

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali.
Autor: Longhi, Ambrogio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20699>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali

Di AMBROGIO LONGHI, a Lugano

Scopo di questa Nota è la risoluzione, in tutta la loro generalità, dei problemi seguenti.

Essendo Γ una curva razionale irriducibile, anche dotata di cuspidi ordinarie (oltre che di punti multipli ordinari e iperpiani stazionari ordinari), appartenente allo spazio S_r ad r dimensioni, determinare :

A₁) Le classi di tutti gli involuipi d'iperpiani pluritangenti di una qualsiasi sviluppabile osculatrice di Γ .

A₂) La classe dell'involuppo degli iperpiani tangenti o pluritangenti comuni a due o più sviluppabili osculatrici di Γ .

B₁) Gli ordini di tutte le varietà multiple di una qualsiasi sviluppabile osculatrice di Γ .

B₂) L'ordine della varietà d'intersezione di quante si vogliano sviluppabili osculatrici di Γ o loro varietà multiple.

I problemi A₁) e A₂) rientrano entrambi nell'altro :

A) Determinare la classe della varietà (quando esiste) degli iperpiani di S_r aventi ciascuno con Γ un dato numero di contatti di dati ordini (in punti non dati).

Invece i problemi B₁) e B₂) rientrano nel duale di A) :

B) Determinare l'ordine della varietà (quando esiste) luogo dei punti di S_r appartenenti ciascuno a un dato numero di spazi distinti, di date dimensioni, osculatori a Γ (in punti non dati).

Il problema A) è notoriamente risoluto (ed anzi per una curva di genere $p \geq 0$) dalla formula di *De Jonquières* se però la curva Γ è priva di cuspidi : mentre per una curva Γ cuspidata se ne conosce la completa soluzione unicamente nello spazio ordinario S_3 .

Il problema B) è finora rimasto insoluto, fuori dello spazio S_3 , anche per una curva Γ razionale generale nel suo ordine (quindi senza cuspidi) :

se si eccettua il caso della curva razionale normale, in cui la soluzione, subito ottenibile mediante la formula di *De Jonquières*, fu esplicitamente data dal *Comessatti* ¹⁾.

L'insufficienza di tale formula a offrire la soluzione del problema B) ad esempio nel caso di una curva Γ non normale ed esente da cuspidi, dipende dalla circostanza che allora l'involuppo duale della curva Γ (la quale possiede certo degli iperpiani stazionari) ha la curva di regresso necessariamente cuspidata.

Le soluzioni dei problemi surriferiti vengono qui raggiunte applicando una mia formula, più generale di quella del *De Jonquières* per le curve razionali, stabilita in una Nota antecedente ²⁾.

1. Nel seguito, considerandosi una curva razionale C_n^0 , d'ordine n , dello spazio S_r ad r dimensioni, con ϱ cuspidi, si sottintenderà sempre che essa: appartenga all' S_r ; sia irriducibile; abbia le sue cuspidi in posizione generica e tutte ordinarie, cioè origini ciascuna di un ramo (21...11); non possenga altri elementi stazionari che iperpiani osculatori a rami (11...12) nelle rispettive origini: e infine ammetta eventualmente punti multipli origini ciascuno di due o più rami non singolari (11...11) a tangenti distinte.

Per brevità, quando $\varrho = 0$ la suddetta C_n^0 (senza cuspidi) si dirà una generica curva razionale d'ordine n dello spazio S_r .

2. In S_r tutti gli iperpiani passanti per $r - \sigma$ punti generici segano sulla curva C_n^0 (n. 1) una serie lineare g_n^σ avente un numero finito X di gruppi caratterizzati dalla proprietà di contenere ciascuno t punti, non cuspidi di C_n^0 , rispettivamente multipli secondo $\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \dots, \nu_t + 1$: purchè valga σ la somma dei t numeri ν_i ($i = 1, 2, \dots, t$) e sia inoltre $\sigma + t \leq n$.

La determinazione di X , che la formula di *De Jonquières* permette di eseguire solo se $\varrho = 0$, si può fare in ogni caso con la formula (1) o (12) o (14) della mia Nota citata ²⁾; e si perviene così al teorema:

Una curva razionale C_n^0 , d'ordine n e dotata di ϱ cuspidi (n. 1), appartenga allo spazio S_r ; e sia W la varietà degli $\infty^{r-\sigma}$ iperpiani di S_r aventi ciascuno con C_n^0 , in punti distinti dalle cuspidi, t contatti di rispettivi dati ordini $\nu_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, t$), con:

¹⁾ *A. Comessatti*, La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi (*Math. Ann.* 89, 1923), n. 14.

