ) Ist $\xi \in \overline{\overline{uw}}$, so gilt (vgl. Fig. 3)

$$|\xi - z_l| + |z_0 - z_l| \leqq |\xi - u| + |u - z'_l| + |z_0 - z'_l|$$
$$< |\xi - z_0| + |\xi - z_0| + 2\,|\xi - z_0|$$

Damit erhält man unter Anwendung von (1) und (γ)

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq |f(\xi) - f(z_l)| + |f(z_0) - f(z_l)|$$
$$\leqq N\,|\xi - z_l| + N\,|z_0 - z_l| < 4N\,|\xi - z_0| \leqq M\,|\xi - z_0|$$

(ε) $\xi \in \Delta - \Pi \cdot \Delta$. $f(z)$ ist in diesem Fall in ξ regulär und ebenso

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

Nach dem Maximumprinzip existiert daher entweder auf dem Rand von Δ oder auf $\Pi \cdot \Delta$ ein Punkt ξ^*, so daß $|F(\xi)| \leqq |F(\xi^*)|$. Nach ($\alpha$) ($\beta$) ($\gamma$) ($\delta$) ist aber $|F(\xi^*)| \leqq M$. Folglich ist (3) auch in diesem Fall erfüllt.

Damit ist (3) bewiesen.

D. Ich beweise nun folgendes: In jedem Punkt $Z \in S(a; \frac{1}{4}R) - \Pi \cdot S(a; \frac{1}{4}R)$, also in jedem Punkt $Z \in S(a; \frac{1}{4}R)$, in dessen Umgebung $f(z)$ holomorph ist, gilt $|f'(Z)| \leqq 2M$.

Ist nämlich $\varrho(Z)$ der zu Z gehörige Regularitätsradius, Σ die Peripherie des Regularitätskreises, so ist wegen $a \in \Pi$ sicher $\varrho < \frac{1}{4}R$, und daher existiert auf Σ sicher ein Punkt $z_0 \in \Pi \cdot S(a; \frac{1}{2}R)$. Für $\zeta \in \Sigma$ gilt nun nach (3) $|f(\zeta) - f(z_0)| \leqq M |\zeta - z_0|$, und daraus folgt durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel

$$f'(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - Z)^2} d\zeta$$

sofort die Abschätzung

$$|f'(Z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{1}{\varrho^2} \cdot 2M \cdot \varrho = 2M . \tag{4}$$

Aus (3) und (4) schließt man jetzt sehr leicht

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqq 2M |z_2 - z_1| \text{ für } z_1 \in S(a; \tfrac{1}{4}R), \; z_2 \in S(a; \tfrac{1}{4}R) \tag{5}$$

Enthält nämlich die Strecke $\overline{\overline{z_1 z_2}}$ keinen Punkt von Π, so folgt dies aus (4). Existiert jedoch darauf mindestens ein Punkt $z' \in \Pi$, so schließt man

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqq |f(z_2) - f(z')| +$$
$$+ |f(z_1) - f(z')| \leqq M |z_2 - z'| + M |z_1 - z'| = M |z_2 - z_1| .$$

E. Die am Anfang gemachte Annahme $P \neq 0$ führt nun folgendermaßen auf einen Widerspruch:

Setzen wir $Q(z, h) = \dfrac{f(z+h) = f(z)}{h} - \dfrac{f(z+ih) = f(z)}{ih}$ (h reell) ,

so gilt für $z \in S(a; \frac{1}{8}R)$ nach (5) $|Q(z, h)| \leqq 4M$, $0 < |h| \leqq \frac{1}{8}R$ und wegen Voraussetzung III $\lim\limits_{h \to 0} Q(z, h) = 0$. Nach einem Satz von L. Lichtenstein folgt daraus, daß $f(z)$ in $S(a; \frac{1}{8}R)$ holomorph ist. Im Widerspruch dazu enthält aber $S(a; \frac{1}{8}R)$ den Punkt $a \in \Pi$.

II. Beweis zu Satz 2

Hilfssatz. Voraussetzung: Die Funktion $f(z)$ sei im Gebiet G stetig. Ferner sei die Menge P der Punkte $z \in G$, in welchen $f(z)$ nicht regulär analytisch ist, nicht leer.

