**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 25 (1951)

**Artikel:** Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali.
**Autor:** Longhi, Ambrogio
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-20699

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali

Di Ambrogio Longhi, a Lugano

Scopo di questa Nota è la risoluzione, in tutta la loro generalità, dei problemi seguenti.

*Essendo $\Gamma$ una curva razionale irriducibile, anche dotata di cuspidi ordinarie (oltre che di punti multipli ordinari e iperpiani stazionari ordinari), appartenente allo spazio $S_r$ ad $r$ dimensioni, determinare:*

$A_1$) *Le classi di tutti gli inviluppi d'iperpiani pluritangenti di una qualsiasi sviluppabile osculatrice di $\Gamma$.*

$A_2$) *La classe dell'inviluppo degli iperpiani tangenti o pluritangenti comuni a due o più sviluppabili osculatrici di $\Gamma$.*

$B_1$) *Gli ordini di tutte le varietà multiple di una qualsiasi sviluppabile osculatrice di $\Gamma$.*

$B_2$) *L'ordine della varietà d'intersezione di quante si vogliano sviluppabili osculatrici di $\Gamma$ o loro varietà multiple.*

I problemi $A_1$) e $A_2$) rientrano entrambi nell'altro:

A) *Determinare la classe della varietà (quando esiste) degli iperpiani di $S_r$ aventi ciascuno con $\Gamma$ un dato numero di contatti di dati ordini (in punti non dati).*

Invece i problemi $B_1$) e $B_2$) rientrano nel duale di A):

B) *Determinare l'ordine della varietà (quando esiste) luogo dei punti di $S_r$ appartenenti ciascuno a un dato numero di spazi distinti, di date dimensioni, osculatori a $\Gamma$ (in punti non dati).*

Il problema A) è notoriamente risoluto (ed anzi per una curva di genere $p \geq 0$) dalla formula di *De Jonquières se però la curva $\Gamma$ è priva di cuspidi:* mentre per una curva $\Gamma$ cuspidata se ne conosce la completa soluzione unicamente nello spazio ordinario $S_3$.

Il problema B) è finora rimasto insoluto, fuori dello spazio $S_3$, anche per una curva $\Gamma$ razionale generale nel suo ordine (quindi senza cuspidi):

se si eccettua il caso della curva razionale normale, in cui la soluzione, subito ottenibile mediante la formula di *De Jonquières*, fu esplicitamente data dal *Comessatti* [1]).

L'insufficienza di tale formula a offrire la soluzione del problema B) ad esempio nel caso di una curva $\Gamma$ non normale ed esente da cuspidi, dipende dalla circostanza che allora l'inviluppo duale della curva $\Gamma$ (la quale possiede certo degli iperpiani stazionari) ha la curva di regresso necessariamente cuspidata.

Le soluzioni dei problemi surriferiti vengono qui raggiunte applicando una mia formula, più generale di quella del *De Jonquières* per le curve razionali, stabilita in una Nota antecedente [2]).

**1.** Nel seguito, considerandosi una curva razionale $C_n^0$, d'ordine $n$, dello spazio $S_r$ ad $r$ dimensioni, con $\varrho$ cuspidi, si sottintenderà sempre che essa: *appartenga* all' $S_r$; sia irriducibile; abbia le sue cuspidi in posizione generica e tutte ordinarie, cioè origini ciascuna di un ramo $(21\ldots11)$; non possegga altri elementi stazionari che iperpiani osculatori a rami $(11\ldots12)$ nelle rispettive origini: e infine ammetta eventualmente punti multipli origini ciascuno di due o più rami non singolari $(11\ldots11)$ a tangenti distinte.

Per brevità, quando $\varrho = 0$ la suddetta $C_n^0$ (senza cuspidi) si dirà una *generica* curva razionale d'ordine $n$ dello spazio $S_r$.

**2.** In $S_r$ tutti gli iperpiani passanti per $r - \sigma$ punti generici segano sulla curva $C_n^0$ (n. 1) una serie lineare $g_n^\sigma$ avente un numero finito $X$ di gruppi caratterizzati dalla proprietà di contenere ciascuno $t$ punti, *non cuspidi di* $C_n^0$, rispettivamente multipli secondo $\nu_1 + 1$, $\nu_2 + 1, \ldots,$ $\nu_t + 1$: purchè valga $\sigma$ la somma dei $t$ numeri $\nu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ e sia inoltre $\sigma + t \leq n$.

