Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1951)

Artikel: Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen.
Autor: Finsler, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20697

Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen

Von Paul Finsler, Zürich

Herrn Rudolf Fueter zum 70. Geburtstag gewidmet.

1. Einleitung

Es ist bekannt, daß man im Bereich der natürlichen Zahlen die Addition auf ein wiederholtes Fortschreiten um eins, d. h. auf die Grundoperation des Zählens zurückführen kann, ebenso die Multiplikation auf eine wiederholte Addition und das Potenzieren auf eine wiederholte Multiplikation. Höhere Operationen, die man durch wiederholtes Potenzieren usw. erhalten würde, werden gewöhnlich nicht eingeführt[1]), da die anderen für die meisten Zwecke schon ausreichen. Die höheren Operationen sind hier auch insofern entbehrlich, als sie wenigstens prinzipiell durch die niederen ersetzt werden können.

Im Bereich der transfiniten Zahlen, speziell in der Cantorschen zweiten Zahlklasse, lassen sich aber die durch höhere Operationen gewonnenen Zahlen im allgemeinen nicht in endlicher Form mit Hilfe von niederen Operationen darstellen. Ist ω die erste Zahl dieser Zahlklasse, also die erste auf die endlichen Zahlen folgende Ordnungszahl, so ist für die endliche Darstellung von $\omega + \omega$ die Addition, für $\omega \cdot \omega$ die Multiplikation und für ω^ω das Potenzieren notwendig. Für größere Zahlen braucht man noch höhere Operationen. Es fragt sich, wie diese zweckmäßig einzuführen sind und ob sich damit alle Zahlen der zweiten Zahlklasse darstellen lassen.

Schon bei der auf das Potenzieren nächstfolgenden Operation stößt man auf eine Schwierigkeit; es fragt sich, ob man im Exponenten oder in der Basis iterieren soll. Im ersten Fall erhält man aus ω^ω die Folge $(\omega^\omega)^\omega = \omega^{\omega^2}$, $(\omega^{\omega^2})^\omega = \omega^{\omega^3}$ usw., allgemein $\omega^{\omega\alpha}$, also lauter Zahlen,

[1]) Operationen höherer Stufe sind in der Encyklopädie der Math. Wissenschaften IA1 S. 26 erwähnt. *A. Haag*, Arch. d. Math. 1 (1949) S. 220 definiert solche mit Logarithmen.

die sich schon durch das Potenzieren ausdrücken lassen. Man ist deshalb geneigt, den andern Fall zu nehmen, der aus ω^ω die Folge

$$\omega^{(\omega^\omega)} = \omega^{\omega^\omega}, \ \omega^{(\omega^{\omega^\omega})} \text{ usw.}$$

und nach ω-facher Iteration als Limes die Zahl $\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ liefert, die sich nicht mehr in endlicher Form durch die früheren Operationen ausdrücken läßt. Die weitere Iteration liefert dann aber $\omega^\varepsilon = \varepsilon$, $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ usw., d. h. man kommt nicht mehr vom Fleck. Die Schwierigkeit löst sich erst, wenn man doch den ersten Fall als eine neue Operation annimmt, die sich nur „zufälligerweise", infolge der Potenzregeln, noch durch die alten ausdrücken läßt. Aus dieser vierten Operation ergibt sich dann eine fünfte, welche, allerdings in anderer Weise als vorher, auch die Zahl ε darstellt. Die Folge dieser Operationen läßt sich ins Transfinite fortsetzen, und es wird sich zeigen, daß sich damit für jede Zahl der ersten und zweiten Zahlklasse eine eindeutige Darstellung ergibt.

Mit abzählbar vielen arithmetischen Operationen in endlicher Anwendung erhält man allerdings, von ω ausgehend, nur abzählbar viele Zahlen, also nicht die ganze zweite Zahlklasse. Es sind also mehr als abzählbar viele Operationen notwendig, und zu ihrer Bezeichnung braucht man mehr als abzählbar viele Zeichen, etwa eben die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse. Dies hat zur Folge, daß schließlich doch nicht alle Zahlen größer als ω vollständig durch kleinere Zahlen bezeichnet werden. Die erste dieser „kritischen Zahlen", für welche dies nicht mehr gilt, ist aber schon sehr groß.

Für die Limeszahlen der zweiten Zahlklasse ergibt sich dann, sofern sie kleiner als diese kritischen Zahlen sind, eine eindeutige Darstellung in der Form $\lim \alpha_n$. Auch für viele kritische Zahlen läßt sich nach einer von O. Veblen angegebenen Methode[2]) eine solche Darstellung finden und damit die Reihe fortsetzen. Wenn dies für die ganze zweite Zahlklasse gelingen würde, so wäre damit ein wichtiges, aber auch sehr schwieriges[3]) Problem gelöst. Es wäre dann möglich, von einer eindeutigen

---

[2]) *O. Veblen:* Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908) S. 280. Eine Bearbeitung und Weiterführung dieser Methode findet sich in der Arbeit von *H. Bachmann:* Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 95 (1950) S. 115.

[3]) „un des plus difficils" nach *W. Sierpinski:* Remarque sur les ensembles des nombres ordinaux de classes I et II, Revista de Ciencias 41 (1939) S. 289.

Teilmenge des Kontinuums zu zeigen, daß sie die erste überabzählbare Mächtigkeit besitzt, und man hätte damit auch eine überabzählbare wohlgeordnete Teilmenge des Kontinuums.

Es soll zunächst dieser letzte Punkt noch näher betrachtet werden.

2. Wohlgeordnete Teilmengen des Kontinuums

Als Elemente des Kontinuums kann man an Stelle der Punkte eines Intervalls die zahlentheoretischen Funktionen $f(n)$ nehmen, bei denen n die endlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft und die Funktionswerte $f(n)$ ebenfalls solche Zahlen sind.

Das Kontinuum eindeutig wohlzuordnen ist bisher nicht gelungen; man kennt nur endliche oder abzählbar unendliche wohlgeordnete Teilmengen desselben. Eine überabzählbare Wohlordnung im Kontinuum würde bedeuten, daß allen Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse umkehrbar eindeutig Elemente des Kontinuums zugeordnet wären.

Die Zahlen der ersten Zahlklasse erhält man von 0 ausgehend durch die Grundoperation des Fortschreitens um eins; für die Zahlen der zweiten Zahlklasse ist noch eine zweite Operation nötig, die Bildung von $\lim \alpha_n$ aus einer aufsteigenden Folge von Ordnungszahlen $\alpha_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Die Zahl $\lim \alpha_n$ ist als erste auf alle Zahlen α_n folgende Ordnungszahl eindeutig bestimmt; umgekehrt gehören aber zu einer solchen Limeszahl viele Folgen α_n, denn es ist z. B. $\omega = \lim n = \lim 2n = \lim 2^n$ usw. Diese Vieldeutigkeit erschwert die eineindeutige Abbildung auf Elemente des Kontinuums.

