Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 25 (1951)

Artikel: Sur un théorème de Schwarz.

Autor: Garnier, Réné

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20700

Sur un théorème de Schwarz

Par René Garnier, Paris

Dans le supplément à son Mémoire couronné, *Schwarz* annonçait qu'il n'existe qu'un segment de surface minima S, sans singularité, admettant les côtés d'un quadrilatère gauche Q pour frontière complète [1]) ([18], p. 111). Il ne semble pas que *Schwarz* ait jamais publié la démonstration de ce théorème. Beaucoup plus tard, *Tibor Radó* établissait sous une forme remarquable des conditions suffisantes d'unicité pour la solution du problème de *Plateau* relatif à une courbe de Jordan fermée, C : s'il existe un point O, à distance finie ou non, tel que la projection centrale ou cylindrique de C à partir de O soit une courbe convexe simplement couverte, il ne peut passer par C qu'un segment de surface minima ([14], p. 8). Sa démonstration, très simple, s'appuie sur des propriétés des équations aux dérivées partielles du type elliptique.

Nous nous limiterons ici au théorème de *Schwarz*, mais nous l'établirons par une voie toute différente de celle de *T. Radó*. La méthode actuelle fait intervenir les intégrales de l'équation VI de *Painlevé* ; et par un retour imprévu, elle en révèle des propriétés nouvelles : *elle étend aux intégrales de VI la notion de fonction contiguë*, introduite par *Gauss* pour les fonctions hypergéométriques ; *elle établit la formule qui relie deux fonctions contiguës et fournit une infinité de cas d'intégrabilité de l'équation VI*.

Par son origine la méthode se rattache aux travaux de *Weierstrass* ; elle reste ainsi dans la ligne générale du Mémoire de *Schwarz*. C'est d'ailleurs par la même voie que j'ai résolu [7] le problème de *Plateau* pour les polygones (puis, pour des contours continus plus généraux [2]).

I. Préliminaires

1. *Hypothèses fondamentales*. Le segment S sera représenté par les formules de *Weierstrass* :

---

[1]) Les numéros entre [ ] renvoient à la Bibliographie de la p. 172.

[2]) Les résultats exposés dans ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes des C. R. Ac. Sc., t. 217, 1943, p. 60 et p. 320. Je suis heureux de rappeler qu'ils ont fait l'objet d'une Conférence à l'Université de Genève, le 14 juin 1949. On me permettra de rendre hommage ici à la mémoire d'un collègue éminent et d'un ami regretté, *Rolin Wavre!*

$$X = \mathfrak{R} \int (G^2 - H^2) dx, \quad Y = \mathfrak{R} \int i(G^2 + H^2) dx, \quad Z = \mathfrak{R} \int 2GH dx \quad (1)$$

où X, Y, Z sont des coordonnées rectangulaires, G et H des fonctions de la variable x, analytiques dans le demi-plan supérieur $\Pi[\mathfrak{R}(ix) < 0]$, et telles que Q soit représenté biunivoquement sur l'axe réel. Nous ferons les hypothèses suivantes :

I. *G^2, GH et H^2 sont holomorphes dans Π et sur l'axe réel, sauf, peut-être, aux affixes respectifs $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = 1$, $x_4 = \infty$ des sommets A_1, A_2, A_3, A_4 de Q.*

II. *S admet un plan tangent bien définie en A_j $(j = 1, \ldots, 4)$ et variant par continuité au voisinage de A_j.*

Ces hypothèses tendent à introduire un segment S aussi «régulier» que possible. La première partie de I (... dans Π ...) n'est d'ailleurs que la traduction d'une hypothèse faite couramment dans l'énoncé du problème de *Plateau* : on demande à la surface cherchée d'être représentable conformément sur l'intérieur d'un cercle par des fonctions harmoniques continues ([15], p. 32). La seconde partie de I (... sur l'axe réel ...) permet le prolongement par symétrie de S à travers chaque côté de Q.

Rappelons que $\tau = \frac{H}{G} = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}$ (α, β, γ cosinus directeurs de la normale à S) ; une rotation des axes de coordonnées (ou de S) s'exprime par une substitution $\mathfrak{S}$ de *Cayley*, soit $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}$, sur G et H ($\overline{W}$, imaginaire conjuguée de W) ; ainsi G et H satisfont à une équation linéaire du second ordre

$$Y'' + p(x)\, Y' + q(x)\, Y = 0 \,, \qquad \text{(E)}$$

dont les coefficients $p(x)$, $q(x)$ sont indépendants de la position de S par rapport aux axes de coordonnées et réels sur l'axe réel $\mathfrak{R}(ix) = 0$ ([7], p. 65).

2. *Etude du voisinage d'un sommet.* Dirigeons l'axe OZ parallèlement à la normale $\mathfrak{N}$ à S en un sommet quelconque A_j $(j = 1, \ldots, 4)$, dont l'affixe sera prise égale à 0 dans ce numéro ; τ est donc nul avec x. Faisons décrire à x un lacet L issu d'un point de Π et entourant 0 ; sur S le point M, d'affixe x, subit une rotation autour de $\mathfrak{N}$; pour la substitution $\mathfrak{S}$ correspondante on a donc $B = 0$. G et H se changent respectivement en AG et $\overline{A}H$; ce sont, par conséquent, deux intégrales canoniques, $G(x) = x^\alpha g(x)$, $H(x) = x^\beta h(x)$, avec $\alpha + \beta$ entier et $g(x)$, $h(x)$ uni-

formes autour de 0. Montrons que 0 *n'est pas un point essentiel de* $g(x)$ *et* $h(x)$. Or

$$\tau = x^{\beta-\alpha}\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^{\gamma}}\frac{x^m h(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{x^{\gamma}} \ ,$$

avec $\gamma \geqslant 0$ et m entier >0 ; d'après II $\varphi(x)$, devant tendre vers 0 avec x et étant uniforme, est holomorphe en $x = 0$.

Mais

$$Z = \Re \int 2x^{\alpha+\beta-m} g^2(x)\,\varphi(x)dx \ ,$$

et $\alpha + \beta - m$ est entier ; si $g(x)$ admet $x = 0$ comme point essentiel, il en sera de même de l'intégrale précédente ; soit $f(x) = Z + iZ_1$ cette intégrale. La fonction $e^{f(x)}$ admettant encore $x = 0$ comme point essentiel, e^Z et par suite Z ne pourraient rester bornés au voisinage de A_j (sur S, ou sur un des segments déduits de S par rotation autour de $\Re$). Ainsi, quitte à augmenter α ou β de nombres entiers (>0 ou <0), on peut supposer $g(x)$ et $h(x)$ holomorphes et $\neq 0$ pour $x = 0$, avec de plus, $\beta>\alpha$, car $\Re$ coïncide avec OZ. *Les affixes* 0, 1, t, ∞ *des sommets de* Q *sont donc des points réguliers de* (E) *au sens de Fuchs.*

3. *Détermination des exposants caractéristiques.* — Désignons par α_j, β_j les exposants caractéristiques des intégrales canoniques de (E) en x_j ($j = 1, 2, 3$) ; pour les déterminer, il est loisible de supposer momentanément l'axe des Z normal à S en A_j. D'après la fin du N° 2 on a $\beta_j>\alpha_j$, et d'après (1) : $\pi(2\alpha_j + 1) = V_j$, en désignant par V_j la mesure de l'angle plan formé par les vecteurs-unités joignant A_j aux points de S infiniment voisins («contingent» de *G. Bouligand*). D'ailleurs, $\alpha_j + \beta_j$ est un entier m_j (N° 2), avec $m_j \geqslant 0$ (car Z doit rester fini), et, puisque $\beta_j>\alpha_j$, on a

$$\alpha_j = -\frac{1}{2} + \frac{V_j}{2\pi} \ , \qquad \beta_j = \frac{1}{2} - \frac{V_j}{2\pi} + m_j \qquad (2)_j$$

avec

$$m_j > \frac{V_j}{\pi} - 1 \qquad (j = 1, 2, 3) \ , \qquad (3)_j$$

(ce qui s'accorde bien avec $m_j \geqslant 0$). L'étude de $x = \infty$, affixe de A_4, se fait à l'aide de la transformation $x \mid x^{-1}$; elle donne pour les exposants caractéristiques

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} + \frac{V_4}{2\pi} \ , \qquad \beta_4 = \frac{3}{2} - \frac{V_4}{2\pi} + m_4 \ , \qquad (2)_4$$

V_4 étant défini comme V_j, et l'on a pour l'entier m_4 ($\geqslant 0$) :

$$m_4 > \frac{V_4}{\pi} - 1 \ . \qquad (3)_4$$

En dehors des affixes x_j des sommets de Q, (E) peut encore posséder des points singuliers x'_h où G^2, GH, H^2 restent holomorphes (N° 1). En de tels points, les exposants caractéristiques sont égaux à des moitiés d'entiers, $\frac{m'_h}{2}$ et $-\frac{m'_h}{2}+m''_h$ avec $m'_h \geqslant 0$, m''_h entier et

$$m''_h - m'_h \geqslant 1 \qquad (\text{ou } \geqslant 2\,, \quad \text{si } m'_h = 0)\,^{3)}\ , \tag{3}'_h$$

Les points x'_h sont en nombre fini, N : car, d'après la forme de $G(x)$ et $H(x)$ autour d'un point x_j (N° 2) et en vertu de résultats analogues qu'on pourrait établir au voisinage d'un point quelconque ξ intérieur à Π (ou réel), on voit aisément que ni x_j, ni ξ ne peuvent être points d'accumulation de zéros de $GH' - HG'$.

Soit alors, dans (E)

$$p(x) = \sum_1^3 \frac{p_j}{x - x_j} + \sum_1^N \frac{p'_h}{x - x'_h}\ ;$$

écrivant que la somme des résidus à distance finie et à l'infini est nulle, et observant que $p_j = 1 - m_j$, $p'_h = 1 - m''_h$, on trouvera (relation de *Riemann-Fuchs*)

$$\sum_1^3 (1 - m_j) + \sum_1^N (1 - m''_h) = 3 + m_4\ ,$$

soit

$$\sum_1^4 m_j + \sum_1^N (m''_h - 1) = 0\ .$$

Or, on a vu que $m_j \geqslant 0$, $m_4 \geqslant 0$, et d'après $(3)'_h$, $m''_h \geqslant 1$, donc $m_j = 0$ $(j = 1, \ldots, 4)$ et $m''_h = 1$, $m'_h = 0$, *ce qui détermine les exposants* caractéristiques α_j, β_j et entraîne diverses conséquences :

a) D'après $(3)_j$, on a $0 < V_j < \pi$ $(j = 1, \ldots, 4)$; *le segment S «s'attache» au contour par «l'intérieur» des angles de Q* (au sens de la Géométrie élémentaire) [4]).

b) On ne peut avoir $m'_h > 0$; *G et H ne s'annulent donc pas simultanément* ; en particulier, *S ne contient pas de point de ramification* $(m'_h = 1$, $m''_h = 2)$.

c) *Il n'y a pas, non plus, de point méplat* $(m'_h = 0$, $m''_h \geqslant 2)$. En définitive, *(E) ne peut posséder de point apparemment singulier*. Posant alors

---

[3]) Un point x'_h pour lequel $m'_h = 0$, $m''_h = 1$ est un point d'holomorphie de $p(x)$ et $q(x)$, car $G(x)$ ne peut contenir de terme logarithmique (n° 1, I).