La determinazione di $X$, che la formula di *De Jonquières* permette di eseguire solo se $\varrho = 0$, si può fare in ogni caso con la formula (1) o (12) o (14) della mia Nota citata [2]); e si perviene così al teorema:

*Una curva razionale $C_n^0$, d'ordine $n$ e dotata di $\varrho$ cuspidi* (n. 1), *appartenga allo spazio $S_r$; e sia $W$ la varietà degli $\infty^{r-\sigma}$ iperpiani di $S_r$ aventi ciascuno con $C_n^0$, in punti distinti dalle cuspidi, $t$ contatti di rispettivi dati ordini $\nu_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, con:*

---

[1]) *A. Comessatti*, La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi (Math. Ann. 89, 1923), n. 14.

[2]) *A. Longhi*, I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate (Comment. Math. Helv., Vol. 24°, fasc. 3°, 1950).

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = \sigma \leq r$$

*e:*

$$1 \leq t \leq n - \sigma \ .$$

*Se allora i t numeri $\nu_i$ si ripartiscono in $\tau$ gruppi ($\tau \leq t$), cosicchè gli $\alpha_j$ numeri di ogni gruppo ($j = 1, 2, \ldots, \tau$) siano tutti eguali fra di loro ma diversi dai rimanenti $t - \alpha_j$, si ha che la classe di W (numero dei suoi iperpiani se $\sigma = r$, e di quelli passanti per $r - \sigma$ punti generici di $S_r$ se $\sigma < r$) vale:*

$$\frac{1}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \sum_{k=0}^{t} (t-k)! \, k! \, s_k \binom{n-\sigma-k}{t-k} \binom{n-\sigma-\varrho}{k} ,$$

*ove $s_0 = 1$ ed $s_k$ ($k = 1, 2, \ldots, t$) indica la somma dei prodotti a k a k dei t numeri $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ (onde $s_1 = \sigma$).*

*La classe suddetta è anche esprimibile sotto la forma:*

$$\frac{1}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k (t-k)! \, k! \, s_k \binom{n-\sigma-k}{t-k} \binom{\varrho+\sigma-n+k-1}{k} ,$$

*come pure sotto l'altra:*

$$\frac{1}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \sum_{i=0}^{t} (-1)^i (t-i) ! \, i ! \binom{n-\sigma-i}{t-i} \binom{\varrho}{i} \sum_{k=i}^{t} \binom{k}{i} s_k \ .$$

**Osservazione.** — È da avvertire che, qui e in tutto il seguito, devesi ritenere $\binom{h}{0} = 1$ anche se $h \leq 0$: e $\binom{h}{k} = 0$ solo se $0 \leq h < k$; mentre:

$$\binom{h}{k} = (-1)^k \binom{k-h-1}{k}$$

se $h < 0$ .

**3.** Dal teorema del n. 2, supponendo fra loro eguali tutti i numeri $\nu_i$, si deduce in particolare [3]) il seguente altro:

*In $S_r$ gli iperpiani $\nu$-tangenti della $\mu$-esima sviluppabile osculatrice di una curva razionale $C_n^0$ d'ordine n con $\varrho$ cuspidi* (n. 1), *ossia gli iperpiani aventi ciascuno con $C_n^0$, altrove che nelle cuspidi, $\nu$ distinti contatti di ordine $\mu$, formano, se $\mu\nu \leq r$ e:*

---

[3]) Tenendo anche presente l'ultima formula (nel n. 8) della Nota citata in [2]).

$$1 \leq \nu \leq n - \mu\nu \ ,$$

*un inviluppo* $\infty^{r-\mu\nu}$ *di classe:*

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{n-\mu\nu-\varrho}{k} \binom{n-\mu\nu-k}{\nu-k} \mu^k \ ,$$

*eguale anche a:*

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \mu^i (\mu+1)^{\nu-i} \binom{n-\mu\nu-i}{\nu-i} \binom{\varrho}{i} \ .$$

Come corollario:

*Il numero degli iperpiani r-tangenti di una curva razionale di ordine* $n \geq 2r$, *con* $\varrho$ *cuspidi, appartenente ad* $S_r$, *è:*

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i 2^{r-i} \binom{n-r-i}{r-i} \binom{\varrho}{i} \ .$$

**4.** Sia $\Gamma^0_{n'}$ la curva (razionale) polare reciproca della $C^0_n$ (n. 1) rispetto ad una generica quadrica $V^2_{r-1}$ di $S_r$.