Jeder Zahl α der zweiten Zahlklasse gehen abzählbar unendlich viele Ordnungszahlen voraus, d. h. die Zahlen $\xi < \alpha$ lassen sich in eine einfache Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ bringen. Diese Abzählungen sind ebenfalls nicht eindeutig bestimmt.

Es entstehen so die beiden Probleme:

Erstes Problem: Jeder Limeszahl α der zweiten Zahlklasse soll eindeutig eine aufsteigende Folge von Ordnungszahlen, eine „Hauptfolge“ $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ zugeordnet werden, derart, daß $\lim \alpha_n = \alpha$ wird.

Zweites Problem: Jeder Zahl α der zweiten Zahlklasse soll eine eindeutige Abzählung aller Zahlen $\xi < \alpha$ zugeordnet werden.

Es soll nun mit bekannten Methoden[4]) gezeigt werden, daß jede Lösung des einen oder des andern Problems zu einer überabzählbaren Wohl-

[4]) Vgl. z. B. Enzyklopädie der Math. Wissenschaften, 2. Aufl. I 1,5 S. 45/46.

ordnung im Kontinuum führt, und weiter, daß die beiden Probleme äquivalent sind, daß also eine Lösung des einen Problems zu einer solchen des andern führt und umgekehrt.

Ist zunächst das erste Problem gelöst, so ordne man der Zahl 0 die Funktion $f_0(n) = 0$ zu, ferner der Zahl $\beta + 1$ die Funktion $f_{\beta+1}(n) = f_\beta(n) + 1$ und der Zahl $\alpha = \lim \alpha_n$ die Funktion $f_\alpha(n) = \operatorname{Max} f_{\alpha_m}(n)$ für $m \leqq n$, wobei α_n die zu α gehörende Hauptfolge durchlaufen soll. Durch diese Vorschrift sind nach dem Prinzip der transfiniten Induktion allen Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse zahlentheoretische Funktionen zugeordnet, und zwar lauter verschiedene, denn für $\alpha > \beta$ wird bei hinreichend großem n $f_\alpha(n) > f_\beta(n)$. Dies gilt nämlich für $\alpha = \beta + 1$, es gilt für $\alpha + 1$, wenn es für α gilt, und für $\alpha = \lim \alpha_n$, wenn es von einer Stelle ab für alle α_n gilt; es gilt also für alle $\alpha > \beta$.

Ist das zweite Problem gelöst, so kann man die Zuordnung in folgender Weise vornehmen: Den endlichen Zahlen $m = 0, 1, 2, \ldots$ sollen die Funktionen $f_m(n) = m$ entsprechen. Ist α eine Zahl der zweiten Zahlklasse und sind den Zahlen $\xi < \alpha$ die Funktionen $f_\xi(n)$ zugeordnet, so soll, wenn $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ die eindeutige Abzählung dieser Zahlen ist, der Zahl α die Funktion $f_\alpha(n) = f_{\xi_n}(n) + 1$ entsprechen. Damit sind durch transfinite Induktion auch allen Zahlen der zweiten Zahlklasse Funktionen zugeordnet, und zwar lauter verschiedene, denn wenn $f_\alpha(n)$ mit einem früheren $f_{\xi_m}(n)$ identisch wäre, so hätte man den Widerspruch $f_\alpha(m) = f_{\xi_m}(m) = f_{\xi_m}(m) + 1$.

Aus einer Lösung des ersten Problems ergibt sich eine solche des zweiten durch folgende Vorschrift: Der Zahl ω werde die natürliche Anordnung $0, 1, 2, \ldots$ der endlichen Zahlen zugeordnet. Ist $\alpha = \beta + 1$ und $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots$ die der Zahl β zugeordnete Abzählung der Zahlen $\eta < \beta$, so soll der Zahl α die Anordnung $\beta, \eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots$ der Zahlen kleiner als α entsprechen. Ist $\alpha = \lim \alpha_n > \omega$, wobei α_n die zu α gehörende Folge durchläuft, und sind den Zahlen $\alpha_n \geqq \omega$ die Anordnungen $\xi_{n0}, \xi_{n1}, \xi_{n2} \ldots$ zugeordnet, so bringe man die Zahlen ξ_{nm} in eine einfache Folge, indem man ξ_{nm} vor $\xi_{n'm'}$ setzt, wenn $n + m < n' + m'$ oder $n + m = n' + m'$ und $n < n'$ ist, und streiche in dieser Folge jede Zahl, die schon an einer früheren Stelle aufgetreten ist. Dadurch erhält man die zu α gehörende Abzählung der Zahlen kleiner als α und durch transfinite Induktion die gesuchte Lösung.

Ist umgekehrt das zweite Problem gelöst, so ist insbesondere jeder Limeszahl α der zweiten Zahlklasse eine eindeutige Abzählung $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ aller Zahlen $\xi < \alpha$ zugeordnet. Streicht man darin alle Zahlen ξ_m, denen eine größere Zahl ξ_n vorangeht, so bleibt eine aufsteigende Folge

$\xi_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ mit $\lim \alpha_n = \alpha$; diese soll der Zahl α zugeordnet sein.

Wie schon bemerkt, kann man mit Hilfe der nun weiter zu betrachtenden arithmetischen Operationen das erste Problem (und damit auch das zweite) nicht vollständig, aber doch für einen großen Abschnitt der zweiten Zahlklasse lösen.

3. Die arithmetischen Operationen

Es sollen jetzt für die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse die Operationen höherer Stufe erklärt werden, welche die Addition, die Multiplikation und das Potenzieren verallgemeinern. Man wird von diesen Operationen verlangen, daß sie zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Zahlen ξ und η eine Zahl $\varphi(\xi, \eta)$ zuordnen, man kann sie also als Funktionen von zwei Variabeln darstellen. Die zu definierenden Operationen seien dementsprechend durch die Funktionen $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ dargestellt, wobei α die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse durchläuft. Speziell soll $\varphi_0(\xi, \eta) = \varphi_0(0, \eta) = \eta + 1$ die Grundoperation des Fortschreitens um eins bedeuten, die also eine Funktion einer Variabeln ergibt. Es folgen die Funktionen[5] $\varphi_1(\xi, \eta) = \eta + \xi$, $\varphi_2(\xi, \eta) = \eta \cdot \xi$, $\varphi_3(\xi, \eta) = \eta^\xi$ usf. Für die Arithmetik der endlichen Zahlen kommen nur die Funktionen $\varphi_n(\xi, \eta)$ mit endlichem n in Betracht.

Um die Funktionen $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ für beliebige α zu definieren, braucht man die Operationen des Iterierens und der Limesbildung.