[4]) Dans [7] (p. 104—107), j'ai montré qu'il passe au moins une surface minima par Q, mais sans préciser son mode d'attache au contour.

$$n_j = \frac{V_j}{2\pi}\,, \qquad (j = 1,\ldots,4)\ ,$$

il viendra

$$0 < n_j < \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

et d'après $(2)_j$ $(j = 1,\ldots,4)$ (E) s'écrira

$$Y'' + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right) Y'$$

$$- \left[\frac{(n_1-\frac{1}{2})^2}{x^2} + \frac{(n_2-\frac{1}{2})^2}{(x-1)^2} + \frac{(n_3-\frac{1}{2})^2}{(x-t)^2} + \frac{d}{x(x-1)} + \frac{\alpha}{x(x-1)(x-t)}\right] Y = 0$$

avec

$$d = (n_4 - \tfrac{1}{2})^2 - (n_1 - \tfrac{1}{2})^2 - (n_2 - \tfrac{1}{2})^2 - (n_3 - \tfrac{1}{2})^2 - 1\ . \tag{$\mathfrak{E}$}$$

4. *Les invariants du groupe de* $(\mathfrak{E})$. Pour achever la détermination de $(\mathfrak{E})$ il faudrait pouvoir calculer t et α. Mais nous n'avons pas encore exprimé toutes les conditions du problème. L'axe OZ étant pris normal à S en A_1, on a (N° 2) : $G(x) = a x^\alpha g(x)$, $H(x) = b x^\beta h(x)$, les fonctions holomorphes $g(x)$ et $h(x)$ se réduisant à l'unité pour $x = 0$, et il faut encore calculer a et b. Or, quand x, partant d'un point de Π, décrit des lacets autour de $x = 0$, $x = 1$, $x = t$, $G(x)$ et $H(x)$ subissent des substitutions de *Cayley*, S_1, S_2, S_3 ; ces substitutions correspondent à des rotations d'amplitudes connues autour des normales à S en A_1, A_2, A_3 ; elles sont donc connues dès que l'on a fixé la direction OX, normale à OZ. Ainsi $(\mathfrak{E})$ doit être telle que son groupe de monodromie $\mathfrak{G}$ (construit à partir de deux intégrales convenablement choisies) admette pour base S_1, S_2, S_3. Or, sauf dans le cas où $(\mathfrak{E})$ admet une intégrale à dérivée logarithmique rationnelle (cas qui ne saurait se présenter que si les normales à S en A_1, A_2, A_3 sont parallèles, c'est-à-dire si Q est un quadrilatère plan), le groupe $\mathfrak{G}$ peut être défini par les invariants $A + \bar{A}$ (N° 2) des substitutions unimodulaires S_1, S_2, S_3, $S_2 S_1$, $S_3 S_2$, $S_3 S_2 S_1$ $(= S_4^{-1})$ [5]), compte tenu du choix des axes. La forme $(\mathfrak{E})$ qu'on vient de trouver pour (E) exprime précisément que les invariants de S_1, S_2, S_3, S_4 ont les valeurs $2\cos V_j$ $(j = 1,\ldots,4)$; *quant aux invariants de* $S_2 S_1$, *et* $S_3 S_2$, *ils ont aussi des valeurs connues :* la substitution $S_2 S_1$, par exemple, correspond à un produit de deux symétries autour des côtés $A_4 A_1$ et $A_2 A_3$; elle a donc pour invariant $2\cos V_{12}$, V_{12} mesurant l'angle des vecteurs $A_1 - A_4$ et $A_3 - A_2$.

Admettons qu'on ait su déterminer t et α (dans $(\mathfrak{E})$ de manière que les invariants de $S_2 S_1$ et $S_3 S_2$ aient des valeurs données. On montre alors

[5]) Ici, et un peu plus loin, dans ce N° 4, nous omettons la démonstration de certaines propriétés simples.

qu'on peut choisir univoquement $b^2 : a^2$ et a en exprimant que S_2 est une substitution de *Cayley* et que le côté $A_1 A_2$ a une longueur donnée ; le remplacement de $b : a$ par $-b : a$ change d'ailleurs le segment de surface S en un segment symétrique.

Enfin, réciproquement, on montre que des fonctions G et H satisfaisant aux conditions précédentes définissent, par l'intermédiaire de (1) une surface minima passant par un quadrilatère égal à Q.

Ainsi, résoudre le problème de *Plateau* pour Q revient essentiellement à déterminer t et α de manière que les invariants de $S_2 S_1$ et $S_3 S_2$ aient des valeurs données. Ces invariants sont des fonctions analytiques de t et α ([13], p. 310) ; mais, pratiquement, il paraît bien difficile de montrer que les équations qu'on formerait ainsi ont une solution et une seule. Par contre, une fois ces propriétés établies, on pourrait peut-être aborder par cette voie le calcul effectif de la solution du problème de *Plateau* pour le quadrilatère.

5. *Introduction de l'équation VI.* — Pour lever la difficulté, il convient de rattacher le problème actuel au problème de *Riemann* [6]). Cherchons donc d'abord à construire une équation linéaire du second ordre ($\mathfrak{E}_1$) de la classe de *Fuchs*, admettant deux intégrales qui subissent autour de quatre points *arbitrairement choisis* des substitutions linéaires données ; moyennant une transformation homographique sur x, on pourra adopter pour ces points les affixes $0, t, 1, \infty$ comme plus haut, mais *actuellement t sera variable*. Le nouveau problème n'est autre que le problème de *Riemann* pour l'équation ($\mathfrak{E}_1$). A l'encontre de ($\mathfrak{E}$), l'équation ($\mathfrak{E}_1$) devra posséder un point apparemment singulier $x = \lambda_1$, variable avec t ; elle sera donc de la forme

$$Y_1'' + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right) Y_1' - \left[\frac{a_1 + \frac{1}{4}}{x^2} + \frac{b_1 + \frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{c_1 + \frac{1}{4}}{(x-t)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{d_1 - \frac{3}{2}}{x(x-1)} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda_1)^2} + \frac{\alpha_1 - \frac{2t-1}{2}}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\beta_1}{x(x-1)(x-\lambda_1)}\right] Y_1 = 0 . \qquad (\mathfrak{E}_1)$$

Il faudra d'abord exprimer que *le groupe de* ($\mathfrak{E}_1$) *est indépendant de la valeur attribuée à t*. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme l'a montré *R. Fuchs* ([2], p. 308) que $\lambda = \lambda_1(t)$ soit une intégrale de l'équation (découverte, à la même époque, et indépendamment de lui, par *B. Gambier* [3] :

---

6) C'est d'ailleurs le procédé utilisé dans [7], p. 55, pour la résolution du problème de *Plateau* relatif à un polygone quelconque.

$$\lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - t}\right)\lambda'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda}\right)\lambda'$$

$$+ \frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1 - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2}\right.$$

$$\left. + \left(b_1 + \frac{1}{4}\right)\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - c_1\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right], \tag{VI}$$

$\alpha = \alpha_1(t)$ et $\beta = \beta_1(t)$ s'exprimant en fonction de λ', λ, t par les formules

$$\alpha = \frac{t^2(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\lambda'^2$$

$$- \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\left[\frac{a_1 + \frac{1}{4}}{\lambda^2} + \frac{b_1 + \frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2} + \frac{c_1}{(\lambda-t)^2} + \frac{d_1 + \frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)}\right] \tag{5}$$

$$\beta = \frac{t(t-1)}{2(t-\lambda)}\lambda' - \lambda + \frac{1}{2}\ ; \tag{6}$$

on a de plus ([5], p. 250)

$$\alpha' + \frac{\alpha}{\lambda - t} + 2c\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2} = 0\ ; \tag{7}$$

les équations (5), (7) forment un système équivalent à VI [7]).

En définitive, il faudra choisir une intégrale particulière de l'équation du second ordre VI de manière que les invariants des substitutions $S_2 S_1$ et $S_3 S_2$ de $(\mathfrak{E}_1)$ (qui sont déjà indépendants de t) aient des valeurs données. Ce problème de *Riemann* une fois résolu, il faudra montrer encore

1. qu'il existe une valeur t_0 de t telle que $\lambda(t_0)$ se confonde avec 0, 1, t_0 ou ∞ et que l'équation $(\mathfrak{E}_1)$ correspondante est de la forme $(\mathfrak{E})$;

2. que l'équation $(\mathfrak{E})$ ainsi formée à partir de l'une quelconque des quatre équations précédentes est unique.

La démonstration du théorème de *Schwarz* va donc s'appuyer, nécessairement, sur les propriétés des intégrales de VI, et nous sommes ainsi amenés à rappeler quelques résultats essentiels concernant ces fonctions.

6. *Propriétés de $\lambda(t)$ pour $t \neq 0, 1, \infty$.* — *P. Painlevé* a établi [10], une proposition fondamentale: *toute intégrale $\lambda(t)$ de VI est holomorphe ou méromorphe pour $t = t_0$ quelconque* ($\neq 0, 1, \infty$). Il a montré de plus qu'il existe une infinité d'intégrales qui pour $t = t_0$ ($\neq 0, 1, \infty$)

---

[7]) A une réserve près ([5], p. 251) sans importance actuellement.

prennent l'une des valeurs singulières $\lambda_0 = 0, 1, t_0, \infty$; en se limitant aux parties principales, on a, par exemple :

$$\lambda = \varepsilon \frac{\sqrt{4a_1 + 1}}{t_0 - 1}(t - t_0) + \cdots, \tag{8}$$

$$\lambda = \varepsilon' \frac{t_0(t_0 - 1)}{2\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1}} \frac{1}{t - t_0} + \cdots, \tag{9}$$

($\varepsilon = \pm 1$; $\varepsilon' = \pm 1$), le second terme de chaque développement contenant une constante arbitraire [8]).

Théorème. *Soient* λ^0, λ'^0 *et* α^0 *les valeurs initiales de* $\lambda(t)$, $\lambda'(t)$ *et* $\alpha(t)$ pour $t = t_0$ ($\neq 0, 1, \infty$) ; $\lambda(t)$ *et* $\alpha(t)$ [ou $1 : \lambda$ et $1 : \alpha$] *sont des fonctions holomorphes de* λ^0 ($\neq 0, 1, t_0, \infty$) *et* λ'^0 ($\neq \infty$) ; *dans le cas où* λ^0 *a une valeur singulière,* $\lambda(t)$ *et* $\alpha(t)$ [*ou* $1 : \lambda$ *et* $1 : \alpha$] *sont des fonctions en général* [9]) *holomorphes de* λ^0 ($\neq t_0$) *et* α^0 ($\neq \infty$), *ou de* λ^0 ($= t_0$) *et* $(\alpha + \beta)^0 = \overset{*}{\alpha}{}^0$ ($\neq \infty$).

Ce théorème étend une proposition analogue énoncée sans démonstration par *Painlevé* pour l'équation $\lambda'' = 6\lambda^2 + t$([9], p. 46). Pour l'établir, nous procéderons comme l'a fait *Painlevé* pour démontrer un théorème analogue concernant les équations du premier ordre ([8], p. 36).

Soient a ($\neq 0, 1, \infty$), l ($\neq 0, 1, a, \infty$), l' ($\neq \infty$) trois quantités quelconques ; la méthode des fonctions majorantes montre qu'il existe trois nombres positifs R_1, R_2, R_3 tels que pour

$$| t - a | \leqslant R_1, | t_0 - a | \leqslant R_1, | \lambda^0 - l | \leqslant R_2, | \lambda'^0 - l' | \leqslant R_3$$

et t fixe, l'intégrale de VI, soit $\lambda = \varphi\ (t ; \lambda^0, \lambda'^0, t_0)$, définie par les conditions initiales t_0, λ^0, λ'^0, est une fonction holomorphe de λ^0, λ'^0, t_0 dans le voisinage de l, l', a respectivement. Montrons que le théorème reste vrai lorsque t varie sur un chemin quelconque $\mathfrak{L}$, allant de a à un point quelconque T (sans contenir $0, 1, \infty$). Supposons d'abord que sur $\mathfrak{L}$ λ ne prenne aucune valeur singulière, et soit u un paramètre qui serve à

---

[8]) On peut le voir, soit directement sur VI, soit en raisonnant sur (5), (7), ou pour $\lambda_0 = t_0$, sur un système analogue vérifié par $\overset{*}{\lambda} = \lambda t^{-1}$ et $\overset{*}{\alpha} = \alpha + \beta$ {système $(\overset{*}{1})$, [5] p. 292}.

[9]) Dans certains cas : $\lambda^0 = 0$ et $4a_1 + 1 = 0$, $\lambda^0 = 1$ et $4b_1 + 1 = 0$; $\lambda^0 = t_0$ et $4c_1 + 1 = 0$; $\lambda^0 = \infty$ et $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1 = 0$, les fonctions sont algébroïdes autour des valeurs singulières de λ^0 ; mais ces cas ne se présentent pas dans le problème actuel (cf. No 18).

représenter $\mathfrak{L}$ biunivoquement, en croissant de 0 à 1 quand t va de a jusqu'à T sur $\mathfrak{L}$; désignons par u' la borne inférieure des valeurs de u pour lesquelles le théorème ne serait plus exact, et soit $t(u') = \tau$. Il résulte du théorème fondamental de *Painlevé*, énoncé au début de ce numéro, que si θ tend vers τ sur l'arc (a, τ) de $\mathfrak{L}$, $\beta = \varphi\ (\theta\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0, t_0)$ et $\gamma = \varphi'_\theta\ (\theta\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0,\ t_0)$ tendent vers des valeurs b et c, régulières par hypothèse. Nous savons de plus qu'il existe trois nombres positifs R'_1, R'_2, R'_3, analogues à R_1, R_2, R_3, et tels que pour

$$|t-\tau| \leqslant \frac{R'_1}{2},\ |\theta-\tau| \leqslant \frac{R'_1}{2},\ |\beta-b| \leqslant \frac{R'_2}{2},\ |\gamma-c| \leqslant \frac{R'_3}{2},$$

$$|\lambda_1-\beta| \leqslant \frac{R'_2}{2},\ |\lambda'_1-\gamma| \leqslant \frac{R'_3}{2}\ . \tag{10}$$

$\lambda = \varphi\ (t\,;\ \lambda_1,\ \lambda'_1,\ \theta)$ et $\lambda' = \varphi'_t\ (t\,;\ \lambda_1,\ \lambda'_1,\ \theta)$ sont holomorphes en λ_1, λ'_1, θ ; mais on peut prendre θ assez voisin de τ sur $\mathfrak{L}$ pour que les quatre premières inégalités (10) soient vérifiées sur tout l'arc (θ, τ) de $\mathfrak{L}$; ainsi, $\varphi\ (\tau\,;\ \lambda_1,\ \lambda'_1,\ \theta)$ et $\varphi'_\tau\ (\tau,\ \lambda_1,\ \lambda'_1,\ \theta)$ sont holomorphes quand λ_1 et λ'_1 vérifient les deux dernières inégalités (10). Mais on obtient $\varphi\ (\tau\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0,\ t_0)$ en remplaçant dans $\varphi\ (\tau\,;\ \lambda_1,\ \lambda'_1,\ \theta)$ les variables λ_1 et λ'_1 respectivement par $\varphi\ (\theta,\ \lambda^0,\ \lambda'^0, t_0) = \beta$, et λ'_1 par $\varphi'_\theta\ (\theta\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0, t_0) = \gamma$, et ces deux dernières fonctions β et γ sont, par hypothèse, holomorphes en λ^0, λ'^0. Donc $\varphi\ (\tau\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0,\ t_0)$ est bien holomorphe en λ^0, λ'^0 autour de l et l'. L'existence d'une borne inférieure $u' < 1$ étant inadmissible, le théorème est encore exact en T.