L'ordine $n'$ di $\Gamma^0_{n'}$ eguaglia la classe di $C^0_n$; e non possedendo la curva $C^0_n$ che $\varrho$ cuspidi, senza spazi $S_k$ iperosculatori con $0 < k < r-1$, si ha quindi che:

$$n' = r(n-r+1) - (r-1)\varrho \ ;$$

mentre le cuspidi di $\Gamma^0_{n'}$ sono i poli, rispetto a $V^2_{r-1}$, degli iperpiani stazionari di $C^0_n$; il cui numero è:

$$\varrho' = (r+1)(n-r) - r\varrho \ ,$$

ossia

$$\varrho' = n + n' - 2r - \varrho \ .$$

Nè la curva $\Gamma^0_{n'}$ ha ulteriori elementi stazionari: se non i $\varrho$ iperpiani polari (rispetto a $V^2_{r-1}$) delle cuspidi di $C^0_n$.

Si consideri ora sulla curva $C^0_n$ un punto *qualunque* $P$, ed un ramo $(\alpha\, 11 \ldots \alpha_{r-1})$ di origine $P$: per le ipotesi fatte relativamente a $C^0_n$ (n. 1) tutti i ranghi di tale ramo sono eguali all'unità, mentre l'ordine $\alpha$ e la classe $\alpha_{r-1}$ valgono al più 2.

Se $O$ è un punto dello spazio $S_{r-\lambda-1}$ (ma non dello $S_{r-\lambda-2}$) osculatore in $P$ al ramo suddetto, ed è $0 \leq \lambda < r-1$, fra gli $n'$ iperpiani osculatori a $C^0_n$ passanti per $O$ ve ne sono precisamente $\alpha_{r-1} + \lambda$ coincidenti nell'iperpiano $\pi$ osculatore al ramo in $P$.

Nella polarità rispetto a $V^2_{r-1}$, al ramo $P$ $(\alpha\, 11 \ldots \alpha_{r-1})$ di $C^0_n$ corrisponde un ramo $P'$ $(\alpha_{r-1}\, 11 \ldots \alpha)$ di $\Gamma^0_{n'}$, designando $P'$ il polo di $\pi$: e l'iperpiano $\omega'$ polare di $O$ ha in $P'$, con quest'ultimo ramo, la molteplicità d'intersezione $\alpha_{r-1} + \lambda$.

Ciò premesso, si voglia determinare l'ordine $x$ della varietà luogo dei punti $M$ di $S_r$ appartenenti ciascuno a $t$ spazi $S^{(i)}_{r-\nu_i-1}$ osculatori a $C^0_n$ in punti distinti $M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$; luogo che esiste, ed è una varietà $V^x_{r-\sigma}$, appena sia:

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = \sigma \leq r \ .$$

È allora $x$ il numero dei punti $M$ situati in un generico spazio $S^*_\sigma$. Variando un punto $Q$ su $S^*_\sigma$, il gruppo $G_{n'}$ degli $n'$ iperpiani osculatori a $C^0_n$ uscenti da $Q$ descrive una serie lineare $g^\sigma_{n'}$; e risulta dotato di $t$ iperpiani $(\nu_i + 1)$-upli $(i = 1, 2, \ldots, t)$ non solo quando $Q$ diviene un punto $M$ di $V^x_{r-\sigma}$, ma pure (se $\varrho' > 0$) nei seguenti altri casi, e in essi soltanto:

1) Quando, supposto $t \leq \varrho'$, è $Q$ la traccia su $S^*_\sigma$ dello spazio $S_{r-\sigma}$ intersezione di $t$ spazi $S_{r-\nu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ osculatori ciascuno a $C^0_n$ in uno dei punti di contatto $T_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \varrho')$ dei $\varrho'$ iperpiani stazionari di $C^0_n$.