Behauptung: Es existieren Punkte $z_0 \in P$, zu welchen es in jedem Winkelraum $w(z_0; \alpha, \beta)$ $(\alpha < \beta)$ eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten $z_\nu \in P$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ gibt. Die Menge K dieser Punkte ist auf P von zweiter Kategorie.

Beweis des Hilfssatzes. ψ_σ $(\sigma = 1, 2, 3 \ldots)$ durchlaufe die rationalen Zahlen des Intervalls $(0, 2\pi)$. Unter Δ $(z_0; \sigma, \tau)$ verstehen wir den Kreissektor, dessen Punkte $z + \varrho e^{i\varphi}$ durch

$$0 < \varrho < \frac{1}{\tau}, \quad \psi_\sigma - \frac{1}{\tau} < \varphi < \psi_\sigma + \frac{1}{\tau}$$

charakterisiert sind (σ, τ natürliche Zahlen). Ferner sei $R(\sigma, \tau)$ die Menge der Punkte $z_0 \in P$, für welche $P \cdot \Delta(z_0; \sigma, \tau) = 0$ ist. Wie man leicht bestätigt, sind die Mengen $R(\sigma, \tau)$ abgeschlossen und es gilt

$$P = K + \sum R(\sigma, \tau) .$$

Wir gehen von der Annahme aus, K sei auf P von erster Kategorie und leiten daraus einen Widerspruch her.

Aus dem in der Einleitung formulierten Satz von R. Baire folgt nun zunächst unter obiger Annahme die Existenz zweier natürlicher Zahlen s und t, sowie einer Kreisscheibe $S(a, R)$ $(a \in P)$, so daß

$$R(s, t) \supseteqq \Pi = P \cdot S(a, R) .$$

Man darf natürlich annehmen $R < \frac{1}{2t}$.

Mit $\Delta_1(z_0)$ bezeichnen wir nun den Sektor $\Delta(z_0; s, t)$ und $\Delta_2(z_0)$ sei der in bezug auf den Punkt z_0 symmetrische Sektor. $\Pi \subseteqq R(s, t)$ bedeutet, daß $\Pi \cdot \Delta_1(z_0) = 0$ für jeden Punkt $z_0 \in \Pi$. Aus der geometrischen Bedeutung folgt daraus sofort auch $\Pi \cdot \Delta_2(z_0) = 0$.

Ich werde nun beweisen, daß alle Punkte von Π auf einer gewissen rektifizierbaren Kurve C liegen. Dies führt nämlich sofort auf den gesuchten Widerspruch: Die stetige Funktion $f(z)$ müßte bekanntlich auch noch auf Π regulär sein. Das würde aber bedeuten, daß Π leer ist.

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem (ξ, η) mit Ursprung a derart ein, daß die positive η-Achse die Richtung ψ_s besitzt. Mit Π_ξ bezeichnen wir die Normalprojektion von Π auf die ξ-Achse. $[\xi_1, \xi_2]$ sei das kleinste abgeschlossene Intervall, welches alle Punkte von Π_ξ enthält $(\xi_1 \in \Pi_\xi,\ \xi_2 \in \Pi_\xi)$. Als offene Menge zerfällt $[\xi_1, \xi_2] - \Pi_\xi$ in eine Folge von Intervallen i_k $(k = 1, 2, 3 \ldots)$.

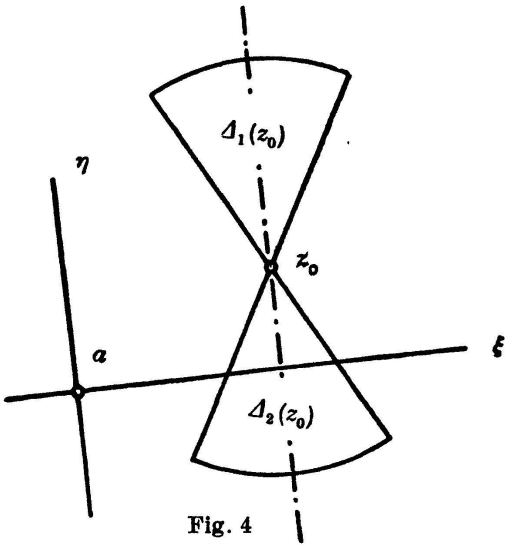

Fig. 4

Wir haben das (ξ, η)-System so gewählt, daß die positive η-Achse Symmetrielinie der Sektoren $\Delta_1(z_0)$, $\Delta_2(z_0)$ ist. (Die beiden Sektoren besitzen den Radius $\frac{1}{t}$ und den Öffnungswinkel $\frac{2}{t}$) (Fig. 4.)