Supposons maintenant que les valeurs b et c soient singulières ; par exemple, soit $b = 0$. On remplacera VI par un système (5), (7) qui, résolu en λ' et α', sera à coefficients holomorphes pour $t = \tau$, $\lambda = 0$, $\alpha = \alpha_0$ (ou algébroïdes, si $4a_1 + 1 = 0$, cas qui ne saurait se présenter dans notre problème ; N° 18), et l'on répétera le raisonnement précédent en faisant jouer à α le rôle antérieur de λ'. Il en sera de même pour $b = 1$ ou ∞ ; dans ce dernier cas, on verrait que $1 : \lambda\ (\tau\,;\ \lambda^0,\ \lambda'^0,\ t_0)$ est une fonction holomorphe de λ^0, λ'^0. Pour $b = \tau$, on substituerait à (5), (7) un système en $\overset{*}{\alpha}$ et $\overset{*}{\lambda}$, qui reste régulier pour $\lambda = t$ (N° 7).

De même, si les valeurs initiales l et l' sont singulières, on leur substituerait les valeurs initiales de λ et α (ou de $1 : \lambda$ et α, ou, si $l = t_0$, de λ et $\overset{*}{\alpha}{}^0$).

Un raisonnement identique à celui de tout à l'heure montrerait que, pour $t = \tau$, λ est une fonction holomorphe (ou exceptionnellement méromorphe) des constantes a_1, b_1, c_1, d_1 figurant dans VI, autour de valeurs finies attribuées à ces constantes.

7. *Propriétés de* $\lambda(t)$ *pour* t *voisin de* 0, 1, ∞. Moyennant des transformations homographiques simples sur t, λ, on peut échanger dans VI les points singuliers 0, 1, ∞ [10]; on peut donc se borner à étudier les intégrales de VI au voisinage de $t = 0$.

Or on peut construire le long de l'axe réel des branches d'intégrales, dites «caractéristiques de première espèce et du type général» ([5], p. 250) telles que, t tendant vers 0, α tende vers une valeur arbitraire (mais telle actuellement que l'expression

$$s^2 = 4a_1 + 4c_1 + 1 - 4\alpha_0 \tag{11}$$

soit comprise entre 0 et 1), tandis qu'en t_0, suffisamment près de 0, λ prenne la valeur λ_0 ; λ_0 peut être choisi arbitrairement pourvu que $|t_0 : \lambda_0|$ soit inférieure à une quantité ne dépendant que de a_1, b_1, c_1, d_1, s^2 c'est-à-dire, actuellement, à une quantité purement numérique. On obtient ces caractéristiques après avoir fait le changement de variable

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{P(\lambda)}} = \mu ,$$

où

$$P(\lambda) \equiv 4(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1)\lambda(\lambda - 1) + (4b_1 + 1)\lambda - s^2(\lambda - 1) \quad ;$$

(5) se trouve ainsi transformée en

$$t\frac{d\mu}{dt} = 1 + F(\mu, \alpha - \alpha_0, t) , \tag{5'}$$

où $|F|$ reste petite au cours des approximations successives que l'on effectue sur (5′) et la transformée de (7). Et l'on montre ([5], p. 315) que, pour $s \neq 0$

$$\frac{1}{\lambda} = A\left(\frac{t}{t_0}\right)^s + B + C\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-s}, \tag{12}$$

A, B, C étant des fonctions de t restant bornées quand t tend vers 0; lorsque t tend vers 0 sur l'axe réel, λ tend vers 0 comme kt^s (pour s

[10]) [5], p. 250. En particulier, la transformation $t = 1 - t'$, $\lambda = 1 - \lambda'$, $a = b'$, $b = a'$, $\alpha = -\alpha'$ se complète, dans $(\mathfrak{E}_1)$ par $x = 1 - x'$. On notera, de plus, la transformation $\lambda_1 = \lambda_3 t_3^{-1}$, $t = t_3^{-1}$, $b_1 = c_3$, $c_1 = b_3$, $\alpha_1 = \alpha_3 t_3^{-1}$, $\beta_1 = \beta_3 t_3^{-1}$ qui change $(\mathfrak{E}_1)$ et VI en des équations analogues, et $\lambda_1 = t$ en $\lambda_3 = 1$.

réel >0 [11]) ; pour $s=0$, le second membre de (12) devient un polynome du deuxième ou du premier degré en $\log t$, à coefficients fonctions de t. Il résulte de là, en particulier, que, *pour s réel les zéros de λ, ou $\lambda - 1$, ou λ^{-1} ne peuvent s'accumuler au voisinage de* $t=0$. Pour s réel $\geqslant 0$ on a encore

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\lambda'}{\lambda} = s\,, \quad \text{et} \lim_{t\to 0} \beta = \frac{s+1}{2} \tag{13}$$

d'après (6).

Mais il existe encore une *seconde espèce de caractéristiques du type général* ([5], p. 290) ; on pose $\lambda t^{-1} = \overset{*}{\lambda}, \alpha + \beta = \overset{*}{\alpha}$,

$$\int_{\overset{*}{\lambda}_0}^{\overset{*}{\lambda}} \frac{d\overset{*}{\lambda}}{\sqrt{\overset{*}{P}(\overset{*}{\lambda})}} = \overset{*}{\mu}\,,$$

avec

$$\overset{*}{P}(\overset{*}{\lambda}) \equiv -(4a_1+1)(\overset{*}{\lambda}-1) + (4c_1+1)\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{s}{}^2\,\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\lambda}-1)\,,$$

$$\overset{*}{s}{}^2 = 4(a_1+c_1+1-\overset{*}{\alpha}_0)\ ; \tag{$\overset{*}{11}$}$$

on montre que pour $\overset{*}{s}>0$, on a $\overset{*}{s} = 1-s$ ([5], p. 324), et les approximations convergent uniformément pour $|t_0\overset{*}{\lambda}_0| = |\lambda_0|$ assez petite ; on a d'ailleurs

$$\overset{*}{\lambda} = \overset{*}{A}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\overset{*}{s}} + \overset{*}{B} + \overset{*}{C}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\overset{*}{s}}. \tag{$\overset{*}{12}$}$$

$\overset{*}{A}, \overset{*}{B}, \overset{*}{C}$ restant bornées quand t tend vers 0. Si $\overset{*}{s}=0$, le second membre est remplacé par un polynome du deuxième ou du premier degré en $\log t$.

Pour t appartenant à $(0, t_0)$ et assez petit, soit pour $t=t_0$, quitte à diminuer t_0, $\alpha(t)$ est une fonction holomorphe de α_0, de λ_0 et de

---

[11]) En posant $\alpha - \alpha_0 = \gamma$, $\lambda\varrho = t$, on peut remplacer (5), (7) par un système

$$t\lambda' = \lambda[s + f(\varrho, \lambda, \gamma, t)]\,,$$
$$t\varrho' = \varrho[1 - s + f(\varrho, \lambda, \gamma, t)]\,,$$
$$t\gamma' = \varrho\,\varphi(\varrho, \lambda, t)\,,$$

f et $\varphi - 2c + \alpha_0$ étant holomorphes et nulles pour $\varrho = \lambda = \gamma = t = 0$. L'application des théorèmes de *Picard* ([12], p. 18) à ce système montre qu'il existe des intégrales $\lambda(t)$ de VI développables suivant les puissances entières croissantes de $C\,t^s$ et $C^{-1}\,t^{1-s}$ et nulles avec t (C, constante arbitraire) ; mais le domaine où on calcule ainsi $\lambda(t)$, et qui *appartient aux caractéristiques des deux espèces*, est moins étendu que celui des caractéristiques ; en particulier, il ne peut contenir les points où l'on a, soit $\lambda = \infty$, soit $\varrho = \infty$ (c'est-à-dire $\lambda = 0$), points qui appartiennent respectivement aux domaines de convergence des caractéristiques de première ou de deuxième espèce.

a_1, b_1, c_1, d_1 (ou encore $\overset{*}{\alpha}(t)$ est holomorphe en $\overset{*}{\alpha}_0$, $\overset{*}{\lambda}_0$ et a_1, b_1, c_1, d_1), avec $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}$, par exemple, voisin de 1, de sorte que α_0 *est holomorphe en* $\alpha(t_0)$ *et* λ_0.

Concurremment à ces caractéristiques, il en existe d'autres, dites du type exceptionnel ([5], p. 280, 294), car elles n'existent que pour des valeurs exceptionnelles de α_0; elles sont telles que, t tendant vers 0, λ tende vers une certaine valeur $h \neq 0$ (ou $\overset{*}{\lambda}$, vers $\overset{*}{h} \neq \infty$). Dans le problème actuel nous n'aurons pas à les étudier spécialement, car elles rentrent dans les types (12) ou $(\overset{*}{12})$ avec $C \equiv 0$ ou $\overset{*}{C} \equiv 0$.

Enfin, on démontre cette propriété essentielle, qui joue pour $t = 0, 1, \infty$ le même rôle que le théorème fondamental de *Painlevé* (début du N° 6) : *quand t tend vers* 0 *(par exemple), toute intégrale de VI se laisse représenter par une caractéristique de l'un des types* (*et espèces*) *précédents* ([5], p. 295 à 312).

II. Comparaison de $(\mathfrak{E}_1)$ et $(\mathfrak{E}_2)$

8. *Les équations* $(\mathfrak{E}_1')$ *et* $(\mathfrak{E}_2')$ *en u et w*. Reprenons maintenant notre problème suivant la méthode indiquée à la fin du N° 5. On peut réaliser une équation $(\mathfrak{E})$, soit à partir d'une équation $(\mathfrak{E}_1)$ *où* $\lambda_1(t)$ *tend vers* 0, soit à partir d'une équation analogue, que nous désignerons par $(\mathfrak{E}_2)$, où $a_1, \ldots, d_1$, $\lambda_1, \alpha_1, \beta_1$ seraient remplacés par $a_2, \ldots, d_2$, $\lambda_2, \alpha_2, \beta_2$, et *où* $\lambda_2(t)$ *tendra vers* ∞; d'ailleurs, en raison de l'équivalence [N° 7 et note 10] des valeurs singulières de λ, il n'y a pas lieu d'envisager d'autres hypothèses. Nous allons montrer que, *de toutes façons, on aboutit à la même équation* $(\mathfrak{E})$.

Pour que $(\mathfrak{E}_1)$ tende vers $(\mathfrak{E})$, il faut prendre d'abord

$$b_1 = n_2(n_2 - 1),\quad c_1 = n_3(n_3 - 1),\quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1 = (n_4 - \tfrac{1}{2})^2 \tag{14}$$

Soit alors t_0 une valeur telle que $\lambda_1(t_0) = 0$; d'après (6) et (8) β tend vers $\frac{1}{2}(\varepsilon\sqrt{4a_1 + 1} + 1)$, et

$$\frac{a_1 + \frac{1}{4}}{x^2} + \frac{d_1 - \frac{3}{2}}{x(x-1)} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda_1)^2} + \frac{\beta_1}{x(x-1)(x-\lambda_1)}$$

vers une fonction rationnelle dont la partie principale, en $x = 0$, est

$$\frac{a_1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\sqrt{4a_1 + 1}}{x^2}.$$

On doit donc avoir

$$\varepsilon\sqrt{4a_1 + 1} = 1 - \varepsilon_1(2n_1 - 1) \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1)\ ; \tag{15}$$

d'après (4) $\varepsilon = +1$, et si l'on pose $Y_1 = x^{-1}[(x-1)(x-t)(x-\lambda_1)]^{-\frac{1}{2}}u$, u vérifiera une équation $(\mathfrak{E}'_1)$ dont les exposants caractéristiques seront (quel que soit t) donnés par le tableau :

0	1	t	λ	∞
$\frac{1-\varepsilon_1}{2} + n_1$	n_2	n_3	0	$-2 + n_4$
$\frac{3+\varepsilon_1}{2} - n_1$	$1 - n_2$	$1 - n_3$	2	$-1 - n_4$.