2) Quando $Q$ è uno dei punti (in numero finito) comuni ad $S^*_\sigma$, alla varietà, di dimensione:

$$r - (\nu'_1 + \nu'_2 + \cdots + \nu'_\varepsilon) \ ,$$

luogo dei punti donde escono $\varepsilon$ distinti spazi

$$S_{r-\nu'_1-1}, \ S_{r-\nu'_2-1}, \ldots, S_{r-\nu'_\varepsilon-1}$$

osculatori a $C^0_n$, e a $t - \varepsilon$ spazi $S_{r-\nu'_{\varepsilon+1}}$, $S_{r-\nu'_{\varepsilon+2}}, \ldots, S_{r-\nu'_t}$ pure osculatori a $C^0_n$: però in $t - \varepsilon$ dei $\varrho'$ punti $T_j$; essendo $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_\varepsilon, \nu'_{\varepsilon+1}, \ldots, \nu'_t$ una permutazione variabile di $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$, e $1 \leq \varepsilon < t \leq \varrho' + \varepsilon$.

Consegue da quanto precede che l'ordine cercato $x$ della varietà $V^x_{r-\sigma}$ è uguale al numero dei gruppi della suddetta serie lineare $g^\sigma_{n'}$ dotati ciascuno di $t$ iperpiani $(\nu_i + 1)$-upli $(i = 1, 2, \ldots, t)$ tutti diversi dai $\varrho'$ iperpiani stazionari di $C^0_n$.

Siccome, infine, la polarità rispetto alla quadrica $V^2_{r-1}$ trasforma la serie lineare $g^\sigma_{n'}$ in quella staccata sulla curva $\Gamma^0_{n'}$ dagli iperpiani condotti per uno spazio $S^*_{r-\sigma-1}$, si conclude che *l'ordine $x$ di $V^x_{r-\sigma}$ è il numero degli iperpiani di $S_r$ passanti per $r-\sigma$ punti generici e aventi ciascuno $t$ distinti incontri $(\nu_j+1)$-upli $(j=1,2,\ldots,t)$ con la curva $\Gamma^0_{n'}$ in punti diversi dalle sue $\varrho'$ cuspidi.*

**5.** La conclusione del n. 4 e il risultato del n. 2 (ove si ponga $n'$ e $\varrho'$ in luogo di $n$ e $\varrho$) conducono ora senz'altro al teorema seguente, oggetto principale di questa Nota.

*Nello spazio $S_r$ ad $r$ dimensioni il luogo dei punti tali che da ciascuno di essi escono almeno, e in generale precisamente, $t$ spazi distinti $S_{r-\nu_i-1}$ $(t \geq 1;\ i=1,2,\ldots,t)$ osculatori di una data curva razionale $C^0_n$ d'ordine $n$, appartenente ad $S_r$, con $\varrho$ cuspidi* (n. 1) *e quindi di classe:*

$$n' = r(n-r+1) - (r-1)\varrho\ ,$$

*è, se:*

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = \sigma \leq r\ ,$$

*una varietà $V^\omega_{r-\sigma}$ di dimensione $r-\sigma$ e di ordine* [4]*:*

$$\omega = \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\sum_{k=0}^{t}(-1)^k k!\,(t-k)!\,s_k\,\omega_k$$

*ove:*

$$\omega_k = \binom{n-2r+\sigma-\varrho+k-1}{k}\binom{n'-\sigma-k}{t-k}.$$

*Devesi supporre $1 \leq \nu_i < r$, $t \leq n'-\sigma$ ed $s_0 = 1$; mentre $s_k$ $(k=1,2,\ldots,t)$ denota la somma dei prodotti a $k$ a $k$ dei $t$ numeri $\nu_1$, $\nu_2,\ldots,\nu_t$ (onde $s_1=\sigma$): ripartibili in $\tau$ gruppi $(\tau \leq t)$ rispettivamente di $\alpha_1$, di $\alpha_2,\ldots,$ e di $\alpha_\tau$ numeri, così che quelli di uno stesso gruppo siano tutti eguali fra di loro, ma diversi dai rimanenti.*

*L'ordine suddetto $\omega$ è pure esprimibile mediante la formula:*

$$\omega = \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i i!\,(t-i)!\,\Omega_i$$

*ove:*

$$\Omega_i = \binom{n+n'-2r-\varrho}{i}\binom{n'-\sigma-i}{t-i}\sum_{k=i}^{t}\binom{k}{i}s_k\ .$$

---

[4]) Si tenga presente l'Oss. al n. 2.