Die Menge Π ist in der Kreisscheibe $S(a, R)\left(R < \frac{1}{2t}\right)$ enthalten und für $z_0 \in \Pi$ gilt $\Pi \cdot \Delta_j(z_0) = 0$ $(j = 1, 2)$. Damit folgt leicht, daß jede Parallele zur η-Achse durch einen Punkt $\xi_0 \in \Pi_\xi$ genau einen Punkt $z_0 \in \Pi$ enthält. Wir bezeichnen seine Ordinate mit $\Phi^*(\xi_0)$.

Es sei jetzt $\Phi(\xi)$ $(\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$ jene stetige Funktion von ξ, welche auf Π_ξ mit $\Phi^*(\xi)$ identisch ist und auf dem Intervall i_k $(k = 1, 2, \ldots)$ linear verläuft. Die Bildkurve dieser Funktion im (ξ, η)-System bezeichnen wir mit C. Wir haben diese Kurve so konstruiert, daß sie alle Punkte von Π enthält.

Man sieht nun leicht, daß $\Pi \cdot \Delta_j(z_0) = 0$ für alle Punkte $z_0 \in C$. Daraus folgt für $\xi' \in [\xi_1, \xi_2]$, $\xi'' \in [\xi_1, \xi_2]$

$$\left| \frac{\Phi(\xi'') - \Phi(\xi')}{\xi'' - \xi'} \right| \leqq M = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right) \qquad (\xi' \neq \xi'') \ .$$

$\Phi(\xi)$ ist also jedenfalls von beschränkter Variation, C also rektifizierbar.

Beweis.

A. *Bezeichnungen.* Wir denken uns sämtliche Tripel α_1, α_2, α_3 von rationalen Zahlen $(0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2\pi)$ numeriert und α_1^τ, α_2^τ, α_3^τ sei jenes mit der Nummer τ.

Ist nun σ, τ ein Paar von natürlichen Zahlen, so bezeichnen wir mit $\Delta_j(z\,;\sigma,\tau)$ $(j=1,2,3)$ den Kreissektor, dessen Punkte $z+\varrho e^{i\varphi}$ den Bedingungen $0<\varrho<\frac{1}{\sigma}$, $\alpha_j^\tau-\frac{1}{\sigma}\leqq\varphi\leqq\alpha_j^\tau+\frac{1}{\sigma}$ genügen. Wir betrachten immer nur solche Zahlenpaare σ, τ, deren zugehörige drei Sektoren paarweise punktfremd sind.

Das Komplement der Vereinigungsmenge dieser drei Sektoren in bezug auf die offene, in z punktierte Kreisscheibe $S\left(z,\frac{1}{\sigma}\right)$ zerfällt wiederum in drei Sektoren $D_j(z\,;\sigma,\tau)$ $(j=1,2,3)$. Und zwar sei $D_j(z\,;\sigma,\tau)$ jener Sektor, welcher $\Delta_j(z\,;\sigma,\tau)$ vorangeht, wenn man z in positivem Sinn umläuft.

Wir bezeichnen ferner mit $u_j(z\,;\sigma,\tau)$, $v_j(z\,;\sigma,\tau)$ die beiden den Sektor $D_j(z\,;\sigma,\tau)$ einschließenden Strahlen. Dabei legen wir die Bezeichnung derart fest, daß bei Drehung um z in positivem Sinn der Strahl $u_j(z\,;\sigma,\tau)$ zuerst den Sektor $D_j(z\,;\sigma,\tau)$ überstreicht und dann in $v_j(z\,;\sigma,\tau)$ übergeht.