Partons maintenant de $(\mathfrak{E}_2)$ et supposons que pour $t = t'_0$ ($\neq t_0$ ou $= t_0$) $\lambda_2(t) = \infty$; on procédera comme pour $(\mathfrak{E}_1)$, en remarquant d'après (6) et (9) que $-\beta_2 : \lambda_2$ tend vers $1 - \varepsilon' \sqrt{a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + 1}$; en égalant à $1 + \varepsilon_2(n_4 - \frac{1}{2})$ $(\varepsilon_2 = \pm 1)$ [cf. $(2)_4$] les exposants caractéristiques pour $x = \infty$ de l'équation limite, il viendra

$$2\varepsilon' \sqrt{a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + 1} = 1 + \varepsilon_2(2n_4 - 1) \qquad (\varepsilon_2 = \pm 1) \tag{16}$$

d'où encore $\varepsilon' = +1$, et si l'on pose $Y_2 = [x(x-1)(x-t)(x-\lambda_2)]^{-\frac{1}{2}}w$, w vérifiera une équation $(\mathfrak{E}'_2)$ dont les exposants caractéristiques seront (quel que soit t) donnés par le tableau :

0	1	t	λ	∞
n_1	n_2	n_3	0	$\frac{-3+\varepsilon_2}{2} + n_4$
$1 - n_1$	$1 - n_2$	$1 - n_3$	2	$-\frac{1+\varepsilon_2}{2} - n_4$.

9. *Passage de* $(\mathfrak{E}'_1)$ *à* $(\mathfrak{E}'_2)$. On peut écrire $(\mathfrak{E}'_2)$ sous la forme

$$w'' - \frac{w'}{w - \lambda_2} - \left[Q(x) + \frac{\beta_2}{x(x-1)(x-\lambda_2)}\right] w = 0 \tag{$\mathfrak{E}'_2$}$$

avec

$$Q(x) = \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_2}{(x-1)^2} + \frac{c_2}{(x-t)^2} + \frac{d_2}{x(x-1)} + \frac{\alpha_2}{x(x-1)(x-t)} \, ,$$

et comme $x = \lambda_2$ est apparemment singulier, on a

$$\frac{\beta_2^2}{\lambda_2^2(\lambda_2 - 1)^2} + \frac{2\lambda_2 - 1}{\lambda_2^2(\lambda_2 - 1)^2}\beta_2 = Q(\lambda_2) \, . \tag{17}$$

Montrons alors qu'on peut former un système linéaire absolument canonique

$$\begin{aligned} w' &= a(x)w + b(x)z \\ z' &= c(x)w + d(x)z \, , \end{aligned} \tag{18}$$

avec

$$a(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-t}\,, \qquad b(x) = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x-1} + \frac{B_3}{x-t}$$
$$c(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{C_3}{x-t}\,, \qquad d(x) = \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x-1} + \frac{D_3}{x-t}\,, \tag{19}$$

et qui est vérifié par l'intégrale générale $w(x)$ de $(\mathfrak{E}_2')$ (conjointement avec une fonction associée $z(x)$). A cet effet, nous prendrons

$$a(x) = \frac{h\,x(x-\lambda_2) - \beta_2(\lambda_2 - t)}{x(x-1)(x-t)} \tag{20}$$

avec

$$h = \tfrac{3}{2} + \varepsilon_2(n_4 - \tfrac{1}{2}) \tag{21}$$

et

$$b(x) = \frac{x - \lambda_2}{x(x-1)(x-t)}\,; \tag{22}$$

en différentiant $(18)_1$ et en utilisant $(\mathfrak{E}_2')$ on trouvera

$$z' = \frac{1}{b(x)}\left[\frac{a(x)}{x-\lambda_2} + Q(x) + \frac{\beta_2}{x(x-1)(x-\lambda_2)} - a'(x) - a^2(x)\right] w + \left[\frac{1}{x-\lambda_2} - a(x) - \frac{b'(x)}{b(x)}\right] z\,;$$

le coefficient de z est bien de la forme prescrite, avec

$$A_j + D_j = 1 \qquad (j = 1, 2, 3)\,; \tag{23}$$

quant au coefficient de w, il ne contient pas de terme en $(x - \lambda_2)^{-2}$ et s'écrit a priori

$$\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{C_3}{x-t} + \frac{C_4}{x-\lambda_2} + C_5\,,$$

C_4 et C_5 étant indépendants de x. Mais on vérifiera que (17) entraîne $C_4 = 0$ et que (16) et (21) donnent $C_5 = 0$.

Les exposants caractéristiques de z et w étant les mêmes, en général, on prévoit qu'on peut trouver une constante k telle que pour $x = 0$ un (et un seul) des exposants de

$$v = kw + z$$

soit supérieur d'une unité à l'un des exposants de w. Or ceux-ci, n_1 et $1 - n_1$, sont égaux, si l'on veut, à $\frac{1}{2} \pm \varepsilon_1(\frac{1}{2} - n_1)$, ε_1 ayant la même signification qu'au N° 8 ; si r désigne l'un quelconque d'entre eux, il existe une solution de (18) telle que $w = x^r(1 + \cdots)$ et

$$z = \frac{r - A_1}{B_1} x^r (1 + \cdots) ;$$

donc, si l'on définit k par

$$k B_1 - A_1 + \tfrac{1}{2} + \varepsilon_1 (\tfrac{1}{2} - n_1) = 0 , \tag{24}$$

les exposants de v en $x = 0$ seront égaux à ceux de u, en $x = 0$ (augmentés peut-être, de ε^1 et $\varepsilon^{(2)} \geqslant 0$) , et cela, quel que soit ε_1.

D'autre part, supposons que (18) possède une intégrale telle que pour $x = \infty$

$$w = \left(\frac{1}{x}\right)^{r'} (1 + \cdots) ;$$

on trouvera pour cette même solution

$$z = -(h + r') \left(\frac{1}{x}\right)^{r'-1} (1 + \cdots) ;$$

v appartiendra donc à l'exposant $r' - 1$ ou à $r' + \varepsilon$ $(\varepsilon \geqslant 0)$ selon que $h + r' \neq 0$ ou $= 0$. D'après la valeur (21) de h, et d'après les valeurs de r' données à la fin du N° 8, on a $h + r' = (1 + \varepsilon_2) n_4$ ou $(1 - \varepsilon_2)(1 - n_4)$ et les exposants de v pour $x = \infty$ seront $-2 + n_4 + \frac{1 - \varepsilon_2}{2} \varepsilon$ et $-1 - n_4 + \frac{1 + \varepsilon_2}{2} \varepsilon$.

Enfin, les exposants de v pour $x = 1$ et $x = t$ sont de la forme $n_2 + \varepsilon'$, $1 - n_2 + \varepsilon''$ et $n_3 + \varepsilon'''$, $1 - n_3 + \varepsilon^{IV}$, tous les ε étant des entiers $\geqslant 0$. On verra d'ailleurs, tout à l'heure (n° 10), que d'après (24) v satisfait à une équation n'ayant qu'un point apparemment singulier, λ, d'exposants 0 et 2 ; en écrivant que la somme des exposants de l'équation en v relatifs à $0, 1, t, \infty, \lambda$ est égale à 3 (relation de *Riemann-Fuchs*), on trouvera

$$\varepsilon^1 + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' + \varepsilon^{IV} = 0 ;$$

ainsi, $\varepsilon^1, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varepsilon^{IV}$ sont nuls et *les équations vérifiées par u et v ont, non seulement le même groupe — celui de $(\mathfrak{E})$ — mais encore les mêmes exposants relatifs aux mêmes points singuliers.* Il en résulte, *comme nous allons voir, que les équations vérifiées par u et v sont identiques* (lemme d'unicité [12])).

Tout d'abord, soient (u_1, u_2) et (v_1, v_2) deux systèmes fondamentaux respectifs des deux équations, ces systèmes étant choisis de manière à

---

[12]) C'est un cas particulier du théorème de l'unicité de l'équation réduite d'une classe ([16], p. 388); un théorème analogue («Fundamentallemma») a été établi par *L. Schlesinger* pour les systèmes absolument canoniques ([17], p. 234). On pourra comparer ces démonstrations à celle du texte.

subir les mêmes substitutions sur les mêmes contours. Si l'on détermine A et B par les équations $v_j = A(x)u_j + B(x)u'_j$ $(j = 1, 2)$, on voit immédiatement que $A(x)$ et $B(x)$ sont uniformes et sans points essentiels : ce sont des fonctions rationnelles. Mais on a

$$B(x) = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 u'_2 - u_2 u'_1} \ .$$

Supposons $B \not\equiv 0$. D'après la forme de $(\mathfrak{E}'_1)$ $u_1u'_2 - u_2u'_1$ a en $x = 0$ un zéro d'ordre 1 exactement ; $u_1v_2 - u_2v_1$ a un zéro d'ordre $\geqslant 2$, donc $B(x)$ a un zéro d'ordre $\geqslant 1$ et il en est de même pour $B(x)$ en $x = 1$, $x = t$. En $x = \lambda_1$, $u_1u'_2 - u_2u'_1$ a un zéro d'ordre 1 exactement, tandis que $u_1v_2 - u_2v_1$ est holomorphe ; pour $B \not\equiv 0$ on aura donc

$$B(x) = B_0 \frac{x^{1+m_1}(x-1)^{1+m_2}(x-t)^{1+m_3}}{x - \lambda_1} P(x) \ ;$$

(m_1, m_2, m_3 entiers $\geqslant 0$; $P(x)$, polynome de degré $M \geqslant 0$). Mais $u_1u'_2 - u_2u'_1$ admet $x = \infty$ comme pôle d'ordre 2 et $u_1v_2 - v_1u_2$ comme pôle d'ordre 3 au plus, soit $3 - m_4$ $(m_4 \geqslant 0)$. Il vient ainsi

$$2 + m_1 + m_2 + m_3 + M = 1 - m_4 \ ,$$

équation qui n'admet aucune solution en entiers m_j, $M \geqslant 0$. Ainsi, $B_0 = 0$ et $v_j = A(x)u_j$; mais les exposants caractéristiques étant les mêmes en $x = 0, 1, t, \infty$ et les u_j, v_j étant holomorphes partout ailleurs, $A(x)$ se réduit à une constante.

10. *Relation entre* λ_1 *et* λ_2. — Les équations vérifiées par $v = kw + z$ et w se forment aisément à partir de (18) ; on trouve :

$$v'' - \left(a + d + \frac{\Delta'}{\Delta}\right)v' + \left[ad - bc - kb' - d' + \frac{\Delta'}{\Delta}(kb + d)\right]v = 0 \quad (25)$$

avec

$$\Delta(x) = k^2 b(x) + k[d(x) - a(x)] - c(x)$$

et

$$w'' - \left(a + d + \frac{b'}{b}\right)w' + \left(ad - bc - a' + \frac{ab'}{b}\right)w = 0 \ . \quad (26)$$

Ces équations doivent être identifiées à $(\mathfrak{E}'_1)$ et $(\mathfrak{E}'_2)$. Or la comparaison des termes en x^{-2}, $(x-1)^{-2}$, $(x-t)^{-2}$ dans les coefficients de u et v pour $(\mathfrak{E}'_1)$ et (25), de w pour $(\mathfrak{E}'_2)$ et (26) donne, compte tenu de (24),

$$A_j D_j - B_j C_j = n_j(1 - n_j) \quad (j = 1, 2, 3) \ .$$

On tire de là et de (23) :

$$k^2 B_j + k(D_j - A_j) - C_j = \frac{1}{B_j}(k B_j - A_j + n_j)(k B_j - A_j + 1 - n_j) \quad ;$$
$$(j = 1, 2, 3)$$

pour $j = 1$, l'une des parenthèses du second membre est nulle, d'après (24), et, cela, quel que soit ε_1. Ainsi

$$\Delta = \frac{\mathfrak{A}}{x-1} + \frac{\mathfrak{B}}{x-t} = \Delta_0 \frac{x - \lambda_1}{(x-1)(x-t)} , \tag{27}$$

la dernière égalité résultant de la comparaison des termes en v' et en u' de (25) et de $(\mathfrak{E}_1')$. La comparaison des parties principales pour $x = \infty$ des coefficients de u, v, w ne donne rien de nouveau. Mais on déduit de (27) :

$$\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1 - t} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{k^2 B_2 + k(D_2 - A_2) - C_2}{k^2 B_3 + k(D_3 - A_3) - C_3}$$
$$= \frac{B_3}{B_2} \frac{(k B_2 - A_2 + n_2)(k B_2 - A_2 + 1 - n_2)}{(k B_3 - A_3 + n_3)(k B_3 - A_3 + 1 - n_3)} .$$

Or on peut tirer k de (24), et si l'on pose, pour abréger

$$\varphi_j(x) = \frac{A_1}{B_1} - \frac{A_j}{B_j} + \frac{1}{B_1}\left[-\frac{1}{2} + \varepsilon_1\left(n_1 - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{x}{B_j} \qquad (j = 2, 3) ,$$

on trouvera :

$$\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1 - t} = \frac{B_2}{B_3} \frac{\varphi_2(n_2)\varphi_2(1-n_2)}{\varphi_3(n_3)\varphi_3(1-n_3)} . \tag{28}$$

D'après (18), (19), (20), A_1, A_2, A_3 sont linéaires en β_2, donc en λ_2', les coefficients — ainsi que B_1, B_2, B_3, d'après (19), (22) — dépendant rationnellement de λ_2 et t : *ainsi, λ_1 est une fonction rationnelle de λ_2', λ_2, t, du second degré en λ_2'* [13]).