Der Ausdruck $\lim \alpha_n$ ist für aufsteigende Folgen α_n schon erklärt. Ist nun $\psi(\alpha_n)$ eine für aufsteigende Folgen α_n definierte und von einer Stelle ab nicht abnehmende Funktion, so soll $\lim \psi(\alpha_n)$ die kleinste Zahl bedeuten, die von dieser Stelle ab von keiner der Zahlen $\psi(\alpha_n)$ übertroffen wird.

Ist $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \alpha$ und $\psi(\xi)$ eine für $\xi < \alpha$ von einer Stelle $\gamma < \alpha$ ab nicht abnehmende Funktion von ξ, so ist $\lim \psi(\alpha_n) = \lim \psi(\beta_n)$. Es gibt nämlich zu jeder Zahl α_n eine größere Zahl β_m, daher ist

$$\lim \psi(\alpha_n) \leqq \lim \psi(\beta_n) ;$$

ebenso folgt die umgekehrte Beziehung, also die Behauptung.

---

[5]) Für das Produkt verwende ich hier die in der Mengenlehre für die Ordnungszahlen zur Zeit übliche Reihenfolge der Faktoren, nach der z. B. $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ gesetzt wird. Ich setze aber der Deutlichkeit halber einen Punkt zwischen die Faktoren, denn man schreibt z. B. für zwei Meter 2 m und nicht m 2, und für 100 + 100 sagt man zweihundert und nicht hundertzwei.

Die ν-fache Iteration der Funktion $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ sei nun durch die Forderungen erklärt:

$$\varphi_\alpha^0(\xi, \eta) = \eta ,$$
$$\varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) ,$$
$$\varphi_\alpha^{\lim \nu_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta)$$

für aufsteigende Folgen ν_n. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$ von einem endlichen Wert von ν ab als nicht abnehmende Funktion von ν ergibt.

Die Funktionen $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ können jetzt durch die folgenden Festsetzungen definiert werden:

Es sei
$$\begin{aligned}
\varphi_0(\xi, \eta) &= \varphi_0(0, \eta) = \eta + 1 \ ; \\
\varphi_1(\xi, \eta) &= \varphi_0^\xi(0, \eta) = \eta + \xi . \\
\varphi_2(\xi, \eta) &= \varphi_1^\xi(\eta, 0) = \eta \cdot \xi \ ; \\
\varphi_3(\xi, \eta) &= \varphi_2^\xi(\eta, 1) = \eta^\xi \ ; \\
\varphi_4(\xi, \eta) &= \varphi_3^\xi(\eta, \eta) = \eta^{\eta^\xi} \ ; \\
\varphi_5(\xi, \eta) &= \varphi_4^\xi(\eta, \eta) \quad \text{usw.} \ ;
\end{aligned}$$
allgemein
$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) &= \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) \qquad \text{für } \alpha \geqq 3 \ ; \\
\varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta) &= \lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) \quad \text{für aufsteigende Folgen } \alpha_n \ .
\end{aligned}$$

Durch transfinite Induktion bestimmt sich hieraus $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ für beliebige Zahlen α, ξ, η der ersten und zweiten Zahlklasse, denn wie später gezeigt wird, ergibt sich $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$ von endlichen Werten von α bzw. ν ab als nicht abnehmende Funktion von α und von ν.

Daß φ_1, φ_2 und φ_3 die bekannten Operationen ergeben, ist direkt zu sehen[6]). Für $n \geqq 3$ wird $\varphi_{n+1}(\xi, \eta) = \varphi_n^\xi(\eta, \eta)$; es folgt

$$\varphi_\omega(\xi, \eta) = \lim \varphi_n(\xi, \eta) \quad \text{usf.}$$

Als Verallgemeinerung der Rekursionsformeln

$$\eta + (\xi + 1) = (\eta + \xi) + 1 ,$$
$$\eta \cdot (\xi + 1) = \eta \cdot \xi + \eta ,$$
$$\eta^{\xi+1} = \eta^\xi \cdot \eta$$

[6]) Im Unterschied zur üblichen Arithmetik ist hier der Ausdruck 0^0 wegen $0^0 = \varphi_3(0, 0) = \varphi_2^0(0, 1) = 1$ sofort eindeutig bestimmt. Daß es zweckmäßig ist, $0^0 = 1$ zu setzen, ergibt sich auch daraus, daß 0^n ein Produkt von n Faktoren darstellt, das nur dann verschwindet, wenn wenigstens ein Faktor Null ist, also nur dann, wenn n größer als Null ist.
Schreibt man $a_n b$ für $\varphi_n(a, b)$, so ist $9_9 9$ beträchtlich größer als $9^{9^9} = 9_4 9$.

(Der Schluß dieses Artikels folgt im nächsten Heft)

ergibt sich

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi+1,\eta) = \varphi_\alpha(\eta,\varphi_{\alpha+1}(\xi,\eta))$$

und

$$\varphi_{\alpha+1}(\lim \xi_n,\eta) = \lim \varphi_{\alpha+1}(\xi_n,\eta)\,,$$

denn für $\alpha \geqq 3$ ist

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi+1,\eta) = \varphi_\alpha^{\xi+1}(\eta,\eta) = \varphi_\alpha(\eta,\varphi_\alpha^{\xi}(\eta,\eta)) = \varphi_\alpha(\eta,\varphi_{\alpha+1}(\xi,\eta))$$

und

$$\varphi_{\alpha+1}(\lim \xi_n,\eta) = \varphi_\alpha^{\lim \xi_n}(\eta,\eta) = \lim \varphi_\alpha^{\xi_n}(\eta,\eta) = \lim \varphi_{\alpha+1}(\xi_n,\eta)\,.$$

Auch hier wird die Existenz des Limes noch bestätigt werden; es wird sich nämlich zeigen, daß $\varphi_\alpha^\nu(\xi,\eta)$ für $\alpha \geqq 5$, also von einer festen endlichen Stelle ab in bezug auf alle Variabeln nicht abnehmend ist. Daraus folgt weiter noch die Formel

$$\varphi_\alpha(\lim \xi_n,\eta) = \lim \varphi_\alpha(\xi_n,\eta)$$

auch für den Fall, daß α eine Limeszahl ist. Es ist nämlich mit

$$\alpha = \lim \alpha_m = \lim(\alpha_m+1):$$

$$\varphi_\alpha(\lim \xi_n,\eta) = \lim \varphi_{\alpha_m+1}(\lim \xi_n,\eta) = \lim_{(m)} \lim_{(n)} \varphi_{\alpha_m+1}(\xi_n,\eta) =$$

$$= \lim_{(n)} \lim_{(m)} \varphi_{\alpha_m+1}(\xi_n,\eta) = \lim \varphi_\alpha(\xi_n,\eta)\,,$$

wobei die Vertauschung der Limesbildungen aus dem eben angegebenen Grunde erlaubt ist.