Der Einfachheit halber nehmen wir wiederum an, G sei die Vollebene. Mit P bezeichnen wir wieder die perfekte Menge der Punkte z, in welchen $f(z)$ nicht regulär analytisch ist und gehen von der Annahme aus, P sei nicht leer.

Nun definieren wir Mengen $F(\sigma,\tau)$; und zwar sei $z_0\in P$ Element von $F(\sigma,\tau)$, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

In jedem Sektor $D_j(z_0\,;\sigma,\tau)$ $(j=1,2,3)$ verlaufe ein Jordanbogen $C_j(z_0)$:

$$z=z_j(t)\qquad(0\leqq t\leqq 1)$$

dessen Punkte, mit Ausnahme der beiden Enden, im Innern dieses Sektors liegen. Der eine Endpunkt $z_j(0)$ sei z_0 und der andere $z_j(1)$ liege auf der Peripherie des Kreises $S\left(z_0\,;\frac{1}{\sigma}\right)$. Für $z\in C_j(z_0)$ $(j=1,2,3)$ gelte $|f(z)-f(z_0)|\leqq\sigma\,|z-z_0|$.

B. Nach Voraussetzung II besitzt nun $f(z)$ in jedem Punkt $z\in P-E$ (E abzählbare Punktmenge) die in der Einleitung definierte Eigenschaft Q. Daraus folgt leicht, daß jeder Punkt von $P-E$ in mindestens einer Menge $F(\sigma,\tau)$ auftritt. Es gilt also

$$P=E+\sum F(\sigma,\tau)\,.$$

Die Summe ist dabei über alle Paare σ, τ von natürlichen Zahlen zu erstrecken, welche der in A erwähnten Bedingung genügen.

Nach dem in der Einleitung formulierten Satz von R. Baire existieren also natürliche Zahlen s, t, sowie eine offene Kreisscheibe $S(a\,;R)$, $(a \in P,\ R>0)$, so daß $\overline{F}s,t) \supseteqq P \cdot S(a\,;R)$. Man darf natürlich annehmen [7])

$$2R < \delta \cdot \sin\delta \qquad \left(\delta = \frac{2}{s}\right). \tag{1}$$

Da s und t von jetzt an fest bleiben, führen wir folgende abgekürzte Bezeichnung ein: $\Delta_j(z\,;s,t) = \Delta_j(z)$, $D_j(z\,;s,t) = D_j(z)$, $u_j(z\,;s,t) = u_j(z)$, $v_j(z\,;s,t) = v_j(z)\cdot(j = 1,2,3)$. Wir setzen ferner $P\cdot S(a\,;R) = P(a\,;R)$.

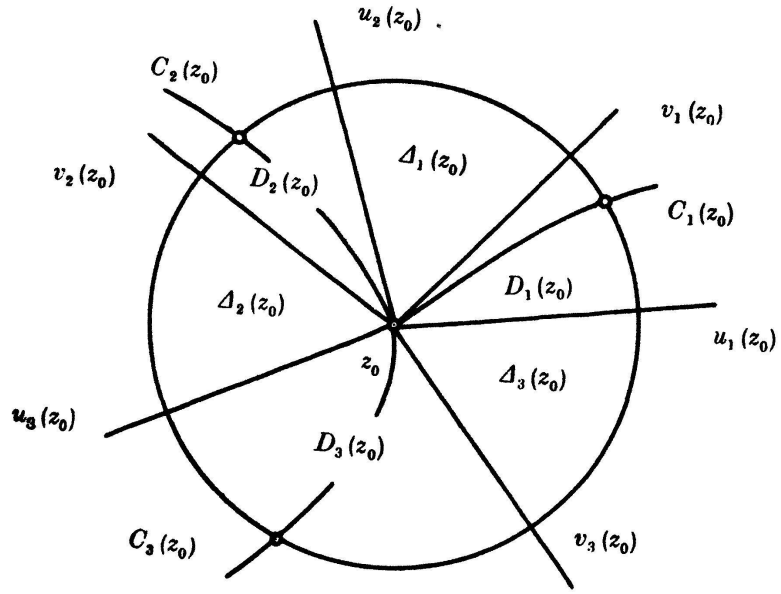

Fig. 5

Ist also $z_0 \in F(s,t)$, so gilt folgendes (vgl. Fig. 5):

Es existieren drei Jordanbögen $C_j(z_0)$ $(j = 1,2,3)$, so daß

$$|f(z) - f(z_0)| \leqq s\,|z - z_0| \quad \text{für } z \in C_j(z_0) \quad (j = 1,2,3)\,. \tag{2}$$

Dabei verläuft $C_j(z_0)$ in $D_j(z_0)$ und verbindet z_0 mit einem Peripheriepunkt des Kreises $S\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right)$.