11. *Unicité de la valeur de t_0.* — Faisons tendre t vers un pôle t_0 de $\lambda_2(t)$. Pour $|\lambda_2|$ très grande on a

$$\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2} = -h + \frac{\beta_2(\lambda_2 - t)}{\lambda_2(1-\lambda_2)} = -h - \frac{\beta_2}{\lambda_2}\left(1 - \frac{t-1}{\lambda_2} - \cdots\right) ; \tag{29}$$

or, on a vu (N° 8) que $-\beta_2 : \lambda_2$ tend vers $\frac{1}{2} - \varepsilon_2(n_4 - \frac{1}{2})$; d'après (21) la limite de (29) est donc $-1 - \varepsilon_2(2n_4 - 1) = h_1$, *quantité non nulle*, d'après (4). De même,

---

[13]) La comparaison des termes en $1 : x - \lambda_1$ et en $1 : x - t_1$ dans $(\mathfrak{E}_1')$ et (25) donnerait de même des relations du premier et du deuxième degré en λ_1', λ_2' (à coefficients dépendant de λ_1, λ_2, t), Nous ne les développerons pas actuellement.

$$\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_3}{B_3} = -\left(h + \frac{\beta_2}{\lambda_2}\right) t \ ,$$

expression qui tend vers $h_1 t$. D'ailleurs B_1, B_2, B_3 tendent vers ∞, de sorte que

$$\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1 - t} = \frac{B_2}{B_3} \frac{h_1^2 + \cdots}{h_1^2 t^2 + \cdots} = \frac{\lambda_2 - 1}{t(t-\lambda_2)} (1 + \cdots) \ ,$$

expression qui tend vers $-1 : t$; ainsi, *la valeur* t_0 *qui rend* λ_2 *infini annule aussi* $\lambda_1(t)$ (et, cela, quels que soient ε_1 et ε_2).

12. *Unicité de l'équation* ($\mathfrak{E}$). — Pour prouver que les équations ($\mathfrak{E}$) formées à partir de ($\mathfrak{E}_1$) et ($\mathfrak{E}_2$) sont identiques, il nous reste à établir que $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$. Comme $\lambda_1(t_0) \neq t_0 \neq \lambda_2(t_0)$, $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ sont holomorphes en t_0 [cf. (5), (7)]. D'après (25) et (26), il nous suffit donc de montrer que, t tendant vers t_0, le résidu de

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(kb + d) - a\frac{b'}{b}$$

pour $x = t$ tend vers 0. Or le résidu de $\dfrac{ab'}{b}$ est

$$S = -\frac{A_1}{t} - \frac{A_2}{t-1} + A_3\left(\frac{1}{t-\lambda_2} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right) = \frac{\beta_2 + h(\lambda_2 - t)}{t(t-1)} \ ;$$

le résidu en $x = t$ de $\dfrac{\Delta'}{\Delta}(kb+d)$ est

$$R = \frac{\lambda_1 - 1}{(t-1)(t-\lambda_1)}(kB_3 + D_3) - \frac{kB_1 + D_1}{t} - \frac{kB_2 + D_2}{t-1} \ ;$$

mais, d'après (23) et (24), on a

$$kB_1 + D_1 = f, \qquad \text{avec} \qquad f = \tfrac{1}{2} + \varepsilon_1(n_1 - \tfrac{1}{2}) \ , \tag{30}$$

donc

$$kB_j + D_j = 1 + (f-1)\frac{B_j}{B_1} + B_j\left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_j}{B_j}\right) \ ; \qquad (j = 2, 3)$$

à l'aide de (19) et (22) on trouve alors :

$$R - S = \frac{\beta_2(\lambda_1\lambda_2 - t^2)}{t(t-1)\lambda_2(t-\lambda_1)} + \frac{h\lambda_1(\lambda_2 - t)}{t(t-1)(t-\lambda_1)} + \frac{h}{t-1}$$

$$+ \frac{\lambda_1 - 1}{(t-\lambda_1)(t-1)}\left[1 + (f-1)\frac{\lambda_2 - t}{\lambda_2(t-1)}\right] - \frac{f}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{f-1}{t-1}\,\frac{t(\lambda_2 - 1)}{\lambda_2(t-1)} \ .$$

Or, d'après (8), (9), (15), (16), (21) et (30), on a, au voisinage de t_0:

$$\lambda_1(t) = -2\frac{f-1}{t_0-1}(t-t_0)+\cdots,$$

$$\lambda_2(t) = \frac{t_0(t_0-1)}{2(h-1)}\,\frac{1}{t-t_0}+\cdots,$$

$$-\frac{\beta_2}{\lambda_2} = 2-h+\cdots,$$

en n'écrivant que les parties principales ; et, à l'aide de ces formules, on constatera que $R - S$ tend vers la même limite que

$$-\frac{h-2}{t^2(t-1)}\left[\frac{(f-1)t}{h-1}+t^2\right]-\frac{h(f-1)}{(h-1)t(t-1)}+\frac{h}{t-1}$$

$$-\frac{1}{t(t-1)}\left(1+\frac{f-1}{t-1}\right)-\frac{f}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{(f-1)t}{(t-1)^2}=0\,.$$

Quand t tend vers t_0, $(\mathfrak{E}_1')$ et $(\mathfrak{E}_2')$ tendent donc vers la même équation $(\mathfrak{E})$, et cela, quels que soient les choix de ε_1 et ε_2.

13. *Relations entre intégrales d'équations VI contiguës.* — Les résultats que nous venons d'établir ont une signification qui déborde le problème de *Plateau* et entraîne des conséquences importantes dans la théorie des équations de *Painlevé*. En effet, soient deux équations VI, construites respectivement avec des constantes a, b, c, d telles que, si l'on pose

$$a+\tfrac{1}{4}=(\nu_1-\tfrac{1}{2})^2\,,\quad b+\tfrac{1}{4}=(\nu_2-\tfrac{1}{2})^2\,,\quad c+\tfrac{1}{4}=(\nu_3-\tfrac{1}{2})^2\,,$$
$$a+b+c+d+1=(\nu_4-\tfrac{1}{2})^2\,,$$

les ν prennent les valeurs $n_1-\frac{\varepsilon_1}{2}, n_2, n_3, n_4,$ pour la première équation et $n_1, n_2, n_3, n_4+\frac{\varepsilon_2}{2}$ pour la seconde ; nous venons d'établir que les intégrales de ces équations sont liées par (28). Cette formule — et ses analogues, qu'on obtiendrait par permutation des valeurs singulières de λ [N° 7 et [10])] — généralisent les relations entre les fonctions hypergéométriques contiguës. En effet, ([5], p. 340), pour

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\tfrac{1}{2} \tag{31}$$

(les notations ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 remplaçant respectivement les notations r_0, r_1, r_t, r_∞ de [5]), VI admet toutes les intégrales de l'équation de *Riccati*

$$\frac{t(t-1)\lambda'}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}=\frac{2\nu_1-1}{\lambda}+\frac{2\nu_2-1}{\lambda-1}+\frac{2\nu_3}{\lambda-t}\,, \tag{32}$$

qui se laisse intégrer par la formule

$$\lambda = t + \frac{t(t-1)}{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)} \frac{\Theta'}{\Theta} \tag{33}$$

où Θ satisfait à une équation hypergéométrique de constantes [14])

$$\alpha = -2(\nu_1+\nu_2+\nu_3-1)\,, \qquad \beta = 1-2\nu_3\,, \qquad \gamma = 2-2\nu_1-2\nu_3\,.$$

Si l'on prend $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ la relation (31) est conservée dans le passage d'une équation VI à l'autre, et l'on a pour les équations de *Gauß* correspondantes :

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \varepsilon_1\,, \qquad \beta_2 = \beta_1\,, \qquad \gamma_2 = \gamma_1 - \varepsilon_1\,;$$

ce sont bien des équations contiguës. D'ailleurs la relation de *Gauß* entre les intégrales des deux équations hypergéométriques associées aux équations (32) se traduit actuellement par une relation homographique entre λ_1 et λ_2 (à coefficients fonctions de t), qui se substitue à (28).

14. *Cas d'intégrabilité de VI.* Les relations entre les fonctions $\lambda(t)$ contiguës entraînent une autre conséquence remarquable. Pour a, b, c, d égaux à $-\frac{1}{4}$, c'est-à-dire pour $\nu_j = \frac{1}{2}$ $(j = 1, \ldots, 4)$, VI se réduit à une équation VI_0 rencontrée autrefois par *E. Picard* ([10], p. 298), et qui s'intègre par les formules

$$u = \int_\infty^\varphi \frac{dx}{\xi}\,, \qquad \omega_1 = \int_0^t \frac{dx}{\xi}\,, \qquad \omega_2 = \int_t^1 \frac{dx}{\xi}\,,$$

$$[\xi^2 = 4x(x-1)(x-t)]\,,$$

et $\lambda = \varphi[A_1\omega_1(t_1) + A_2\omega_2(t), t]$; $\varphi(u, t)$ désigne la fonction elliptique de u définie par l'inversion de la première intégrale, et A_1, A_2 sont des constantes arbitraires. D'après le début du N° 13, *l'équation VI sera intégrable en termes finis pour toutes les valeurs des ν_j qui sont égales à des moitiés d'entiers.*

III. Le problème de *Riemann* pour $(\mathfrak{E}_1)$

15. *Signification géométrique de s.* — Nous pouvons donc maintenant nous limiter à $(\mathfrak{E}_1)$, et il nous faut montrer d'abord (N° 5 ; *ad fin.*) qu'on peut construire une intégrale de VI (et une seule) telle que le groupe de

[14]) On ne confondra pas les notations α, β, prises actuellement dans le sens usuel des notations des fonctions hypergéométriques, avec les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ introduites antérieurement.

l'équation $(\mathfrak{E}_1)$ formée à l'aide de cette intégrale (λ, α) soit le groupe $\mathfrak{G}$ défini par Q (*problème de Riemann pour* $(\mathfrak{E}_1)$). Admettons, pour fixer les idées, que, quand t tend vers 0, λ tend vers 0 ; dans l'équation limite de $(\mathfrak{E}_1)$ le coefficient de x^{-2} en facteur de Y_1 est égal à

$$a_1 + \tfrac{1}{4} + c_1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} - \alpha_{10} - \tfrac{1}{2} - \lim_{t \to 0} \beta_1$$

avec $\alpha_{10} = \lim\limits_{t \to 0} \alpha_1(t)$. D'après (11) et (13) cette expression est égale à $\dfrac{s^2}{4} - \dfrac{s}{2}$. L'invariant I de la substitution $S_2 S_1$ (N° 4), étant indépendant de t, est égal à sa valeur calculée sur l'équation-limite, soit $e^{2\pi i r} + e^{-2\pi i r}$ (r, exposant caractéristique de l'équation-limite en $x = 0$), c'est-à-dire à $2 \cos \pi s$ [15]). Rapprochons de la valeur $2 \cos V_{12}$ donnée pour I au N° 4, et observons que $0 \leqslant s < 1$, $0 < V_{12} < \pi$; il viendra alors (cf. [7], p. 96) $\pi s = V_{12}$. On procédera de même pour calculer l'invariant de $S_3 S_2$.

Dès lors, *pour que le groupe de monodromie* $\mathfrak{G}$ *de* $(\mathfrak{E}_1)$ *soit le groupe de substitutions définies* (*N°* 4) *par les produits de deux symétries autour des côtés de* Q, *il faut et il suffit que l'intégrale* (λ, α) *du système* (5), (7) *soit telle que, t tendant respectivement vers* 0 *et* 1, $\alpha(t)$ *tende vers deux limites connues, que nous désignerons désormais par* α_0 *et* α_1 [16]).