Für $\alpha < 3$ erhält man die bekannten Rekursionen; $\alpha = 3$ ergibt

$$\eta^{\eta^{\xi+1}} = \left(\eta^{\eta^\xi}\right)^\eta \quad \text{und} \quad \eta^{\eta^{\lim \xi_n}} = \lim \eta^{\eta^{\xi_n}}\,.$$

4. Monotoniesätze

In diesem Abschnitt wird stets $\alpha > 0$ vorausgesetzt. Es gelten dann die Sätze:

Satz 1. *Für* $\xi > 1$, $\eta > 1$ *ist* $\varphi_\alpha(\xi,\eta) > \eta$.

Satz 2. *Für* $\xi > 1$, $\eta > 1$ *und* $N > \nu$ *ist* $\varphi_\alpha^N(\xi,\eta) > \varphi_\alpha^\nu(\xi,\eta)$.

Satz 1 folgt aus Satz 2 für $\nu = 0$, $N = 1$. Es ist aber besser, die beiden Sätze getrennt zu betrachten und gemeinsam zu beweisen.

Für $\alpha = 1, 2, 3$ sind die Sätze bekannt, denn sie besagen hier, daß für $\xi > 1$, $\eta > 1$ stets $\eta + \xi > \eta$, $\eta \cdot \xi > \eta$ und $\eta^\xi > \eta$, und für

$\xi > 1$, $\eta > 1$, $N > \nu$ stets $\eta + \xi \cdot N > \eta + \xi \cdot \nu$, $\eta \cdot \xi^N > \eta \cdot \xi^\nu$ und $\eta^{\xi^N} > \eta^{\xi^\nu}$ ist.

Es sei jetzt $\alpha \geqq 3$, $\xi > 1$, $\eta > 1$. Wenn für einen bestimmten Wert von α Satz 1 erfüllt, also $\varphi_\alpha(\xi, \eta) > \eta$ ist, so gilt für diesen Wert von α auch Satz 2, denn es folgt $\varphi_\alpha^1(\xi, \eta) > \varphi_\alpha^0(\xi, \eta)$, und wenn

$$\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha^0(\xi, \eta) = \eta > 1$$

ist, so ist nach Satz 1 (wobei $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$ an Stelle von η einzusetzen ist) auch

$$\varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) > \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$$

und

$$\varphi_\alpha^{\lim \nu_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta) > \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta)$$

für aufsteigende Folgen ν_n, denn diese Formeln zeigen zugleich, daß $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$ mit ν monoton zunimmt, daß also der Limes existiert.

Weiter ergibt sich nun

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) > \varphi_\alpha(\eta, \eta) > \eta$$

und

$$\varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) \geqq \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) > \eta \;,$$

sofern Satz 1 für α bzw. für alle α_n erfüllt ist und $\lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$ existiert. Damit ist aber Satz 1 und wie eben gezeigt auch Satz 2 für alle Werte von α bewiesen, für welche $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ definiert ist.

Satz 3. *Für $\Xi > \xi$ und $\eta > 1$ gilt $\varphi_\alpha(\Xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta)$ und, wenn α keine Limeszahl ist, $\varphi_\alpha(\Xi, \eta) > \varphi_\alpha(\xi, \eta)$.*

Für $\alpha = 1, 2, 3$ ist dies bekannt, denn es bedeutet $\eta + \Xi > \eta + \xi$, $\eta \cdot \Xi > \eta \cdot \xi$, $\eta^\Xi > \eta^\xi$ für $\Xi > \xi$ und $\eta > 1$.

Ist $\alpha \geqq 3$, so ist für $\Xi > \xi$ und $\eta > 1$ wegen Satz 2

$$\varphi_{\alpha+1}(\Xi, \eta) = \varphi_\alpha^\Xi(\eta, \eta) > \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) = \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) \;,$$

und wenn für alle α_n $\varphi_{\alpha_n}(\Xi, \eta) \geqq \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$ ist, so ist auch

$$\varphi_{\lim \alpha_n}(\Xi, \eta) \geqq \varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta) \;,$$

sofern diese Werte definiert sind. Satz 3 gilt also für alle in Betracht kommenden Zahlen.

Satz 4. *Für $A > \alpha$ und $\eta \geqq \xi > 1$ ist $\varphi_A(\xi, \eta) > \varphi_\alpha(\xi, \eta)$, wenn nicht zugleich $A \leqq 3$ und $\xi = \eta = 2$ ist.*

Es ist zwar $2^2 = 2 \cdot 2 = 2 + 2$, sonst aber für $\eta \geqq \xi > 1$ stets $\eta^\xi > \eta \cdot \xi > \eta + \xi$.

Für $\alpha \geqq 3$ und $\eta \geqq \xi > 1$ ist nach Satz 2 und Satz 3

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) > \varphi_\alpha(\eta, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta)$$

und folglich

$$\varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) > \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) .$$

Satz 4 gilt also allgemein, und es ergibt sich zugleich, daß die für $\eta \geqq \xi > 1$ und $\alpha > 3$ als Funktion von α monoton wachsende Funktion $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ für alle Werte von α definiert ist.

Satz 5 und Satz 6 werden wieder gemeinsam bewiesen:

Satz 5. *Für* $\xi \geqq 1$ *und* $H > \eta \geqq 1$ *ist* $\varphi_\alpha^\nu(\xi, H) \geqq \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$.

Satz 6. *Für* $\Xi > \xi \geqq 1$ *und* $\eta > 1$ *ist* $\varphi_\alpha^\nu(\Xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$, *und speziell* $\varphi_\alpha^\nu(\Xi, \eta) > \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$, *wenn* α *und* ν *keine Limeszahlen sind und auch* ν *nicht Null ist.*

Für $\alpha = 1, 2, 3$ sind die Sätze erfüllt, wie man direkt einsehen kann; es werde $\alpha \geqq 3$ vorausgesetzt.

Es sei für einen bestimmten Wert von α Satz 5 erfüllt, dann gilt für diesen Wert auch Satz 6. Wenn nämlich Satz 6 für den Exponenten ν als gültig betrachtet wird, so ergibt sich für $\Xi > \xi \geqq 1$ und $\eta > 1$ wegen $\varphi_\alpha^\nu(\Xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha^0(\Xi, \eta) = \eta > 1$ nach Satz 3 und Satz 5

$$\varphi_\alpha^{\nu+1}(\Xi, \eta) = \varphi_\alpha(\Xi, \varphi_\alpha^\nu(\Xi, \eta)) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\Xi, \eta)) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) = \\ = \varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta) ,$$

und speziell $\varphi_\alpha^{\nu+1}(\Xi, \eta) > \varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta)$, wenn α keine Limeszahl ist. Wenn ferner für alle ν_n $\varphi_\alpha^{\nu_n}(\Xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta)$ ist, so ist auch

$$\varphi_\alpha^{\lim \nu_n}(\Xi, \eta) = \lim \varphi_\alpha^{\nu_n}(\Xi, \eta) \geqq \lim \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha^{\lim \nu_n}(\xi, \eta) .$$

Da nun Satz 6 für $\nu = 0$ erfüllt ist, so gilt er für den angenommenen Wert von α allgemein.