Für das Folgende ist ferner wichtig, daß die drei Sektoren $\Delta_j(z_0)$ $(j = 1,2,3)$ den Öffnungswinkel δ besitzen.

Unabhängig von den obigen Betrachtungen sieht man endlich leicht ein, daß eine Schranke M_1 existiert, so daß

$$|f(\xi) - f(z)| \leqq M_1\,|\xi - z| \quad \text{für } z \in P\cdot S(a\,;R), \quad |\xi - z| = \tfrac{1}{2}R\,. \tag{3}$$

[7]) Wegen dieser Ungleichung bleibt in den folgenden geometrischen Konstruktionen jeweils (2) anwendbar.

C. a) In diesem Abschnitt machen wir wiederholt von einer leicht zu beweisenden Ungleichung Gebrauch: Bezeichnet man mit $\Delta(z_0, z', z_1)$ die abgeschlossene Dreiecksfläche mit den Ecken z_0, z', z_1 und mit ζ' den zu z' gehörigen Innenwinkel, so gilt:

$$|Z - z_0| + |Z - z_1| < \frac{2}{\sin \zeta'} |z_0 - z_1| \quad \text{für} \quad Z \in \Delta(z_0, z', z_1) . \tag{4}$$

b) Ich beweise zunächst für $z_0 \in P \cdot S(a; R)$, $z_1 \in P \cdot S(a; R)$

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leqq M_2 |z_1 - z_0| \qquad \left(M_2 = \frac{4}{\delta \cdot \sin \delta}\right) . \tag{5}$$

Da $f(z)$ stetig ist und $F(s, t)$ auf $P \cdot S(a; R)$ überall dicht liegt, genügt es, (5) unter der zusätzlichen Annahme $z_0 \in F(s, t)$, $z_1 \in F(s, t)$ zu beweisen.

Wir betrachten zu diesem Zweck die den Punkten z_0 und z_1 zugeordneten Kurven $C_j(z_0)$ bzw. $C_j(z_1)$ $(j = 1, 2, 3)$. Die drei Stücke der Kurven $C_j(z_0)$ $(j = 1, 2, 3)$ von z_0 bis je zum ersten Schnittpunkt mit der Peripherie des Kreises $S(a; R)$ zerschneiden die offene Kreisscheibe $S(a; R)$ in drei Gebiete G_j $(j = 1, 2, 3)$. Dabei sei G_j jenes Gebiet, das sich an $C_j(z_0)$ anschließt, wenn man z_0 in positivem Sinn umläuft.