²⁾ *A. Longhi*, I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate (*Comment. Math. Helv.*, Vol. 24°, fasc. 3°, 1950).

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = \sigma \leq r$$

e:

$$1 \leq t \leq n - \sigma .$$

Se allora i t numeri v_i si ripartiscono in τ gruppi ($\tau \leq t$), cosicchè gli α_j numeri di ogni gruppo ($j = 1, 2, \dots, \tau$) siano tutti eguali fra di loro ma diversi dai rimanenti $t - \alpha_j$, si ha che la classe di W (numero dei suoi iperpiani se $\sigma = r$, e di quelli passanti per $r - \sigma$ punti generici di S_r se $\sigma < r$) vale:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (t-k)! k! s_k \binom{n-\sigma-k}{t-k} \binom{n-\sigma-\varrho}{k},$$

ove $s_0 = 1$ ed s_k ($k = 1, 2, \dots, t$) indica la somma dei prodotti a k a k dei t numeri v_1, v_2, \dots, v_t (onde $s_1 = \sigma$).

La classe suddetta è anche esprimibile sotto la forma:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (-1)^k (t-k)! k! s_k \binom{n-\sigma-k}{t-k} \binom{\varrho + \sigma - n + k - 1}{k},$$

come pure sotto l'altra:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{i=0}^t (-1)^i (t-i)! i! \binom{n-\sigma-i}{t-i} \binom{\varrho}{i} \sum_{k=i}^t \binom{k}{i} s_k .$$

Osservazione. — È da avvertire che, qui e in tutto il seguito, devesi ritenere $\binom{h}{0} = 1$ anche se $h \leq 0$: e $\binom{h}{k} = 0$ solo se $0 \leq h < k$; mentre:

$$\binom{h}{k} = (-1)^k \binom{k-h-1}{k}$$

se $h < 0$.

3. Dal teorema del n. 2, supponendo fra loro eguali tutti i numeri v_i , si deduce in particolare ³⁾ il seguente altro:

In S_r gli iperpiani v -tangenti della μ -esima sviluppabile osculatrice di una curva razionale C_n^0 d'ordine n con ϱ cuspidi (n. 1), ossia gli iperpiani aventi ciascuno con C_n^0 , altrove che nelle cuspidi, v distinti contatti di ordine μ , formano, se $\mu v \leq r$ e:

³⁾ Tenendo anche presente l'ultima formula (nel n. 8) della Nota citata in ²⁾.

$$1 \leq \nu \leq n - \mu \nu ,$$

un involuppo $\infty^{r-\mu\nu}$ di classe:

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{n - \mu \nu - \varrho}{k} \binom{n - \mu \nu - k}{\nu - k} \mu^k ,$$

eguale anche a:

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \mu^i (\mu + 1)^{\nu-i} \binom{n - \mu \nu - i}{\nu - i} \binom{\varrho}{i} .$$

Come corollario:

Il numero degli iperpiani r -tangenti di una curva razionale di ordine $n \geq 2r$, con ϱ cuspidi, appartenente ad S_r , è:

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i 2^{r-i} \binom{n - r - i}{r - i} \binom{\varrho}{i} .$$

4. Sia Γ_n^0 la curva (razionale) polare reciproca della C_n^0 (n. 1) rispetto ad una generica quadrica V_{r-1}^2 di S_r .

L'ordine n' di Γ_n^0 , eguaglia la classe di C_n^0 ; e non possedendo la curva C_n^0 che ϱ cuspidi, senza spazi S_k iperosculatori con $0 < k < r - 1$, si ha quindi che:

$$n' = r(n - r + 1) - (r - 1) \varrho ;$$

mentre le cuspidi di Γ_n^0 , sono i poli, rispetto a V_{r-1}^2 , degli iperpiani stazionari di C_n^0 ; il cui numero è:

$$\varrho' = (r + 1)(n - r) - r \varrho ,$$

ossia

$$\varrho' = n + n' - 2r - \varrho .$$

Nè la curva Γ_n^0 , ha ulteriori elementi stazionari: se non i ϱ iperpiani polari (rispetto a V_{r-1}^2) delle cuspidi di C_n^0 .

Si consideri ora sulla curva C_n^0 un punto *qualunque* P , ed un ramo $(\alpha_1 \dots \alpha_{r-1})$ di origine P : per le ipotesi fatte relativamente a C_n^0 (n. 1) tutti i ranghi di tale ramo sono eguali all'unità, mentre l'ordine α e la classe α_{r-1} valgono al più 2.