Wenn Satz 5 für α gilt, so gilt er auch für $\alpha + 1$. Nach dem eben Bewiesenen folgt nämlich

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi, H) = \varphi_\alpha^\xi(H, H) \geqq \varphi_\alpha^\xi(\eta, H) \geqq \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) = \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) ,$$

und wenn $\varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, H) \geqq \varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, \eta)$ für einen Wert $\nu \geqq 1$ erfüllt ist, so ergibt sich

$$\varphi^{\nu+1}_{\alpha+1}(\xi, H) = \varphi_{\alpha+1}(\xi, \varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, H)) \geqq \varphi_{\alpha+1}(\xi, \varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, \eta)) = \varphi^{\nu+1}_{\alpha+1}(\xi, \eta) ,$$

und wenn für alle ν_n $\varphi^{\nu_n}_{\alpha+1}(\xi, H) \geqq \varphi^{\nu_n}_{\alpha+1}(\xi, \eta)$ gilt, so folgt

$$\varphi^{\lim \nu_n}_{\alpha+1}(\xi, H) \geqq \varphi^{\lim \nu_n}_{\alpha+1}(\xi, \eta) ,$$

es gilt also

$\varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, H) \geqq \varphi^{\nu}_{\alpha+1}(\xi, \eta)$ für alle ν (für $\nu = 0$ ist es selbstverständlich).

Schließlich folgt $\varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, H) \geqq \varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta)$, wenn $\varphi_{\alpha_n}(\xi, H) \geqq \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$ für alle α_n gilt, und hieraus folgt wie oben, wenn nur $\lim \alpha_n$ an Stelle von $\alpha + 1$ gesetzt wird, daß auch $\varphi^{\nu}_{\lim \alpha_n}(\xi, H) \geqq \varphi^{\nu}_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta)$ gilt. Damit ist aber Satz 5 und also auch Satz 6 allgemein bewiesen.

Satz 4 wurde unter der Voraussetzung $\eta \geqq \xi > 1$ hergeleitet; es soll jetzt noch der Fall $\xi \geqq \eta > 1$ betrachtet werden. Da der Satz für $\xi = \eta > 1$ bewiesen ist, kann die Induktion nach ξ angewendet werden; da aber z. B. $2^{\omega} = 2 \cdot \omega = 2 + \omega$ ist, kann nicht mehr durchweg das Größerzeichen gelten.

Man findet zunächst:

$$\eta \cdot n \geqq \eta + \eta \cdot (n-2) + 2 > \eta + 1 \cdot (n-2) + 2 = \eta + n$$
$$\text{für} \quad \eta > 1 \quad \text{und} \quad 2 < n < \omega ,$$

$$\eta \cdot \xi = \eta \cdot (1 + \xi) = \eta + \eta \cdot \xi \geqq \eta + \xi \quad \text{für} \quad \eta > 1 \quad \text{und} \quad \xi \geqq \omega ,$$

und

$$\eta \cdot (\xi + 1) = \eta \cdot \xi + \eta \geqq \eta + \xi + \eta > \eta + (\xi + 1) \text{ für } \eta > 1 \text{ und } \xi > 1 .$$

Es sei weiter $\alpha \geqq 1$; nach Abschnitt 3 gilt die Rekursionsformel

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi + 1, \eta) = \varphi_{\alpha}(\eta, \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta)) .$$

Macht man die Induktionsvoraussetzung $\varphi_{\alpha+2}(\xi, \eta) \geqq \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta)$, so ergibt sich, wenn der Reihe nach die Rekursionsformel, dann die Induktionsvoraussetzung und Satz 5, dann Satz 1 und Satz 4 und schließlich wieder die Rekursionsformel angewendet wird:

$$\varphi_{\alpha+2}(\xi + 1, \eta) =$$
$$= \varphi_{\alpha+1}(\eta, \varphi_{\alpha+2}(\xi, \eta)) \geqq \varphi_{\alpha+1}(\eta, \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta)) > \varphi_{\alpha}(\eta, \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta)) =$$
$$= \varphi_{\alpha+1}(\xi + 1, \eta) .$$

Ist $\alpha = \lim \alpha_n$ und die Induktionsvoraussetzung

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta) \geqq \varphi_{\alpha_n+1}(\xi, \eta)$$

erfüllt, so folgt ebenso

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha+1}(\xi+1, \eta) &= \varphi_\alpha(\eta, \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta)) \geqq \\ \geqq \varphi_\alpha(\eta, \varphi_\alpha(\xi, \eta)) &> \varphi_{\alpha_n}(\eta, \varphi_\alpha(\xi, \eta)) \geqq \varphi_{\alpha_n}(\eta, \varphi_{\alpha_n+1}(\xi, \eta)) = \\ &= \varphi_{\alpha_n+1}(\xi+1, \eta)\ , \end{aligned}$$

also auch

$$\varphi_{\alpha+1}(\xi+1, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi+1, \eta)\ .$$

Ist $\xi = \lim \xi_n$ und $\varphi_{\alpha+1}(\xi_n, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi_n, \eta)$ für alle n, so folgt

$$\varphi_{\alpha+1}(\lim \xi_n, \eta) = \lim \varphi_{\alpha+1}(\xi_n, \eta) \geqq \lim \varphi_\alpha(\xi_n, \eta) = \varphi_\alpha(\lim \xi_n, \eta)\ ,$$

wobei die letzte Gleichung nach der am Schluß von Abschnitt 3 gemachten Bemerkung gilt, wenn noch die weitere Induktionsvoraussetzung hinzugefügt wird, daß $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ als Funktion von α und von ξ je von einer festen endlichen Stelle ab bis zur betrachteten nicht abnehmend ist.

Durch Induktion nach ξ folgt jetzt $\varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta)$, und da

$$\varphi_{\lim \alpha_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta) \geqq \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$$

ist, so folgt durch Induktion nach α, daß stets

$$\varphi_A(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta) \text{ ist für } A > \alpha \text{ und } \xi > 1,\ \eta > 1\ .$$

Es gilt also:

Satz 7. *Für $A > \alpha$ und $\xi > 1$, $\eta > 1$ ist stets $\varphi_A(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \eta)$, und insbesondere $\varphi_A(\xi+1, \eta) > \varphi_\alpha(\xi+1, \eta)$, wenn α keine Limeszahl ist.*

Es gilt weiter noch

Satz 8. *Für $\xi > 1$, $\eta > 1$, $A > \alpha$ ist $\varphi_A^\nu(\xi, \eta) \geqq \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$.*

Der Satz gilt für $\nu = 0$. Wenn er für die Zahl ν bzw. für alle ν_n einer aufsteigenden Folge richtig ist, so folgt nach Satz 5 und Satz 7:

$$\varphi_A^{\nu+1}(\xi, \eta) = \varphi_A(\xi, \varphi_A^\nu(\xi, \eta)) \geqq \varphi_A(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) \geqq \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) = \varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta)$$

und

$$\varphi_A^{\lim \nu_n}(\xi, \eta) = \lim \varphi_A^{\nu_n}(\xi, \eta) \geqq \lim \varphi_\alpha^{\nu_n}(\xi, \eta) = \varphi_\alpha^{\lim \nu_n}(\xi, \eta)\ ,$$

der Satz gilt also allgemein.