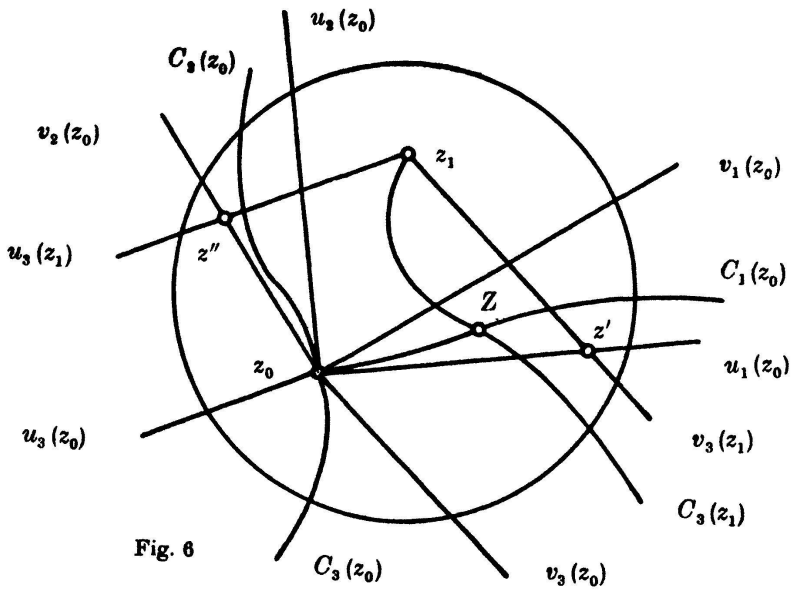

Fig. 6

Der Punkt z_1 liegt nun in einem der Gebiete G_j $(j = 1, 2, 3)$ oder auf einer der Kurven $C_j(z_0)$ $(j = 1, 2, 3)$. Im letzteren Fall ist (5) bereits nach (2) erfüllt. Ich nehme nun an $z_1 \in G_1$. Die beiden anderen Fälle $(z_1 \in G_2,\ z_1 \in G_3)$ lassen sich ganz analog behandeln.

Mit z' bzw. z'' bezeichnen wir jetzt den Schnittpunkt von $v_3(z_1)$ bzw. $u_3(z_1)$ mit dem aus $u_1(z_0)$ und $v_2(z_0)$ zusammengesetzten Linienzug.

Es bestehen folgende zwei Möglichkeiten: Entweder liegt z' auf $u_1(z_0)$ und z'' auf $v_2(z_0)$ oder z' und z'' liegen auf demselben Strahl $u_1(z_0)$ oder $v_2(z_0)$. Wir betrachten zunächst die erste Möglichkeit (Fig. 6).

Man erkennt leicht, daß die Kurve $C_3(z_1)$ die aus $C_1(z_0)$ und $C_2(z_0)$ zusammengesetzte Linie in mindestens einem Punkt Z des Vierecks (z_0, z', z_1, z'') schneiden muß. Der zu z' gehörige Innenwinkel des Dreiecks $\Delta\,(z_0, z', z_1)$ ist aber gleich δ; ebenso der zu z'' gehörige Innenwinkel des Dreiecks $\Delta\,(z_0, z_1, z'')$. Daraus folgt nach (4) leicht

$$|Z - z_0| + |Z - z_1| < \frac{2}{\sin(\delta)}\,|z_0 - z_1|\ .$$

Mit Hilfe von (2) ergibt sich daraus nun die zu beweisende Ungleichung (5):

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leqq |f(z_1) - f(Z)| +$$
$$+ |f(z_0) - f(Z)| \leqq s\,|z_1 - Z| + s\,|z_0 - Z| < M_2\,|z_1 - z_0|\ .$$

Der zweite der oben erwähnten Fälle ließe sich ganz analog behandeln.

c) Es bleibt noch zu beweisen, daß eine Schranke M existiert, so daß

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leqq M\,|z_1 - z_0| \tag{6}$$

sogar gilt, wenn man nur voraussetzt $z_0 \in P\,(a\,; \frac{1}{2}\,R)$, $|z_1 - z_0| \leqq \frac{1}{2}\,R$.

Aus dem oben bewiesenen Hilfssatz geht nun zunächst hervor, daß auf $P\,(a\,;R)$ Punkte z_0 existieren, zu welchen in jedem Winkelraum $w\,(z_0\,;\alpha, \beta)$ $(\alpha < \beta)$ eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten $z_\lambda \in P\,(a\,;R)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ existiert. Die Menge K dieser Punkte ist auf $P\,(a\,;R)$ von zweiter Kategorie, also jedenfalls auf $P\,(a\,;R)$ überall dicht. Ferner ist die Funktion $f(z)$ stetig. Um die am Anfang dieses Abschnitts ausgesprochene Behauptung (6) zu beweisen, ist daher die zusätzliche Annahme $z_0 \in K$ erlaubt.

Ich führe den Beweis zunächst nur unter der weiteren Annahme durch, daß $z_1 \in \Delta_1(z_0)$.

Bezeichnen wir mit $D_3^*(z_0)$ den zu $D_3(z_0)$ in bezug auf z_0 symmetrischen Sektor, so existiert nun also eine Folge von Punkten

$$z_\lambda \in P\,(a\,;R) \cdot D_3^*\,(z_0) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

welche gegen z_0 konvergiert. Da $F(s, t)$ auf $P(a\,;R)$ überall dicht liegt, darf man sogar annehmen, die z_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ seien Punkte der Menge $F(s, t)$.