**Osservazione.** — Quando $t = 1$, posto $r - \nu_1 - 1 = \nu$, il teorema fornisce l'ordine della $\nu$-esima sviluppabile osculatrice (luogo degli $S_\nu$ osculatori) della curva $C_n^0$, e quindi $\omega$ deve allora eguagliare il $\nu$-esimo rango di $C_n^0$: come effettivamente si verifica.

**6.** Dal teorema del n. 5 discende una moltitudine di risultati particolari: interessanti e nuovi anche nel caso di una curva $C_n^0$ razionale generica (nel senso precisato al n. 1).

Supponendo ad esempio $\sigma = r$ si ottiene che:

$\alpha$) *Nello spazio $S_r$ ad $r$ dimensioni, quando:*

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = r \ ,$$
$$2 \leq t \leq r(n-r) - (r-1)\,\varrho$$

*e $\nu_i \geq 1$, esiste in generale un numero finito di punti appartenenti ciascuno a $t$ spazi distinti $S_{r-\nu_i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ osculatori ad una curva razionale $C_n^0$ d'ordine $n$ con $\varrho$ cuspidi* (n. 1).

*Tale numero è precisamente:*

$$\frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k k!\,(t-k)!\,s_k \vartheta_k$$

*con:*

$$\vartheta_k = \binom{n-r-\varrho+k-1}{k} \binom{r(n-r)-(r-1)\varrho-k}{t-k} \ ,$$

*avendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau$ ed $s_k$ $(k = 0, 1, \ldots, t)$ gli stessi significati che nel teorema del* n. 5.

Nell'ipotesi $t = 2$ si tratta del numero dei punti di $S_r$ donde escono un $S_{r-\nu_1-1}$ ed un $S_{r-\nu_2-1}$, ossia un $S_{\nu_2-1}$ ed un $S_{\nu_1-1}$, osculatori entrambi a $C_n^0$. In altri termini, considerando lo spazio $S_{r-2}$ congiungente i due suddetti:

$\beta$) *Il numero degli $S_{r-2}$ aventi con la curva $C_n^0$ due distinti contatti di rispettivi ordini $\nu_1 - 1$ e $\nu_2 - 1$, quando $\nu_1 + \nu_2 = r$, è*

$$2\varepsilon\nu_1\nu_2 \binom{n-r-\varrho+1}{2} - 2\varepsilon(r-1)\binom{\varrho}{2} + \varepsilon r(n-r-1)\varrho \ ,$$

*ove $\varepsilon = 1$ se $\nu_1 \neq \nu_2$ ed $\varepsilon = \frac{1}{2}$ se $\nu_1 = \nu_2$.*

In particolare $(\nu_1 = r - 1,\ \nu_2 = 1)$:

$\gamma$) *Il numero degli* $S_{r-2}$ *osculatori-secanti della curva* $C_n^0$ *è:*

$$(r-1)(n-r)(n-r-\varrho+1)+(n-2r)\,\varrho\ .$$

Solo nel caso $\varrho = 0$ (se $r > 3$) i risultati speciali $\beta$) e $\gamma$) sono già noti: potendosi essi allora dedurre da una formula assai generale del *Severi* [5]; la quale, d'altra parte, non è atta a stabilire la proposizione seguente (benchè vi si supponga $\varrho = 0$), corollario del teorema $\alpha$):

$\delta$) *In* $S_r$, *quando:*

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_t = r$$

*e* $1 \leq \nu_i < r$, *il numero dei punti caratterizzati dalla proprietà che da ciascuno di essi escono* $t$ *spazi distinti* $S_{r-\nu_i-1}$ $(t \geq 2;\ i = 1, 2, \ldots, t)$ *osculatori ad una curva razionale generica* (n. 1) *d'ordine* $n$, *è espresso da:*

$$\frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\sum_{k=2}^{t}(-1)^k k!\,(t-k)!\,s_k\binom{n-r+k-1}{k}\binom{rn-r^2-k}{t-k},$$

*conservando ai simboli* $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$ *ed* $s_k$ $(k = 2, 3, \ldots, t)$ *il significato loro attribuito nel teorema del* n. 5.