Es sind jetzt noch die bisher meist ausgeschlossenen Fälle $\xi \leqq 1$ und $\eta \leqq 1$ zu betrachten. Setzt man in die Definitionsgleichungen der Funktionen $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$, $\alpha = 1, 2, 3 \ldots$, für η oder ξ die Werte 0 und 1 ein, so ergeben sich die folgenden Resultate:

Satz 9. *Es ist* $\varphi_\alpha(0, 0) = 0$, *ausgenommen* $\varphi_3(0, 0) = 1$.
Für $\xi > 0$ *ist* $\varphi_\alpha(\xi, 0) = 0$, *ausgenommen* $\varphi_1(\xi, 0) = \xi$ *und* $\varphi_4(\xi, 0) = 1$.
Für $\eta > 0$ *ist* $\varphi_\alpha(0, \eta) = \eta$, *ausgenommen* $\varphi_2(0, \eta) = 0$ *und* $\varphi_3(0, \eta) = 1$.
Für $\xi > 0$ *ist* $\varphi_\alpha(\xi, 1) = 1$, *ausgenommen* $\varphi_1(\xi, 1) = 1 + \xi$ *und* $\varphi_2(\xi, 1) = \xi$.
Für $\eta > 0$ *ist* $\varphi_1(1, \eta) = \eta + 1$, $\varphi_2(1, \eta) = \eta$, $\varphi_3(1, \eta) = \eta$, $\varphi_4(1, \eta) = \eta^\eta$, $\varphi_5(1, \eta) = \eta^{\eta^\eta}$, *und für* $\eta \geqq 1$ *und* $A > \alpha \geqq 2$ *allgemein* $\varphi_A(1, \eta) \geqq \varphi_\alpha(1, \eta)$, *und speziell* $\varphi_A(1, \eta) > \varphi_\alpha(1, \eta)$, *wenn* $\eta > 1, A > \alpha \geqq 3$ *und* α *keine Limeszahl ist.*

Die letzten Beziehungen sind richtig, da für $\alpha \geqq 3$ und $\eta > 1$ nach Satz 6 $\varphi_{\alpha+1}(1, \eta) = \varphi_\alpha(\eta, \eta) \geqq \varphi_\alpha(1, \eta)$ und speziell $\varphi_{\alpha+1}(1, \eta) > \varphi_\alpha(1, \eta)$ gilt, wenn α keine Limeszahl ist, also auch $\varphi_{\lim \alpha_n}(1, \eta) = \lim \varphi_{\alpha_n}(1, \eta) > \varphi_{\alpha_n}(1, \eta)$ ist; für $\alpha = 2$ und für $\eta = 1$ ist die angegebene Beziehung nach den vorangehenden Formeln von Satz 9 direkt ersichtlich.

In den ersten vier Fällen von Satz 9 ist also $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ wenigstens von der Stelle $\alpha = 5$ ab als Funktion von α konstant, im letzten Fall für $\alpha \geqq 2$ monoton zu- oder wenigstens nicht abnehmend. In allen Fällen ist daher die Existenz von $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ für beliebige α gesichert, zusammen mit dem früheren auch für beliebige ξ und η.

Aus den Formeln von Satz 9 ergeben sich entsprechende für die Iteration $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$, nämlich

Satz 10. *Es ist* $\varphi_\alpha^\nu(0, 0) = 0$, *ausgenommen* $\varphi_3^\nu(0, 0) = 1$ *für* $\nu > 0$.

Für $\xi > 0$ *ist* $\varphi_\alpha^\nu(\xi, 0) = 0$, *ausgenommen* $\varphi_1^\nu(\xi, 0) = \xi \cdot \nu$ *und* $\varphi_4^\nu(\xi, 0) = 1$ *für* $\nu > 0$.

Für $\eta > 0$ *ist* $\varphi_\alpha^\nu(0, \eta) = \eta$, *ausgenommen* $\varphi_2^\nu(0, \eta) = 0$ *und* $\varphi_3^\nu(0, \eta) = 1$, *beides für* $\nu > 0$.

Für $\xi > 0$ *ist* $\varphi_\alpha^\nu(\xi, 1) = 1$, *ausgenommen* $\varphi_1^\nu(\xi, 1) = 1 + \xi \cdot \nu$ *und* $\varphi_2^\nu(\xi, 1) = \xi^\nu$.

Für $\eta > 0$ *ist* $\varphi_1^\nu(1, \eta) = \eta + \nu$, $\varphi_2^\nu(1, \eta) = \eta$, $\varphi_3^\nu(1, \eta) = \eta$ *und allgemein*

$$\varphi_\alpha^N(1, \eta) > \varphi_\alpha^\nu(1, \eta) \quad \textit{für} \quad N > \nu, \alpha > 3, \eta > 1,$$

$$\varphi_A^\nu(1, \eta) \geqq \varphi_\alpha^\nu(1, \eta) \quad \textit{für} \quad A > \alpha \geqq 2 \quad \textit{und} \quad \eta > 0.$$

Dabei ergeben sich die letzten Beziehungen wie folgt: Für $\alpha > 3$ und $\eta > 1$ ist nach Satz 9

$$\varphi_\alpha(1, \eta) \geqq \varphi_4(1, \eta) = \eta^\eta > 1 ,$$

und wenn $\varphi_\alpha^\nu(1, \eta) > 1$ ist, so ist wegen Satz 9

$$\varphi_\alpha^{\nu+1}(1, \eta) = \varphi_\alpha\big(1, \varphi_\alpha^\nu(1, \eta)\big) \geqq \varphi_4\big(1, \varphi_\alpha^\nu(1, \eta)\big) > \varphi_\alpha^\nu(1, \eta) > 1 ,$$

also auch

$$\varphi_\alpha^{\lim \nu n}(1, \eta) > \varphi_\alpha^{\nu n}(1, \eta) > 1 \quad \text{und somit} \quad \varphi_\alpha^N(1, \eta) > \varphi_\alpha^\nu(1, \eta)$$
$$\text{für} \quad N > \nu , \quad \alpha > 3 \quad \text{und} \quad \eta > 1 .$$

Die letzte Formel von Satz 10 folgt wie bei Satz 8, wenn $\xi = 1$ gesetzt und an Stelle von Satz 7 die entsprechende Formel von Satz 9 verwendet wird.