Wir wählen nun den Index l so groß, daß $z_1 \in \Delta_1(z_l)$ wird.

Wir betrachten jetzt die Stücke der Kurven $C_1(z_l)$, $C_2(z_l)$, welche zwischen z_0 und dem ersten Schnittpunkt A_1 bzw. A_2 von $C_1(z_l)$ bzw. $C_2(z_l)$ mit der Peripherie des Kreises $S(z_0; \frac{1}{2}R)$ liegen. Δ sei das von diesen Kurvenstücken und der Peripherie von $S(z_0; \frac{1}{2}R)$ begrenzte Gebiet, welches den Punkt z_1 enthält (Fig. 7).

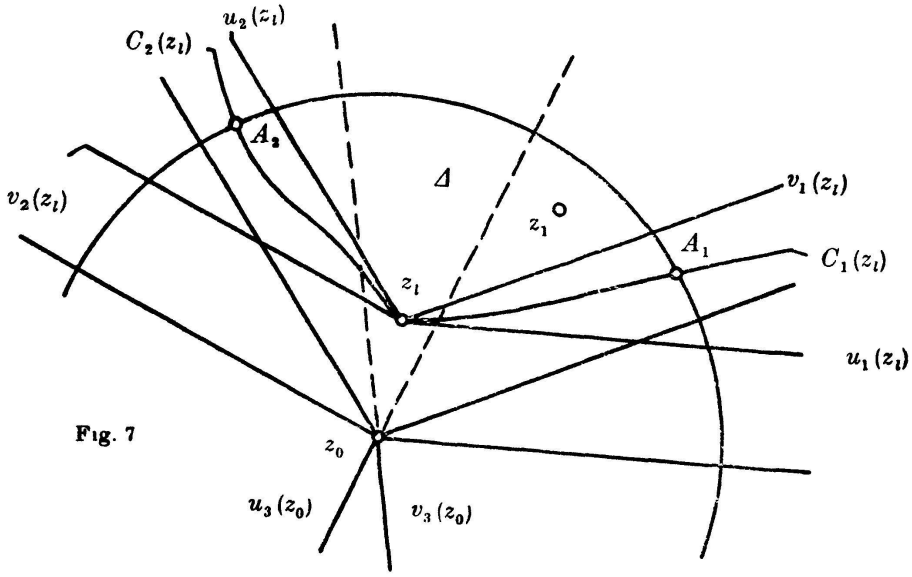

Fig. 7

Für einen Punkt $\xi \in \overline{\Delta}$ (abgeschlossene Hülle von Δ) bestehen nun folgende Lagemöglichkeiten:

(α) $\xi \in C_1(z_l)$ oder $\xi \in C_2(z_l)$.

Man erkennt leicht, daß in diesem Fall der zu z_l gehörige Innenwinkel des Dreiecks Δ (z_0, ξ, z_l) größer ist als δ und daher gilt nach (2) und (5):

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq |f(\xi) - f(z_l)| + \\ + |f(z_0) - f(z_l)| \leqq s\,|\xi - z_l| + M_2\,|z_0 - z_l|$$

Setzt man $M' = \max[s, M_2]$, so schließt man nach (4) weiter

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M'\,|\xi - z_l| + M'\,|z_0 - z_l| < \frac{2M'}{\sin\delta}\,|\xi - z_0| = M_3\,|\xi - z_0|\,. \tag{7}$$

(β) ξ liegt auf der Peripherie von $S(z_0; \frac{1}{2}R)$. Nach (3) gilt hier

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M_1\,|\xi - z_0|\,. \tag{8}$$

(γ) $\xi \in \Delta \cdot P(a; R)$. In diesem Fall gilt (5).