Se O è un punto dello spazio $S_{r-\lambda-1}$ (ma non dello $S_{r-\lambda-2}$) osculatore in P al ramo suddetto, ed è $0 \leq \lambda < r - 1$, fra gli n' iperpiani osculatori a C_n^0 passanti per O ve ne sono precisamente $\alpha_{r-1} + \lambda$ coincidenti nell'iperpiano π osculatore al ramo in P .

Nella polarità rispetto a V_{r-1}^2 , al ramo P ($\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$) di C_n^0 corrisponde un ramo P' ($\alpha_{r-1} \dots \alpha$) di Γ_n^0 , designando P' il polo di π : e l'iperpiano ω' polare di O ha in P' , con quest'ultimo ramo, la molteplicità d'intersezione $\alpha_{r-1} + \lambda$.

Ciò premesso, si voglia determinare l'ordine x della varietà luogo dei punti M di S_r appartenenti ciascuno a t spazi $S_{r-\nu_i-1}^{(i)}$ osculatori a C_n^0 in punti distinti M_i ($i = 1, 2, \dots, t$); luogo che esiste, ed è una varietà $V_{r-\sigma}^x$, appena sia:

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_t = \sigma \leq r .$$

È allora x il numero dei punti M situati in un generico spazio S_σ^* . Variando un punto Q su S_σ^* , il gruppo G_n , degli n' iperpiani osculatori a C_n^0 uscenti da Q descrive una serie lineare g_n^σ ; e risulta dotato di t iperpiani $(\nu_i + 1)$ -upli ($i = 1, 2, \dots, t$) non solo quando Q diviene un punto M di $V_{r-\sigma}^x$, ma pure (se $\varrho' > 0$) nei seguenti altri casi, e in essi soltanto:

1) Quando, supposto $t \leq \varrho'$, è Q la traccia su S_σ^* dello spazio $S_{r-\sigma}$ intersezione di t spazi $S_{r-\nu_i}$ ($i = 1, 2, \dots, t$) osculatori ciascuno a C_n^0 in uno dei punti di contatto T_j ($j = 1, 2, \dots, \varrho'$) dei ϱ' iperpiani stazionari di C_n^0 .

2) Quando Q è uno dei punti (in numero finito) comuni ad S_σ^* , alla varietà, di dimensione:

$$r - (\nu'_1 + \nu'_2 + \dots + \nu'_\varepsilon) ,$$

luogo dei punti donde escono ε distinti spazi

$$S_{r-\nu'_1-1}, S_{r-\nu'_2-1}, \dots, S_{r-\nu'_\varepsilon-1}$$

osculatori a C_n^0 , e a $t - \varepsilon$ spazi $S_{r-\nu'_{\varepsilon+1}}, S_{r-\nu'_{\varepsilon+2}}, \dots, S_{r-\nu'_t}$ pure

osculatori a C_n^0 : però in $t - \varepsilon$ dei ϱ' punti T_j ; essendo $\nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_\varepsilon, \nu'_{\varepsilon+1}, \dots, \nu'_t$ una permutazione variabile di $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t$, e $1 \leq \varepsilon < t \leq \varrho' + \varepsilon$.

Consegue da quanto precede che l'ordine cercato x della varietà $V_{r-\sigma}^x$ è uguale al numero dei gruppi della suddetta serie lineare g_n^σ , dotati ciascuno di t iperpiani $(\nu_i + 1)$ -upli ($i = 1, 2, \dots, t$) tutti diversi dai ϱ' iperpiani stazionari di C_n^0 .

Siccome, infine, la polarità rispetto alla quadrica V_{r-1}^2 trasforma la serie lineare g_n^σ , in quella staccata sulla curva Γ_n^0 , dagli iperpiani condotti per uno spazio $S_{r-\sigma-1}^*$, si conclude che l'ordine x di $V_{r-\sigma}^x$ è il numero degli iperpiani di S_r passanti per $r - \sigma$ punti generici e aventi ciascuno t distinti incontri $(v_j + 1)$ -upli ($j = 1, 2, \dots, t$) con la curva Γ_n^0 , in punti diversi dalle sue ρ' cuspidi.

5. La conclusione del n. 4 e il risultato del n. 2 (ove si ponga n' e ρ' in luogo di n e ρ) conducono ora senz'altro al teorema seguente, oggetto principale di questa Nota.