Allgemein ergibt sich also, daß für $\alpha \geqq 5$ die Funktion $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$ in bezug auf alle Variabeln α, ν, ξ, η nicht abnehmend und folglich auch in der ersten und zweiten Zahlklasse für beliebige Werte dieser Variabeln definiert ist.

5. Die Hauptdarstellung der Zahlen

Es soll jetzt gezeigt werden, daß man jeder Zahl ζ der ersten und zweiten Zahlklasse eine eindeutige Darstellung in der Form $\zeta = \varphi_\alpha(\xi, \eta)$, ihre „Hauptdarstellung", zuordnen kann, bei welcher $\xi < \zeta$ und $\eta < \zeta$ ist, ausgenommen die Zahlen $\zeta = 0$ und ω, welche die Hauptdarstellungen $0 = \varphi_1(0, 0)$ und $\omega = \varphi_1(0, \omega)$ besitzen sollen. Es wird nicht verlangt, daß immer auch $\alpha < \zeta$ sein müsse.

Wenn es für die Zahl ζ irgend eine Darstellung in der Form $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ mit $\xi < \zeta$ und $\eta < \zeta$ gibt, so findet man ihre Hauptdarstellung in der Weise, daß man unter allen möglichen solchen Darstellungen von ζ zunächst diejenigen aussondert, bei denen die Zahl α den kleinstmöglichen Wert besitzt; unter diesen werden sodann diejenigen ausgewählt, bei denen ξ am kleinsten ist, und schließlich unter diesen, mit festem, möglichst kleinem α und ξ, noch diejenige, für welche η am kleinsten ist. Diese ist dann eindeutig bestimmt. Für die endlichen Zahlen $n > 0$ ergibt sich so die Hauptdarstellung $n = \varphi_0(0, n - 1)$.

Jede Zahl ζ, für die es eine Hauptdarstellung gibt, insbesondere also jede, die sich in der Form $\zeta = \varphi_\alpha(\xi, \eta)$ mit $\xi < \zeta$ und $\eta < \zeta$ darstellen läßt, soll „darstellbar" heißen.

Man betrachte die Zahlen $\varrho_0 = \varphi_0(0, 0) = 1$, $\varrho_1 = \varphi_1(0, \omega) = \omega$, $\varrho_2 = \varphi_2(\omega, \omega) = \omega^2$, allgemein $\varrho_\alpha = \varphi_\alpha(\omega, \omega)$ für $\alpha \geqq 2$. Nach Satz 4 nehmen sie monoton zu und wegen $\varrho_{\lim \alpha_n} = \lim \varrho_{\alpha_n}$ bilden sie eine Normalfunktion[7]). Die Zahlen ϱ_α sind darstellbar, da für $\alpha \geqq 2$ stets $\omega < \varphi_\alpha(\omega, \omega)$ ist, und jede Zahl ζ der zweiten Zahlklasse wird von gewissen Zahlen ϱ_α übertroffen.

Es werde nun angenommen, es gebe Zahlen der zweiten Zahlklasse, die nicht darstellbar sind, und ζ sei die kleinste. Unter den Zahlen ϱ_α, die größer als ζ sind, kann die kleinste keine Limeszahl als Index haben, denn wenn $\zeta < \varrho_{\lim \alpha_n} = \lim \varrho_{\alpha_n}$ ist, so kann ζ nicht alle Zahlen ϱ_{α_n} übertreffen. Es gibt also eine Zahl α mit $\varrho_\alpha < \zeta < \varrho_{\alpha+1}$. Dabei ist $\alpha \geqq 2$, denn die Zahlen zwischen ϱ_1 und ϱ_2 sind in der Form $\varphi_0(0, \eta)$ oder in der Form $\varphi_1(\omega, \eta)$ darstellbar. Es gilt also

$$\varphi_\alpha(\omega, \omega) < \zeta < \varphi_{\alpha+1}(\omega, \omega) \quad \text{mit} \quad \alpha \geqq 2 .$$

Es sei nun allgemein

$$\varphi_\gamma(\xi, \eta) < \zeta < \varphi_{\gamma+1}(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad \omega \leqq \xi \leqq \eta < \varphi_\gamma(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad \gamma > 2$$

für bestimmte Werte von ξ, η und γ.

Es ist $\varphi_{\gamma+1}(\xi, \eta) = \varphi_\gamma^\xi(\eta, \eta)$, und die Zahlen $\varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta)$ sind für $\nu \leqq \xi$ darstellbar, da sie entweder kleiner als ζ oder größer als $\varphi_\gamma(\xi, \eta)$, also größer als η sind und in der Form $\varphi_{\gamma+1}(\nu, \eta)$ geschrieben werden können. Nach Satz 2 nehmen sie mit ν monoton zu. Die kleinste darunter, welche ζ übertrifft, kann wegen $\varphi_\gamma^{\lim \nu_n}(\eta, \eta) = \lim \varphi_\gamma^{\nu_n}(\eta, \eta)$ keine Limeszahl im Exponenten haben; es gibt also eine bestimmte Zahl ν mit

$$\varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta) < \zeta < \varphi_\gamma^{\nu+1}(\eta, \eta) .$$

Nun ist $\varphi_\gamma^{\nu+1}(\eta, \eta) = \varphi_\gamma(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta))$ und die Zahlen $\varphi_\delta(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta))$ nehmen nach Satz 4 mit δ monoton zu. Sie sind sämtlich darstellbar, da schon $\varphi_0(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta)) > \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta) \geqq \eta$ ist, und die kleinste darunter, welche ζ übertrifft, kann keine Limeszahl als Index haben. Es gibt also eine bestimmte Zahl δ mit

$$\varphi_\delta(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta)) < \zeta < \varphi_{\delta+1}(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta)) .$$

Dabei ist $\delta + 1 \leqq \gamma$, also $\delta < \gamma$, und $\omega \leqq \eta \leqq \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta) < \varphi_\delta(\eta, \varphi_\gamma^\nu(\eta, \eta))$. Dies sind aber entsprechende Bedingungen wie zu Anfang, jedoch mit

---

[7]) *F. Hausdorff:* Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. (1914), S. 114.

kleinerem Index. Von $\varphi_\alpha(\omega, \omega) < \zeta < \varphi_{\alpha+1}(\omega, \omega)$ ausgehend gelangt man so nach endlich vielen Schritten zu einer Beziehung

$$\varphi_\gamma(\xi, \eta) < \zeta < \varphi_{\gamma+1}(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad \omega \leqq \xi \leqq \eta < \varphi_\gamma(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad \gamma \leqq 2 .$$

Ist nun $\gamma = 2$, also $\varphi_2(\xi, \eta) < \zeta < \varphi_3(\xi, \eta) = \eta^\xi$, so sind die Zahlen $\eta^\nu = \varphi_3(\nu, \eta)$ für $\nu \leqq \xi$ darstellbar, da sie kleiner als ζ oder größer als $\varphi_2(\xi, \eta)$, also größer als η sind. Es gibt also eine bestimmte Zahl ν mit $\eta^\nu < \zeta < \eta^{\nu+1} = \eta^\nu \cdot \eta$. Nun sind weiter die Zahlen $\eta^\nu \cdot \mu = \varphi_2(\mu, \eta^\nu)$ für $\mu \leqq \eta$ darstellbar, es gibt also eine Zahl μ mit

$$\eta^\nu \cdot \mu < \zeta < \eta^\nu \cdot (\mu + 1) = \eta^\nu \cdot \mu + \eta^\nu .$$

Daraus folgt aber $\zeta = \eta^\nu \cdot \mu + \tau = \varphi_1(\tau, \eta^\nu \cdot \mu)$ mit $\tau < \eta^\nu$, d.h. ζ selbst ist darstellbar.