16. *Résolution du problème de Riemann.* — Or nous savons déjà construire une infinité d'intégrales $[\lambda(t), \alpha(t)]$ de (5)—(7), telles que t tendant vers 0, $\alpha(t)$ tende vers α_0 ; chacune de ces intégrales est définie par la valeur λ_0 prise par $\lambda(t)$ pour $t\,(>0)$ assez petit ; il résulte d'ailleurs d'un théorème essentiel (fin du N° 7) que, t tendant vers 1, la fonction $\alpha(t)$ poursuivie de 0 à 1, *tend vers une valeur limite,* soit $\alpha^1(\lambda_0)$; il est aisé de voir que $\alpha^1(\lambda_0)$ *est une fonction holomorphe de* λ_0 : car on peut toujours prendre t_1 assez près de 1 sur $(0, 1)$, avec $\lambda(t_1) \neq t_1$ et ∞, pour que α^1 soit fonction holomorphe de $\alpha(t_1)$ et $\lambda(t_1)$ [17]) ; mais, en vertu du

---

[15]) Dans le cas exceptionnel (N° 7) où $\lim\limits_{t \to 0} \lambda(t) = h \neq 0$, on trouverait de même que l'invariant I est égal à $-2 \cos \pi s$.

[16]) On ne confondra pas cette dernière notation avec la notation a_1, désignant la fonction $a_1(t)$ figurant dans $(\mathfrak{E}_1)$. Actuellement a_1 est une constante telle que $4b_1 + 4c_1 + 1 + 4\alpha_1 = s_1^2$, avec $\pi s_1 = V_{23}$, V_{23} mesurant l'angle des vecteurs $A_2 - A_1$ et $A_4 - A_3$. L'expression qu'on vient de trouver pour s_1 se déduit de (11) moyennant la transformation $x_1 = 1 - x$.

[17]) Cf. N° 7, p. 151, le théorème analogue pour le voisinage de $t = 0$.

(La fin de cet article paraîtra dans le prochain numéro)

théorème de *Painlevé* (N° 6), $\alpha(t_1)$ et $\lambda(t_1)$ sont fonctions holomorphes de $\lambda(t_0)$ et $\alpha(t_0)$ [18]) c'est-à-dire (N° 7) de λ_0 (et de α_0, qui est fixe).

Faisons alors varier λ_0 par valeurs réelles à partir d'une valeur λ_{00}; je dis *qu'on peut toujours trouver une valeur* λ_{00} *et une seule telle que* $\alpha^1(\lambda_{00}) = \alpha_1$.

En effet, soit, par exemple, $\alpha^1(\lambda_{00}) < \alpha_1$; supposons que par variation continue de λ_0 on puisse résoudre l'équation $\alpha^1(\lambda_0) = u$ pour $\alpha^1(\lambda_{00}) \leqslant u < M < \alpha_1$, mais non plus pour $M < u < \alpha_1$, et montrons que l'hypothèse est absurde.

Soient $\lambda_0 = l_j$ les zéros réels de $\dfrac{\partial\alpha^1}{\partial\lambda_0}$. Ces zéros sont en nombre fini, car $\dfrac{\partial\alpha^1}{\partial\lambda_0}$ est holomorphe sur l'axe réel et n'est pas identiquement nul [19]). Entourons-les d'intervalles γ_j, d'étendue arbitrairement petite, ε. Si λ_0 est en dehors de ces intervalles, on aura $\left|\dfrac{\partial\alpha^1}{\partial\lambda_0}\right| \geqslant m > 0$; donc, si u_0 est la valeur de u correspondant à une telle valeur de λ_0, la solution $\lambda_0(u)$ de l'équation $\alpha^1(\lambda_0) = u$ sera holomorphe dans un cercle de centre u_0 et de rayon $\geqslant \varrho > 0$ (où ϱ ne dépend que de ε).

Cela étant, faisons tendre u en croissant vers M; ou bien la racine λ_0 de l'équation $\alpha^1(\lambda_0) = u$ que l'on suit par continuité finira par rester dans un des intervalles γ_j, et cela, si petit que soit ε: λ_0 tendra donc vers l_j; ou bien il y aura des points u arbitrairement voisins de M et tels que λ_0 soit extérieur aux γ_j. Mais alors il suffira de prendre $M - u < \varrho$ pour être assuré de l'existence d'un intervalle (u', u'') contenant M à son

---

[18]) Ou admettent comme point critique algébrique $\lambda_0 = 0$, si $4a_1 + 1 = 0, \ldots,$ $\lambda_0 = \infty$, si $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 1 = 0$ (N° 6), cas qui ne sauraient se présenter actuellement. On peut vérifier l'énoncé du texte pour VI_0 (N° 14): $\lambda_0 = \varphi[2A_1\,\omega_1(t_0) + 2A_2\,\omega_2(t_0), t_0]$; $4a_0 = -1 - A_2^2$, $4a_1 = 1 + A_1^2$; cf. [5], p. 347.

[19]) Sinon, il existerait une infinité d'intégrales $\lambda(t)$, $\alpha(t)$ de (5), (7) admettant les mêmes limites, α_0 et α_1, pour $\alpha(t)$, quand t tend vers 0 et vers 1. On pourrait alors construire deux équations ($\mathfrak{E}_1$), à groupes indépendants de t, admettant les mêmes coefficients a_1, b_1, c_1, d_1, donc les mêmes exposants aux mêmes points $0, 1, t_0, \infty$ avec deux points apparemment singuliers λ_0 différents; ces équations auraient nécessairement des groupes distincts (N° 9). Mais ces groupes, ayant les mêmes invariants (puisque $a_1, b_1, c_1, d_1, \alpha_0, \alpha_1$ seraient les mêmes pour les deux équations) ne pourraient être définis par ces invariants, ce qui exige que les équations ($\mathfrak{E}_1$) admettent, chacune, une intégrale à dérivée logarithmique rationnelle (N° 4). Les fonctions $\lambda(t)$ satisfont alors à des équations de *Riccati* ([5], p. 340). Réciproquement, on vérifie dans ce cas ([5], p. 341) que α_0 et α_1 ont les mêmes valeurs, $-2r_0r_t$ et $2r_1r_t$ (notations de [5]; cf. N° 13) pour toutes les intégrales de l'équation de *Riccati*. Si l'on choisit les axes de manière que l'intégrale à dérivée logarithmique rationnelle soit $G(x)$, les normales à S en $A_1, \ldots, A_4$ seront parallèles à OZ; on voit ainsi que la circonstance précédente ne saurait se présenter que pour un quadrilatère plan.

intérieur et où $\lambda_0(u)$ est holomorphe : le prolongement de $\lambda_0(u)$ au delà de M est donc possible.

Reste à examiner l'hypothèse où λ_0 tend vers l_j, point critique algébrique de $\lambda_0(u)$; $\lambda_0 - l_j$ est alors développable suivant les puissances de $(M - u)^{\frac{1}{p}}$, avec p entier. Si p est impair, il existera encore une solution $\lambda_0(u)$ réelle (et une seule) quand u aura dépassé M ; il n'en serait plus de même pour p pair. Mais alors il existerait, pour u voisin de M et inférieur à M, deux valeurs λ_0', λ_0'' voisines de l_j et telles que $\alpha^1(\lambda_0') = u = \alpha^1(\lambda_0'')$. Il existerait donc deux équations $(\mathfrak{E}_1)$ ayant mêmes coefficients a_1, b_1, c_1, d_1 (donc mêmes exposants caractéristiques en 0, 1, t_0, ∞), mêmes valeurs limites pour α en $t = 0$ et $t = 1$, donc même groupe de monodromie, et ayant, cependant deux points apparemment singuliers différents λ_1', λ_0'', ce qui est contraire au lemme d'unicité (N° 9).

L'équation $\alpha^1(\lambda_0) = \alpha_1$ a donc sûrement une racine λ_0, et d'après une nouvelle application du lemme d'unicité, cette racine est unique[20]).

IV. Les quadrilatères symétriques

17. *Variation continue du quadrilatère Q.* — L'intégrale $\lambda_1(t)$ une fois construite, il s'agit de montrer que l'équation $\lambda_1(t) = 0$ admet une solution et une seule dans $(0, 1)$ (N° 5). La méthode qu'on va suivre procède par variation continue du quadrilatère Q. En maintenant fixes les plans $A_1A_2A_3$ et $A_1A_4A_3$, ainsi que les sommets A_1, A_3, on peut faire varier A_2 et A_4 le long, par exemple, de segments de droites, de manière qu'à la fin de la variation A_2 et A_4 coïncident avec les deux sommets de deux triangles isoscèles rectangles, d'hypoténuse A_1A_3, et cela, sans que le quadrilatère cesse d'être gauche. Le groupe $\mathfrak{G}$ pourra donc toujours [cf.[19])] être défini par les invariants précédemment introduits, c'est-à-dire par $a, b, c, d, \alpha_0, \alpha_1$, qui peuvent être considérés comme des fonctions holomorphes d'un paramètre v (servant à représenter les trajectoires de A_2 et A_4). Il s'agit de montrer que *pendant cette variation le nombre des zéros de $\lambda_1(t)$ situés dans $(0, 1)$ reste constant*[21]).

---

[20]) Dans ses grandes lignes, la méthode de continuité suivie au N° 16 reproduit avec certaines simplifications une méthode développée ([6] p. 300) pour résoudre le problème de *Riemann* relatif aux équations du deuxième ordre à $n + 3$ points singuliers, et à exposants s (N° 15) et s_1 [cf. [16])] complexes.

[21]) L'énoncé précédent suppose implicitement que le nombre de ces zéros est fini ; mais la chose est immédiate, car dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$ $\lambda(t)$ est méromorphe, et, d'autre part, les zéros réels de $\lambda(t)$ ne peuvent pas s'accumuler en $t = 0$, ni en $t = 1$ (N° 7).

18. *Invariabilité du nombre des zéros de* $\lambda_1(t)$. — Observons d'abord que pour t fixe $(= \bar{t})$, $\lambda_1(t)$ est une fonction holomorphe de a_1, b_1, c_1, d_1 (N° 6, *ad fin.*), $\alpha(t_0)$ et $\lambda_1(t_0)$ $(= \lambda_0)$; or, si t_0 est pris voisin de 0, $\alpha(t_0)$ est fonction holomorphe de $\alpha_0, \lambda_0, a_1, b_1, c_1, d_1$ (N° 7); d'autre part, sauf dans un cas qui ne peut se présenter pour un quadrilatère gauche [cf. [19])], λ_0 est fonction holomorphe (ou algébroïde) de α_1 (N° 16) (et de a_1, b_1, c_1, d_1); donc $\lambda_1(\bar{t}, v)$ est une fonction holomorphe (ou algébroïde) de v et les zéros t de λ_1 varient par continuité avec v.

Mais, *comme* $0 < V_1 < \pi$, $4a_1 + 1 = \left[1 - \varepsilon\left(\frac{V_1}{\pi} - 1\right)\right]^2$ [cf. (15)] *ne peut jamais s'annuler*; d'après (8) *la fonction* $\lambda_1(t)$ *ne possède jamais que des zéros simples*, et ces zéros, par variation continue ne peuvent jamais venir à coïncider. Il en est de même pour deux pôles, d'après (9); il ne peut donc arriver qu'un zéro disparaisse par suite de la confluence de deux pôles qui le comprendraient. Ainsi, la seule modification du nombre des zéros au cours de la variation proviendrait de l'apparition ou de la disparition de zéros aux extrémités de l'intervalle (0, 1); le phénomène peut-il se présenter pour une valeur v_0 de v? Or, supposons que pour v voisin de v_0, $\lambda_1(t)$ possède un zéro voisin de 0; nous savons (N° 15) que $\lambda_1(t)$ peut être représenté, pour v voisin v_0, et $0 < t < t_0$, assez petit, indépendant de v (N° 7) par un développement (12); mais actuellement, A, B, C sont des fonctions de v, holomorphes pour $v = v_0$, et tendant pour $t \to 0$ vers des limites déterminées, car il est ainsi à chacune des approximations qui convergent vers $\lambda(t)$; et leur convergence est uniforme dans $(0, t_0)$ ([5], p. 271); mais il résulte aussitôt de (12) que λ ou $\lambda - 1$ ne possède pas alors de zéro infiniment voisin de 0; donc [cf. [10])] λ ne possède pas, non plus de zéro infiniment voisin de 1.

En définitive, tout revient à établir le théorème de *Schwarz* pour un quadrilatère symétrique par rapport a un plan $\mathfrak{P}$.

19. *Application de la méthode de Schwarz-Darboux.* — Or *Schwarz* a montré qu'il existe un segment $\mathfrak{P}$ de surface minima, symétrique par rapport à $\mathfrak{P}$, et passant par un tel quadrilatère: d'après le N° 18, ce résultat établit déjà un théorème d'existence pour le problème de *Plateau* relatif à un quadrilatère quelconque. La méthode de *Schwarz* [18] utilise la représentation conforme d'un triangle sphérique sur le demi-plan supérieur à l'aide du quotient de deux intégrales hypergéométriques. Nous allons retrouver rapidement la solution de *Schwarz* sous une forme que lui a donnée *Darboux* ([1], p. 530) et que nous adapterons au problème actuel.