(δ) $\xi \in \Delta - \Delta \cdot P(a; R)$. Wir setzen $M = \max[M_1, M_2, M_3]$ und betrachten die Funktion $F(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}$. Nach dem Maximumprinzip existiert entweder auf $\Delta \cdot P(a; R)$ oder auf dem Rand von Δ ein Punkt ξ^*, so daß $|F(\xi^*)| \geqq |F(\xi)|$. Nach (5) (7) (8) ist aber $|F(\xi^*)| \leqq M$, und es gilt daher auch in diesem Fall

$$|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M\,|\xi - z_0|\,.$$

Nach (α) (β) (γ) (δ) ist also $|f(\xi) - f(z_0)| \leqq M\,|\xi - z_0|$ für $\xi \in \Delta$. Diese Ungleichung gilt insbesondere für $\xi = z_1$.

Die Behauptung (6) ist damit unter der zusätzlichen Annahme $z_1 \in \Delta_1(z_0)$ bewiesen. Der Beweis für die beiden Fälle $z_1 \in \Delta_2(z_0)$ und $z_1 \in \Delta_3(z_0)$ verläuft natürlich ganz analog.

Es ist noch zu zeigen, daß (6) auch für $z_1 \in D_j(z_0)$ $(j = 1, 2, 3)$ gilt. Ich führe den Beweis wieder nur für den Fall $z_1 \in D_1(z_0)$ durch; denn die beiden andern Fälle lassen sich ganz analog behandeln.

Es sei also $z_1 \in D_1(z_0)$. Nach unserem Hilfssatz existiert eine Folge von Punkten $z_\lambda \in P(a; R)$, welche in $\Delta_2^*(z_0)$ gegen z_0 konvergiert. $\Delta_2^*(z_0)$ bedeutet hier den zu $\Delta_2(z_0)$ in bezug auf z_0 symmetrischen Sektor.

Wir wählen nun den Index l so groß, daß $z_1 \in D_1(z_l)$ wird. D sei das Gebiet, welches durch die Strahlen $u_1(z_l)$ und $v_1(z_l)$ aus dem Kreis $S(z_0; \frac{1}{2}R)$ herausgeschnitten wird und den Punkt z_1 enthält. Dieses Gebiet D tritt nun an Stelle des im vorangehenden Beweis aufgetretenen Gebietes Δ, und die Betrachtung geht ganz analog wie oben weiter.

D. Von nun an weicht der Beweis nur noch an wenigen Stellen von jenem des ersten Teils ab. Man beweist zunächst wieder, daß

$$|f(z) - f(z_0)| \leqq 2M\,|z - z_0| \quad \text{für} \quad z_0 \in S(a; \tfrac{1}{8}R),\ |z - z_0| \leqq \tfrac{1}{8}R. \tag{9}$$

Neu kommt jetzt die Anwendung eines Satzes von *W. Stepanoff*[8]) hinzu, nach welchem man auf Grund von (9) schließt, daß $f(z)$ fast überall im Kreis $S(a; \frac{1}{8}R)$ ein totales Differential im Sinn von Stoltz-Fréchet besitzt.

Nach einer von *D. Menchoff* angegebenen Methode[9]) beweist man ferner folgendes: Besitzt $f(z)$ in z_0 ein totales Stoltz-Fréchet-Differential und zugleich die in der Einleitung definierte Eigenschaft Q, so ist

[8]) vgl. die Formulierung dieses Satzes in 1, p. 27.

[9]) Diese Methode wird in 1, p. 19—23, auf etwas einfachere Fälle angewendet.

$f(z)$ in z_0 differenzierbar, erfüllt also jedenfalls in z_0 die Cauchy-Riemannsche Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$f(z)$ erfüllt daher in fast allen Punkten $z \in S(a; \frac{1}{8} R)$ die Cauchy-Riemannsche Bedingung.

Schließlich kann für den vorliegenden Fall auch die Beweismethode des Satzes von L. Lichtenstein wieder fast unverändert übernommen werden. Man hat nur an Stelle Riemannscher Integrale Lebesguesche zu setzen.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *D. Menchoff*, Les conditions de monogénéité, Act. sc. 329 (1936).

[2] *S. Saks*, Theory of the Integral, New York 1937.

[3] *L. Lichtenstein*, Sur la définition générale des fonctions analytiques, Compt. Rend. Acad. Sc. Paris, 150, p. 1109 (1910).

[4] *D. Menchoff*, Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann, Fundamenta Mathematicae 25, p. 59—97 (1935).

(Eingegangen 28. Mai 1950.)