Ist aber $\gamma = 1$, also $\varphi_1(\xi, \eta) < \zeta < \varphi_2(\xi, \eta) = \eta \cdot \xi$, so ergibt sich wieder eine Zahl μ mit $\eta \cdot \mu < \zeta < \eta \cdot (\mu + 1) = \eta \cdot \mu + \eta$ und daraus $\zeta = \eta \cdot \mu + \tau = \varphi_1(\tau, \eta \cdot \mu)$ mit $\tau < \eta$.

Schließlich folgt auch für $\gamma = 0$ aus $\varphi_0(\xi, \eta) < \zeta < \varphi_1(\xi, \eta)$, d. h. aus $\eta + 1 < \zeta < \eta + \xi$ mit $\xi < \zeta$, daß ζ darstellbar ist. Damit ist aber die ursprüngliche Behauptung bewiesen.

Die soeben gegebene Herleitung zeigt auch, wie man für eine beliebige Zahl ζ der zweiten Zahlklasse die zugehörige Hauptdarstellung $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ finden kann, und es folgt zugleich, daß $\alpha \leqq \mu$ wird, wenn $\varrho_\mu \leqq \zeta < \varrho_{\mu+1}$ ist.

Für die Zahlen ϱ_α selbst hat man zunächst die Hauptdarstellungen $\varrho_0 = \varphi_0(0, 0) = 1$, $\varrho_1 = \varphi_1(0, \omega) = \omega$, $\varrho_2 = \varphi_2(\omega, \omega) = \omega \cdot \omega$, $\varrho_3 = \varphi_3(\omega, \omega) = \omega^\omega$; für $\varrho_4 = \varphi_4(\omega, \omega)$ erhält man aber eine reduzierte Darstellung $\varrho_4 = \varphi_3(\omega^\omega, \omega) = \omega^{\omega^\omega}$; dann folgt $\varrho_5 = \varphi_5(\omega, \omega) = \varepsilon$ usf. Ob sich auch spätere Darstellungen $\varphi_\alpha(\omega, \omega)$ noch reduzieren lassen, müßte erst untersucht werden.

6. Die Hauptfolgen

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe, die Limeszahlen der zweiten Zahlklasse durch Hauptfolgen darzustellen, d. h. also jeder Limeszahl λ eindeutig eine aufsteigende Folge $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ zuzuordnen mit $\lim \lambda_n = \lambda$. Diese Aufgabe wird hier nur für einen Abschnitt der Zahlenreihe gelöst.

Zunächst werde der Zahl ω die Hauptfolge $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ zugeordnet mit $\lim n = \omega$. Weiter sei $\lambda > \omega$, und allen Limeszahlen, die kleiner als λ sind, seien schon Hauptfolgen zugeordnet. Die Hauptdarstellung der Limeszahl λ sei $\lambda = \varphi_\alpha(\xi, \eta)$.

Ist hier $\alpha < \lambda$ und $\alpha = \lim \alpha_n$, also $\lambda = \lim \varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$, wobei α_n die zu α gehörende Hauptfolge durchlaufen soll, so sind die Zahlen $\varphi_{\alpha_n}(\xi, \eta)$ kleiner als λ, weil $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ eine Hauptdarstellung ist, es sind also unendlich viele verschiedene, und wenn man gleiche nur einmal zählt, so erhält man eine eindeutig bestimmte aufsteigende Folge, welche die Hauptfolge von λ darstellt.

Ist α keine Limeszahl, so ist $\alpha = \beta + 1$ und ξ muß eine Limeszahl sein, denn wegen Satz 9 ist $\xi \neq 0$ und ein Ausdruck der Form $\varphi_{\beta+1}(\xi + 1, \eta)$ kann keine Hauptdarstellung sein, da er nach der Rekursionsformel mit kleinerem Index in der Form $\varphi_\beta(\eta, \varphi_{\beta+1}(\xi, \eta))$ geschrieben werden kann, wobei nach Satz 3 $\varphi_{\beta+1}(\xi, \eta) < \varphi_{\beta+1}(\xi + 1, \eta)$ ist. Es ist also $\lambda = \varphi_\alpha(\lim \xi_n, \eta) = \lim \varphi_\alpha(\xi_n, \eta)$, wobei ξ_n die zu ξ gehörende Hauptfolge durchlaufen soll. Dabei sind die Zahlen $\varphi_\alpha(\xi_n, \eta)$ wiederum kleiner als λ und sie bestimmen, wenn man gleiche nur einmal zählt, die Hauptfolge von λ.

Ist nun $\varrho_\mu \leqq \lambda < \varrho_{\mu+1}$, so ist nach Abschnitt 5 $\alpha \leqq \mu$, also $\alpha < \lambda$, sofern $\mu < \varrho_\mu$ ist. Diese Beziehung gilt aber bis zur ersten kritischen Zahl $\kappa = \varrho_\kappa$ der Normalfunktion ϱ_μ. Man findet κ als Limes der Zahlen $\varrho_0, \varrho_{\varrho_0}, \varrho_{\varrho_{\varrho_0}}, \ldots$. Für alle Limeszahlen, die kleiner als κ sind, ergeben sich also durch Induktion die zugehörigen Hauptfolgen.

Man kann das Verfahren noch fortsetzen, wenn man der Zahl κ die eben angegebene Folge als Hauptfolge zuordnet, sofern sich die Darstellung $\varrho_\kappa = \varphi_\kappa(\omega, \omega)$ nicht reduzieren läßt. Auch weiteren kritischen Zahlen kann man etwa nach dem Verfahren von Veblen[8]) bestimmte Hauptfolgen zuordnen und die zwischenliegenden Limeszahlen wie oben behandeln. Auch so kommt man aber nicht beliebig weit; man beherrscht damit immer nur einen wenn auch umfangreichen Abschnitt der zweiten Zahlklasse.

(Eingegangen den 30. Juni 1950.)

---

[8]) Vgl. Fußnote [2]).