Désignons par u l'angle aigu que font les demi-plans $A_1A_2A_3$ et $A_1A_4A_3$ issus de A_1A_3 avec leur bissecteur externe ; quand on fait varier le quadrilatère symétrique Q (formé toujours de deux triangles isoscèles rectangles d'hypoténuse fixe, A_1A_3) de manière que u tende vers 0, le quadrilatère tend vers un carré. La représentation sphérique de l'une des moitiés S' (ou $A_1A_2A_4$) du segment S qui sont séparées par le plan de symétrie $\mathfrak{P}$ passant par A_2A_4 est un triangle T', de sommets A_1', A_2', A_4', d'angles $\widehat{A}_1' = \frac{\pi}{2} + u^2(1 + \cdots)$ $(\cos \widehat{A}_1' = -\sin^2 u)$, $\widehat{A}_2' = \frac{\pi}{4} = \widehat{A}_4'$, d'aire $u^2\,(1 + \cdots)$ infiniment petite avec u, car la solution S que nous cherchons à construire doit tendre vers l'intérieur d'un carré quand u tend vers 0. Or ce triangle peut être représenté conformément sur le demi-plan supérieur Π $[\Re(i\theta) < 0]$ par un quotient de fonctions hypergéométriques, suivant la formule

$$C\tau = \frac{y_2(\theta, u)}{y_1(\theta, u)} \tag{34}$$

où[22])

$$y_1(\theta, u) = F(\alpha, \beta, \gamma; \theta) \;;$$
$$y_2(\theta, u) = \theta^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; \theta) \;,$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}(\pi - \widehat{A}_1' - \widehat{A}_2' + \widehat{A}_4') = \frac{1}{4} - \frac{u^2}{2\pi} + \cdots,$$
$$\beta = \frac{1}{2\pi}(\pi - \widehat{A}_1' - \widehat{A}_2' - \widehat{A}_4') = -\frac{u^2}{2\pi} + \cdots,$$
$$\gamma = \frac{1}{\pi}(\pi - \widehat{A}_1') = \frac{1}{2} - \frac{u^2}{2\pi} + \cdots, \tag{35}$$

τ étant l'affixe de la projection stéréographique d'un point du triangle sur le plan équatorial, faite à partir de l'antipode de A_1', et C une constante par rapport à θ. En exprimant que le côté $0 < \theta < 1$ du triangle du plan (τ) a pour longueur

$$\frac{\sqrt{2}\sin u}{\cos u + \sqrt{1 + \sin^2 u}} = \frac{u}{\sqrt{2}}[1 + u^2(\ldots)] \;, \tag{36}$$

$u^2(\ldots)$ désignant, ici et plus loin des fonctions holomorphes de u^2, nulles avec u^2, et en observant que

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma c\, \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\, \Gamma(c - a)}$$

[22]) On ne confondra pas les paramètres α, β des fonctions hypergéométriques qu'on va introduire avec les fonctions α et β liées à $\lambda(t)$.

on trouve[23])

$$\frac{C\,u}{\sqrt{2}}[1+u^2(\ldots)]=\frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma\gamma\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} \tag{37}$$

Mais S' étant minima, sa représentation sur T' est conforme, donc aussi sur Π'. Or celle-ci peut s'obtenir directement, car les asymptotiques de S' sont données par $\sigma_1 \pm \sigma_2 = Cte$ et les lignes de courbure, par $\sigma_1 = Cte$, $\sigma_2 = Cte$, avec

$$\sigma_1 + i\,\sigma_2 = \int \sqrt{G_1 H_1' - H_1 G_1'}\,d\theta\ , \qquad \left(G_1' = \frac{\partial G_1}{\partial \theta}\ ;\quad H_1' = \frac{\partial H_1}{\partial \theta}\right)$$

$G_1(\theta, u)$ et $H_1(\theta, u)$ étant les fonctions qu'il faut choisir pour représenter S' par (1) (l'axe OZ étant pris parallèle à OA_1'). S' est donc représentée conformément sur un triangle rectiligne isoscèle du plan σ, triangle qu'on peut représenter à son tour sur le demi-plan Π, et cette représentation est unique, une fois fixés en 0, 1, ∞ les affixes de A_1, A_3, A_4. En identifiant la représentation précédente avec la représentation classique, on trouve

$$\sqrt{G_1 H_1' - H_1 G_1'} = \frac{K(u)}{\theta^{\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{3}{4}}}\ ,$$

avec

$$\frac{y_2}{C\,y_1} = \tau = \frac{H_1}{G_1}\ ,$$

$$\frac{C\,d\tau}{d\theta} = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{(1-\gamma)\,\theta^{-\gamma}\,(1-\theta)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{y_1^2}\ ,$$

d'où:

$$G_1^2(\theta, u) = \frac{K^2 C}{1-\gamma}\,\theta^{\gamma-1}\,(1-\theta)^{\alpha+\beta-\gamma-\frac{1}{2}}\,y_1^2(\theta, u)\ ,$$

$$H_1^2(\theta, u) = \frac{K^2}{C\,(1-\gamma)}\,\theta^{\gamma-1}\,(1-\theta)^{\alpha+\beta-\gamma-\frac{1}{2}}\,y_2^2(\theta, u)\ . \tag{38}$$

On obtient K^2 en exprimant que les côtés du quadrilatère ont une longueur donnée, l, d'où:

$$K = 2^{-\frac{1}{4}}\,l^{\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\frac{3}{4}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{4}}\,u^{\frac{1}{2}}\,[1+u^2(\ldots)]\ . \tag{39}$$

---

[23]) A l'aide de la relation $\Gamma a\,\Gamma(1-a) = \pi$ cosèc $\pi\,a$ on pourra vérifier que la formule (37), où $1+u^2(\ldots)$ représente le développement (36), est identique à la formule (9) de *Darboux* ([1], p. 438), formule que son Auteur déduit ([1], p. 189—191), par des calculs assez longs, des relations de passage obtenues par *Goursat*, dans sa Thèse, pour les intégrales de l'équation hypergéométrique de *Gauss*.

En définitive, $G_1(\theta, u)$ et le quotient de $H_1(\theta, u)$ par u sont holomorphes en u^2 pour $u = 0$ (et $\theta \neq 0, 1, \infty$).

Le segment S'' se laisse représenter de même sur le demi-plan $\Re(i\theta) > 0$. Et, si l'on fait la transformation

$$\theta = 4x(1-x)\,, \qquad \text{ou} \qquad 1-\theta = (1-2x)^2\,, \tag{40}$$

on représentera $S = S' + S''$ sur le demi-plan supérieur (x) par des fonctions

$$\begin{aligned} G(x,u) &= 2(1-2x)^{\frac{1}{2}}\, G_1\,[4x(1-x), u]\,, \\ H(x,u) &= 2(1-2x)^{\frac{1}{2}}\, H_1\,[4x(1-x), u]\,. \end{aligned}$$

Pour u voisin de zéro ces fonctions peuvent encore s'écrire d'après (37), (38), (39) et (40) :

$$G(x,u) = 2^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\frac{3}{4}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}(1-2x)^{-\frac{1}{4}}\,\varphi(x,u^2) \tag{41}$$

$$H(x,u) = 2^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma\frac{3}{4}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{2}} u\, x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}(1-2x)^{-\frac{1}{4}}\,\psi(x,u^2) \times \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}\,;$$

dans ces formules $\varphi(x, u^2)$ et $\psi(x, u^2)$ désignent respectivement deux séries de puissances en u^2, se réduisant à 1 (quel que soit x) pour $u = 0$, et holomorphes en x pour $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$ ou $x > 1$; ces séries en u^2 convergent uniformément lorsque x appartient à tout intervalle fermé intérieur à $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ ou $(1, +\infty)$.

On déduit de là une conséquence essentielle : *les sommets du quadrilatère symétrique Q ont pour affixes 0, $\frac{1}{2}$, 1, ∞ et les fonctions $G(x, u)$ et $u^{-1}H(x, u)$ sont holomorphes en x et u^2 pour $u = 0$ (et x régulier).*

21. *Etude du passage à la limite de Q au carré.* — Ainsi, les coefficients de l'équation linéaire, soit $\mathfrak{E}(u)$, vérifiée par $G(x, u)$ et $H(x, u)$ sont holomorphes en x ($\neq 0, \frac{1}{2}, 1, \infty$) et en u^2 (voisin de 0). Cette équation se déduit de l'équation vérifiée par $y_1(\theta, u)$ et $y_2(\theta, u)$ transformée par (40) ; elle s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{d^2Y}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)\frac{dY}{dx} - \\ &- \left[\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{(\gamma-\alpha-\beta)^2}{(x-\frac{1}{2})^2} - \frac{2\delta}{x(x-1)}\right]Y = 0 \end{aligned} \tag*{$[\mathfrak{E}(u)]$}$$

avec

$$\delta = \gamma^2 - \gamma(\alpha + \beta) - \gamma + 2\alpha\beta + 1 \ ,$$

et les exposants caractéristiques relatifs à $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \infty$ sont respectivement :

$$\pm \frac{\hat{A}_1'}{2\pi}, \quad \pm \frac{\hat{A}_2'}{\pi}\left(= \pm \tfrac{1}{4}\right), \quad \pm \frac{\hat{A}_1'}{2\pi}, \quad 1 \pm \frac{\hat{A}_4'}{\pi} \ ;$$

le coefficient de $-Y$ dans l'équation limite $\mathfrak{E}(0)$ est

$$\frac{1}{16}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2}\right] - \frac{9}{8x(x-1)} \, ,$$

et l'on peut vérifier que $\mathfrak{E}(0)$ admet l'intégrale $x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}(1-2x)^{-\frac{1}{4}}$, comme on pouvait le prévoir d'après (41).

Cela étant, formons les équations $[\mathfrak{E}_1(u)]$ et VI(u) associées à $[\mathfrak{E}(u)]$, comme $(\mathfrak{E}_1)$ et VI à $(\mathfrak{E})$ (N° 5). Le rapprochement de $[\mathfrak{E}(u)]$ et $(\mathfrak{E})$ (N° 3) donne aussitôt a_1, b_1, c_1, d_1 : ce sont des fonctions de u^2, holomorphes pour $u = 0$. On voit encore que le coefficient α_1 de $[\mathfrak{E}_1(u)]$, que nous désignerons par $\alpha(t, u)$ est tel que $\alpha(\frac{1}{2}, u) \equiv 0$. D'après le théorème de *Painlevé* et sa généralisation (N° 6 et dernier alinéa de ce N°) l'une au moins des fonctions $\lambda(t,u)$ [intégrale de VI(u)] et $\lambda^{-1}(t,u)$ est pour $t \neq 0, 1, \infty$ une fonction holomorphe de u^2, de $\lambda(\frac{1}{2},u) \equiv 0$ et de $\alpha(\frac{1}{2}, u) \equiv 0$; ainsi, $\lambda(t, u)$ ou $\lambda^{-1}(t, u)$ est une fonction holomorphe de t et de u^2, au voisinage de $t = \bar{t}$ $(\neq 0, 1, \infty)$ et de $u = 0$. Dès lors, $\lambda(t, 0) = \lim\limits_{u \to 0} \lambda(t, u)$ est une fonction de t, holomorphe ou méromorphe pour $t = \bar{t}$, et qui vérifie l'équation VI (0), limite pour $u \to 0$ de VI(u) ; de même $\alpha(t, 0) = \lim\limits_{u \to 0} \alpha(t, u)$.