Nello spazio S_r ad r dimensioni il luogo dei punti tali che da ciascuno di essi escono almeno, e in generale precisamente, t spazi distinti S_{r-v_i-1} ($t \geq 1$; $i = 1, 2, \dots, t$) osculatori di una data curva razionale C_n^0 d'ordine n , appartenente ad S_r , con ρ cuspidi (n. 1) e quindi di classe:

$$n' = r(n - r + 1) - (r - 1) \rho,$$

è, se:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = \sigma \leq r,$$

una varietà $V_{r-\sigma}^\omega$ di dimensione $r - \sigma$ e di ordine ⁴⁾:

$$\omega = \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (-1)^k k! (t-k)! s_k \omega_k$$

ove:

$$\omega_k = \binom{n - 2r + \sigma - \rho + k - 1}{k} \binom{n' - \sigma - k}{t - k}.$$

Devesi supporre $1 \leq v_i < r$, $t \leq n' - \sigma$ ed $s_0 = 1$; mentre s_k ($k = 1, 2, \dots, t$) denota la somma dei prodotti a k a k dei t numeri v_1, v_2, \dots, v_t (onde $s_1 = \sigma$): ripartibili in τ gruppi ($\tau \leq t$) rispettivamente di α_1 , di α_2, \dots , e di α_τ numeri, così che quelli di uno stesso gruppo siano tutti eguali fra di loro, ma diversi dai rimanenti.

L'ordine suddetto ω è pure esprimibile mediante la formula:

$$\omega = \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{i=0}^t (-1)^i i! (t-i)! \Omega_i$$

ove:

$$\Omega_i = \binom{n + n' - 2r - \rho}{i} \binom{n' - \sigma - i}{t - i} \sum_{k=i}^t \binom{k}{i} s_k.$$

⁴⁾ Si tenga presente l'Oss. al n. 2.

Osservazione. — Quando $t = 1$, posto $r - \nu_1 - 1 = \nu$, il teorema fornisce l'ordine della ν -esima sviluppabile osculatrice (luogo degli S_ν osculatori) della curva C_n^0 , e quindi ω deve allora eguagliare il ν -esimo rango di C_n^0 : come effettivamente si verifica.

6. Dal teorema del n. 5 discende una moltitudine di risultati particolari: interessanti e nuovi anche nel caso di una curva C_n^0 razionale generica (nel senso precisato al n. 1).

Supponendo ad esempio $\sigma = r$ si ottiene che:

α) Nello spazio S_r ad r dimensioni, quando:

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_t &= r, \\ 2 \leq t &\leq r(n - r) - (r - 1)\varrho \end{aligned}$$

e $\nu_i \geq 1$, esiste in generale un numero finito di punti appartenenti ciascuno a t spazi distinti $S_{r-\nu_i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, t$) osculatori ad una curva razionale C_n^0 d'ordine n con ϱ cuspidi (n. 1).

Tale numero è precisamente:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_t!} \sum_{k=0}^t (-1)^k k! (t-k)! s_k \vartheta_k$$

con:

$$\vartheta_k = \binom{n-r-\varrho+k-1}{k} \binom{r(n-r)-(r-1)\varrho-k}{t-k},$$

avendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ ed s_k ($k = 0, 1, \dots, t$) gli stessi significati che nel teorema del n. 5.

Nell'ipotesi $t = 2$ si tratta del numero dei punti di S_r donde escono un $S_{r-\nu_1-1}$ ed un $S_{r-\nu_2-1}$, ossia un S_{ν_2-1} ed un S_{ν_1-1} , osculatori entrambi a C_n^0 . In altri termini, considerando lo spazio S_{r-2} congiungente i due suddetti:

β) Il numero degli S_{r-2} aventi con la curva C_n^0 due distinti contatti di rispettivi ordini $\nu_1 - 1$ e $\nu_2 - 1$, quando $\nu_1 + \nu_2 = r$, è

$$2\varepsilon\nu_1\nu_2 \binom{n-r-\varrho+1}{2} - 2\varepsilon(r-1) \binom{\varrho}{2} + \varepsilon r(n-r-1)\varrho,$$

ove $\varepsilon = 1$ se $\nu_1 \neq \nu_2$ ed $\varepsilon = \frac{1}{2}$ se $\nu_1 = \nu_2$.