**7.** Specialmente interessante diviene il teorema del n. 5 nell'ipotesi:

$$\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_t = \mu\ ,$$

poichè allora la varietà $V_{r-\sigma}^{\omega}$ ivi considerata consta di punti $t$-upli per la sviluppabile riempita dagli $S_{r-\mu-1}$ osculatori della curva $C_n^0$.

La seconda formula del n. 5 esprimente l'ordine $\omega$ si semplifica osservando che:

$$\sum_{k=i}^{t}\binom{k}{i}s_k = \sum_{k=i}^{t}\binom{k}{i}\binom{t}{k}\mu^k = \binom{t}{i}\sum_{k=i}^{t}\binom{t-i}{k-i}\mu^k = \binom{t}{i}\ \mu^i(\mu+1)^{t-i}\ ;$$

e ne risulta il teorema che segue:

*Nello spazio* $S_r$ *ad* $r$ *dimensioni sia* $W_{r-\mu}$, *con* $1 \leq \mu \leq r-2$, *la* $(r-\mu-1)$*-esima sviluppabile osculatrice (luogo degli* $S_{r-\mu-1}$ *osculatori) di una curva razionale* $C_n^0$ *d'ordine* $n$, *appartenente ad* $S_r$, *dotata di* $\varrho$ *cuspidi* (n. 1) *e quindi di classe:*

$$n' = r(n-r+1)-(r-1)\,\varrho\ .$$

---

[5]) *F. Severi*, I gruppi neutri con elementi multipli di un'involuzione sopra un ente razionale (Rendic. Accad. Lincei, 9 [5] 1900).

*Supposto allora:*

$$t \geq 2\,, \qquad (\mu+1)\,t \leq n'\,, \qquad \mu\,t \leq r\,,$$

*la sviluppabile suddetta* $W_{r-\mu}$ *possiede una varietà t-upla ordinaria* [6]) $V^{\xi}_{r-\mu t}$, *di dimensione* $r-\mu t$, *il cui ordine* $\xi$ *è dato dalla formula* [4]):

$$\xi = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{n-2r+\mu t-\varrho+k-1}{k} \binom{n'-\mu t-k}{t-k} \mu^k$$

*o dall'equivalente:*

$$\xi = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{n+n'-2r-\varrho}{k} \binom{n'-\mu t-k}{t-k} \mu^k (\mu+1)^{t-k}\,.$$

Come corollario notevole $(\mu = 1,\ t = r)$:

*In* $S_r$ *esistono*

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{n-r-\varrho+k-1}{k} \binom{n'-r-k}{r-k}$$

*punti comuni ciascuno ad r spazi* $S_{r-2}$ *osculatori distinti della curva* $C^0_n$.

Più in generale $(r = \mu\,t)$:

*Se* $\mu$ *è un divisore di* $r$, *e* $1 \leq \mu \leq \frac{r}{2}$, *esistono in* $S_r$:

$$\sum_{k=0}^{r:\mu} (-1)^k \binom{n-r-\varrho+k-1}{k} \binom{n'-r-k}{\frac{r}{\mu}-k} \mu^k$$

*punti da ciascuno dei quali escono* $r:\mu$ *spazi distinti* $S_{r-\mu-1}$ *osculatori della curva* $C^0_n$.

Quando $\varrho = 0$ si può dire che:

*In* $S_r$ *se* $\mu t = r$, *o in un generico spazio* $S_{\mu_t}$ *subordinato di* $S_r$ *se* $\mu t < r$, *esistono*

$$\sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{n-2r+\mu t+k-1}{k} \binom{rn-r^2-\mu t+r-k}{t-k} \mu^k$$

*punti in ognuno dei quali concorrono t spazi* $S_{r-\mu-1}$ *osculatori distinti di una data curva razionale generica* (n. 1) *d'ordine n appartenente ad* $S_r$.

(Reçu le 20 mai 1949)

---

[6]) Luogo dei punti di $S_r$ donde escono almeno, e in generale precisamente, $t$ distinti spazi $S_{r-\mu-1}$ osculatori di $C^0_n$.