Or, quand $u \to 0$, les expressions limites de a_1, b_1, c_1, d_1, $\lambda(t,u)$, $\alpha(t,u)$ définissent une équation linéaire $[\mathfrak{E}_1(0)]$, limite de $[\mathfrak{E}_1(u)]$, possédant un point apparemment singulier $x = \lambda(t,0)$, et dont le groupe de monodromie $\mathfrak{G}$ est indépendant de t ; le long d'un contour fermé fixe enveloppant des points singuliers 0, 1, t, les intégrales de $[\mathfrak{E}_1(u)]$ (à valeurs initiales fixes pour $x = x_0$ fixe) tendent uniformément vers des intégrales de $[\mathfrak{E}_1(0)]$: les coefficients des substitutions du groupe $\mathfrak{G}(u)$ de $[\mathfrak{E}_1(u)]$ tendent donc vers ceux de $\mathfrak{G}$. D'autre part, $\mathfrak{G}(u)$ est aussi le groupe de $[\mathfrak{E}(u)]$, groupe qui, pour la même raison, tend vers le groupe de $[\mathfrak{E}(0)]$ quand $u \to 0$: ce dernier groupe est donc identique à $\mathfrak{G}$. Mais on a vu que $[\mathfrak{E}(0)]$ admet une intégrale $x^{-\frac{1}{4}}(x-1)^{-\frac{1}{4}}(x-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{4}}$ à dérivée logarithmique rationnelle ; le groupe de $[\mathfrak{E}_1(0)]$ admet donc des substitutions génératrices de la forme

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ C_j & i \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

et, par suite, $[\mathfrak{E}_1(0)]$ admet aussi une intégrale à dérivée logarithmique rationnelle. D'après le N° 8 les exposants d'une telle intégrale, Y_1, sont respectivement, en $x = 0, 1, t, \lambda, \infty$:

$$\varepsilon\left(\frac{1+\varepsilon_1}{2} - n_1\right), \quad \pm(\tfrac{1}{2} - n_2), \quad \pm(\tfrac{1}{2} - n_3), \quad \tfrac{1}{2} + \varepsilon', \quad 1 + \varepsilon''(\tfrac{1}{2} - n_4)$$

où $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$; actuellement, les n_j sont égaux à $\frac{1}{4}$ et, quand $t \to \frac{1}{2}$ et $\lambda \to 0$, Y_1 doit tendre, pour x fixe, vers $x^{-\frac{1}{4}}(x-1)^{-\frac{1}{4}}(x-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{4}}$; on a donc

$$\varepsilon\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) + \tfrac{1}{2} + \varepsilon' = -\tfrac{1}{4}$$

d'où, aussitôt, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon' = -1$ et

$$Y_1 = x^{\frac{1}{4}}(x-1)^{-\frac{1}{4}}(x-t)^{-\frac{1}{4}}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui s'accorde bien avec $\varepsilon'' = -1$.

Or on sait ([4], p. 105) que si l'équation $y'' = P(x, t)y$, de la classe de *Fuchs*, à quatre points singuliers $0, 1, t, \infty$, à un point apparemment singulier $\lambda(t)$, et à groupe de monodromie indépendant de t, admet une intégrale à dérivée logarithmique rationnelle

$$y = x^{\nu_1}(x-1)^{\nu_2}(x-t)^{\nu_3}(x-\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

$\lambda(t)$ satisfait à l'équation de *Riccati* (32) (dont toutes les intégrales, d'après le N° 5, satisfont nécessairement à une équation VI) ; actuellement la transformation $y = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{\frac{1}{2}}Y_1$ changera $[\mathfrak{E}_1(0)]$ en une équation $y'' = Py$; on aura donc $\nu_1 = \frac{3}{4}$, $\nu_2 = \frac{1}{4}$, $\nu_3 = \frac{1}{4}$ et l'équation de *Riccati* (32) s'écrira

$$\lambda' = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + t}{2t(t-1)}. \tag{42}$$

On verra (N° 22) que l'intégrale de cette équation qui passe par $(t = \frac{1}{2},\ \lambda = 0)$ aboutit, pour $t = 0$, à l'origine $(0, 0)$; comme au N° 18, on en déduira donc que le nombre des zéros $t(u)$ de $\lambda(t, u)$ tels que $0 < t < 1$ reste invariable pour $u \geqslant 0$ assez petit. Tout revient donc à calculer ce nombre de zéros pour $u = 0$.

22. *Les courbes intégrales de l'équation de Riccati* (42). Or ce dernier nombre se calcule aisément. L'équation (42) se ramène par la transformation

$$\lambda = t + 2t(1-t)\frac{w'}{w}$$

à l'équation du type hypergéométrique[24])

$$t(1-t)\,w'' - t\,w' + \frac{w}{4} = 0 \ . \tag{43}$$

Mais cette équation possède une intégrale $w_0 = tF(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\,; t)$ holomorphe dans le voisinage de $t = 0$; à cette intégrale correspond une intégrale

$$\lambda_0(t) = 2 - \frac{t}{4} + \cdots ,$$

holomorphe pour $t = 0$, conformément d'ailleurs à la théorie générale de l'équation VI[25]) ; soit C_0 la courbe intégrale correspondante[26]) ; C_0 passe par le point A $(t = 0,\ \lambda = 2)$. Au voisinage de A toute intégrale de (43) autre que $w_0(t)$ a la forme

$$w(t) = K\left[-1 + \frac{t}{4}(K_1 + \log t) + t\varphi_0(t)\right]F(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 2\,; t) ,$$

---

[24]) La transformation $\omega = w + 2(1-t)w'$ $\left(\text{d'où } \omega' = w' - \frac{w}{2t}\right)$ change (43) en l'équation

$$t(1-t)\omega'' + (1-2t)\omega' - \frac{\omega}{4} = 0$$

vérifiée par les périodes de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$. On trouve ainsi

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega + 2(t-1)\omega'} \ .$$

[25]) Type exceptionnel de première espèce ; [5], p. 281 ; on a $h = 2$.

[26]) On peut d'ailleurs établir l'existence de cette intégrale en posant $\lambda = 2 + \mu$; l'équation en S de *Poincaré* relative au point $t = 0$ de l'équation en μ s'écrit $S^2 = 4$; le point A est un col pour (42) ; les deux courbes intégrales réelles passant par A sont la courbe C_0 et la droite $t = 0$.

K et K_1 étant des constantes arbitraires finies et $\varphi_0(t)$ une fonction de t holomorphe pour $t = 0$; le terme principal de $\lambda(t)$ sera $-\frac{t}{2}\log t$[27]) : pour t tendant vers 0 les courbes intégrales de (42) tendant vers O et autres que C_0 aboutissent à l'origine O $(t = 0, \ \lambda = 0)$ tangentiellement à $t = 0$, avec le coefficient angulaire $+\infty$.

Etudions de même le point $t = 1$. L'équation (43) possède l'intégrale holomorphe en $t = 1 : w_1 = F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 ; 1 - t)$ à laquelle correspond pour (42) l'intégrale holomorphe[28])

$$\lambda_1(t) = 1 + \frac{t-1}{2} + \cdots ,$$

qui définit une courbe intégrale C_1 passant par B $(t = 1, \ \lambda = 1)$. Au voisinage de $t = 1$ les intégrales de (43) autres que $w = w_1(t)$ peuvent être représentées par

$$w = K'[K_1' + \log(1 - t) + \varphi_1(t)]F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1 ; 1 - t) ,$$

K', K_1' étant deux constantes finies, et $\varphi_1(t)$ une fonction holomorphe et nulle pour $t = 1$; on a ainsi[29])

$$\lambda(t) = 1 - \frac{2}{\log(1-t)} + \cdots ,$$

en se limitant au terme principal de $\lambda - 1$; ainsi les courbes intégrales tendant vers B et autres que C_1 aboutissent en B tangentiellement à $t = 1$, avec pour coefficient angulaire $-\infty$.

Ces préliminaires établis, traçons l'arc $t(1 - t) > 0$ de la parabole

$$\lambda^2 - 2\lambda + t = 0 . \tag{Γ}$$

Cet arc relie les points A, B, O et sépare la bande $0 < t < 1$ en trois régions : l'une R_2, intérieure à Γ, où $\lambda' > 0$; les autres, où $\lambda' < 0$, sont R_1 et R_3, respectivement au-dessus de l'arc AB et au-dessous de l'arc AB de Γ. Remarquons immédiatement qu'un arc de courbe intégrale issu d'un point M' (ou M) de l'arc AB (ou OB) de Γ y possède une tangente horizontale et passe nécessairement de R_2 dans R_1 (ou R_3) quand on fait croître t sur l'arc au voisinage de M.

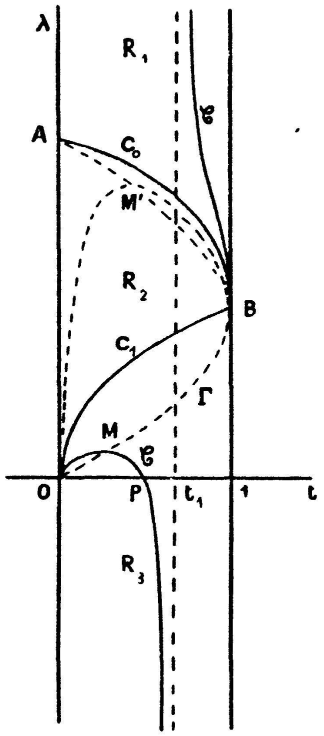
---

27) Le développement est du type général de deuxième espèce (No 7), avec $\overset{*}{s} = 0$. Le point O est un nœud.

28) Type exceptionnel de deuxième espèce (pour $t = 1$) ; [5], p. 294 ; on a $\overset{*}{h} = \frac{1}{2}$.

29) Le développement est du type général de première espèce (No 7), avec $s = 0$. Le point B résulte de la fusion d'un col et d'un nœud. Par B passent deux courbes intégrales régulières : C_1 et $t = 1$.

Soit alors $\mathfrak{C}$ un arc de courbe intégrale de (42) issu d'un point P, d'abscisse t_0 $(0<t_0<1)$ de l'axe $\lambda = 0$, et suivi à partir de P *pour* t *décroissant* ; il présentera d'abord une ordonnée croissante et coupera donc l'arc OB de Γ, en pénétrant ensuite dans R_2 d'après la remarque ; puis son ordonnée décroîtra, et l'arc, assujetti à rester dans R_2 d'après la même remarque, tendra vers O quand t tendra vers 0 : sinon l'arc couperait la droite $t = 0$ en un point N distinct de O ou A, c'est-à-dire en un point régulier — ce qui est absurde, car $t = 0$ est la seule courbe intégrale de (42) qui passe par N.



Suivons maintenant $\mathfrak{C}$ à partir de P *pour* t *croissant* ; λ décroîtra constamment, et l'on peut faire deux hypothèses. Ou bien, pour $t_0<t<1$ λ reste fini, et, quand t tend vers 1, λ tend vers une valeur limite, finie ou non ; $\mathfrak{C}$ coupera donc la courbe intégrale $t = 1$ de (42) en un point régulier[30]), ce qui est absurde. Ou bien — et c'est la seule hypothèse à retenir — il existe une valeur t_1 $(t_0<t_1<1)$ telle que, t tendant vers t_1 en croissant, λ tende vers $-\infty$; la droite $t = t_1$ est une asymptote de $\mathfrak{C}$; quand t aura dépassé t_1 par valeurs croissantes, λ décroîtra depuis $+\infty$ et l'arc de $\mathfrak{C}$ appartiendra à R_1 (car les pôles de $\lambda(t)$ sont simples ; N° 18) et quand t croîtra et tendra vers 1, l'arc de $\mathfrak{C}$, qui ne peut pénétrer dans R_2 d'après la remarque préliminaire, atteindra $t = 1$ en un point qui ne peut être que B ; il y arrivera avec une tangente verticale.

La courbe $\mathfrak{C}$ ne peut donc couper $\lambda = 0$ (hors de 0) qu'une seule fois, au point P. En particulier, il en est ainsi de la courbe issue du point $t = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$, ce qui montre que la solution symétrique de *Schwarz* pour le problème de *Plateau* relatif à un quadrilatère symétrique est la seule solution de ce problème, et, comme nous l'avons vu, ceci établit du même coup le théorème d'unicité de *Schwarz* pour un quadrilatère quelconque.

---

[30]) En posant $\lambda = \mu^{-1}$ on s'assure que le point à l'infini de $t = 1$ est régulier pour l'équation en μ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des Surfaces, t. I, 1re éd., Paris 1887.

[2] *R. Fuchs*, Math. Ann. Bd. 63, 1906.

[3] *B. Gambier*, C. R. Ac. Sc., t. 143, 1906, p. 741.

[4] *R. Garnier*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3e sér., t. 29, 1912, p. 1—126.

[5] *R. Garnier*, ibid., 3e sér., t. 34, 1917, p. 239—353.

[6] *R. Garnier*, ibid., 3e sér., t. 43, 1926, p. 177—307.

[7] *R. Garnier*, ibid., 3e sér., t. 45, 1928, p. 53—144.

[8] *P. Painlevé*, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris 1897.

[9] *P. Painlevé*, Bull. Soc. Math. Fr., t. 28, 1900, p. 201—261.

[10] *P. Painlevé*, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 143, 1906, p. 1114—1116.

[11] *E. Picard*, Journ. Math. pures et appl., 4e sér., t. 5, 1889.

[12] *E. Picard*, Traité d'Analyse, t. III, 2e éd., Paris 1908.

[13] *H. Poincaré*, Oeuvres, t. 2, Paris 1916.

[14] *T. Radó*, Acta litt. Sc. reg. Univ. Szeged, sc. Math., t. VI, 1932—1934.

[15] *T. Radó*, Ergebnisse der Mathematik, zweiter Band, 2 (On the Problem of Plateau), Berlin 1933.

[16] *L. Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1897, Bd. II 1.

[17] *L. Schlesinger*, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908.

[18] *H. A. Schwarz*, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, erster Band, Berlin 1890.

(Reçu le 17 novembre 1949.)