In particolare ($v_1 = r - 1, v_2 = 1$):

$\gamma)$ Il numero degli S_{r-2} osculatori-secanti della curva C_n^0 è:

$$(r - 1)(n - r)(n - r - \varrho + 1) + (n - 2r) \varrho .$$

Solo nel caso $\varrho = 0$ (se $r > 3$) i risultati speciali $\beta)$ e $\gamma)$ sono già noti: potendosi essi allora dedurre da una formula assai generale del Severi⁵⁾; la quale, d'altra parte, non è atta a stabilire la proposizione seguente (benchè vi si supponga $\varrho = 0$), corollario del teorema $\alpha)$:

$\delta)$ In S_r , quando:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = r$$

e $1 \leq v_i < r$, il numero dei punti caratterizzati dalla proprietà che da ciascuno di essi escono t spazi distinti S_{r-v_i-1} ($t \geq 2; i = 1, 2, \dots, t$) osculatori ad una curva razionale generica (n. 1) d'ordine n , è espresso da:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_t!} \sum_{k=2}^t (-1)^k k! (t-k)! s_k \binom{n-r+k-1}{k} \binom{rn-r^2-k}{t-k},$$

conservando ai simboli α_i ($i = 1, 2, \dots, t$) ed s_k ($k = 2, 3, \dots, t$) il significato loro attribuito nel teorema del n. 5.

7. Specialmente interessante diviene il teorema del n. 5 nell'ipotesi:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_t = \mu ,$$

poichè allora la varietà $V_{r-\sigma}^\omega$ ivi considerata consta di punti t -upli per la sviluppabile riempita dagli $S_{r-\mu-1}$ osculatori della curva C_n^0 .

La seconda formula del n. 5 esprimente l'ordine ω si semplifica osservando che:

$$\sum_{k=i}^t \binom{k}{i} s_k = \sum_{k=i}^t \binom{k}{i} \binom{t}{k} \mu^k = \binom{t}{i} \sum_{k=i}^t \binom{t-i}{k-i} \mu^k = \binom{t}{i} \mu^i (\mu + 1)^{t-i};$$

e ne risulta il teorema che segue:

Nello spazio S_r ad r dimensioni sia $W_{r-\mu}$, con $1 \leq \mu \leq r - 2$, la $(r - \mu - 1)$ -esima sviluppabile osculatrice (luogo degli $S_{r-\mu-1}$ osculatori) di una curva razionale C_n^0 d'ordine n , appartenente ad S_r , dotata di ϱ cuspidi (n. 1) e quindi di classe:

$$n' = r(n - r + 1) - (r - 1) \varrho .$$

⁵⁾ F. Severi, I gruppi neutri con elementi multipli di un'involuzione sopra un ente razionale (Rendic. Accad. Lincei, 9 [5] 1900).

Supposto allora :

$$t \geq 2, \quad (\mu + 1)t \leq n', \quad \mu t \leq r,$$

la sviluppabile suddetta $W_{r-\mu}$ possiede una varietà t -upla ordinaria ⁶⁾ $V_{r-\mu t}^\xi$, di dimensione $r - \mu t$, il cui ordine ξ è dato dalla formula ⁴⁾:

$$\xi = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n - 2r + \mu t - \varrho + k - 1}{k} \binom{n' - \mu t - k}{t - k} \mu^k$$

o dall'equivalente :

$$\xi = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n + n' - 2r - \varrho}{k} \binom{n' - \mu t - k}{t - k} \mu^k (\mu + 1)^{t-k}.$$

Come corollario notevole ($\mu = 1, t = r$) :

In S_r esistono

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n - r - \varrho + k - 1}{k} \binom{n' - r - k}{r - k}$$

punti comuni ciascuno ad r spazi S_{r-2} osculatori distinti della curva C_n^0 .

Più in generale ($r = \mu t$) :

Se μ è un divisore di r , e $1 \leq \mu \leq \frac{r}{2}$, esistono in S_r :

$$\sum_{k=0}^{r:\mu} (-1)^k \binom{n - r - \varrho + k - 1}{k} \binom{n' - r - k}{\frac{r}{\mu} - k} \mu^k$$

punti da ciascuno dei quali escono $r:\mu$ spazi distinti $S_{r-\mu-1}$ osculatori della curva C_n^0 .

Quando $\varrho = 0$ si può dire che:

In S_r se $\mu t = r$, o in un generico spazio $S_{\mu t}$ subordinato di S_r se $\mu t < r$, esistono

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n - 2r + \mu t + k - 1}{k} \binom{rn - r^2 - \mu t + r - k}{t - k} \mu^k$$

punti in ognuno dei quali concorrono t spazi $S_{r-\mu-1}$ osculatori distinti di una data curva razionale generica (n. 1) d'ordine n appartenente ad S_r .

(Reçu le 20 mai 1949)

⁶⁾ Luogo dei punti di S_r donde escono almeno, e in generale precisamente, t distinti spazi $S_{r-\mu-1}$ osculatori di C_n^0 .