

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	24 (1950)
Artikel:	Hyperbolische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.
Autor:	Bareiss, Erwin
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-20313

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Hyperbolische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Von ERWIN BAREISS, Zürich

Einleitung

Herr *Rudolf Fueter* und seine Schüler haben in den letzten fünfzehn Jahren die Theorie der hyperkomplexen Funktionen aufgebaut und sind in verschiedener Hinsicht zu weitreichenden Resultaten gelangt. Unter anderem eignen sich die hyperkomplexen Funktionen zur Lösung von gewissen Systemen partieller Differentialgleichungen, indem nun nicht wie bisher zu einer gegebenen Algebra die zugehörigen Bedingungsgleichungen gesucht werden, sondern umgekehrt aus dem Differentialgleichungssystem als Bedingung die zugehörige Algebra konstruiert wird. Die vorliegende Arbeit soll in dieser Richtung einen Beitrag zum weiteren Ausbau der Funktionentheorie und ihrer Anwendungen liefern.

Im nachfolgenden ist untersucht worden, welche Systeme mit der heute vorhandenen Algebra gelöst werden können. Dabei kommt man u. a. zum Resultat, daß sich die inhomogenen Systeme fast ebenso einfach lösen lassen wie die homogenen. Wesentlich ist, daß die relativistische, d. h. die invariante Schreibweise umgangen werden kann, ohne daß darunter der klare Aufbau leidet. Die bisherigen, entsprechenden Lösungsmethoden mußten aber zwangsläufig zur erwähnten Schreibweise übergehen, wie im Verlauf der Arbeit gezeigt wird. Wer schon einmal praktisch mit solchen Tensoren gerechnet hat, weiß wie äußerst mühselig die Durchführung auch der einfachsten numerischen Rechnungen ist. Die Zulassung inhomogener Systeme führte auch auf den erweiterten (*Cauchyschen*) ersten Integralsatz. Will man nun den zweiten Integralsatz finden und stellt eine weitere Forderung an die integrierende Funktion, welche eine elegante Lösung garantiert, so ist diese Funktion eindeutig bestimmt. Betrachtet man schließlich die *Hadamardsche* Theorie von einem etwas anderen Gesichtspunkt aus, führt neben dem beschränkten Anteil auch einen logarithmischen Anteil ein und verwendet

möglichst günstige Approximationsflächen, so erhält man ein Lösungsverfahren, das an Klarheit nichts zu wünschen übrig lässt.

Die vorliegende Arbeit wird zweckmäßig in die folgenden Paragraphen eingeteilt :

1. *Einteilung der Systeme partieller Differentialgleichungen.*
2. *Definition und Existenz des Multiplikators ersten Grades.*
3. *Transformation der Systeme mit einem Multiplikator ersten Grades auf die Normalform und deren Eigenschaften.*
4. *Algebren.*
5. *Operatoren. Klassifizierung der ε - und e -Funktionen.*
6. *Der verallgemeinerte erste Integralsatz.*
7. *Der verallgemeinerte zweite Integralsatz für elliptische Systeme (Randwertproblem elliptischer Systeme).*
8. *Die Grundlagen für den zweiten Integralsatz oder das Anfangswertproblem inhomogener einfacher hyperbolischer Systeme.*
9. *Eine der Hadamardschen äquivalente Lösungsmethode. Der beschränkte und der logarithmische Anteil.*
10. *Der zweite Integralsatz für inhomogene einfache hyperbolische Systeme.*

1. Einteilung der Systeme partieller Differentialgleichungen

Allgemein kann man ein System von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$\sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}^h \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_{ik} u_k = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

darstellen, wo die a_{ik}^h und b_{ik} die konstanten Koeffizienten, die $u_k = u_k(x_0, \dots, x_{m-1})$ die n gesuchten Funktionen, λ einen skalaren Parameter und $f_i = f_i(x_0, \dots, x_{m-1})$ eine der n verschiedenen Störfunktionen bedeuten. Dieses System können wir auch in Matrizenform schreiben, falls

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

als Vektormatrizen aufgefaßt und unter den

$$A_h \frac{\partial}{\partial x_h} = (a_{ik}^h) \frac{\partial}{\partial x_h} = \begin{pmatrix} a_{00}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & a_{01}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & a_{0n-1}^h \frac{\partial}{\partial x_h} \\ a_{10}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & a_{11}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & a_{1n-1}^h \frac{\partial}{\partial x_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & a_{n-11}^h \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & a_{n-1n-1}^h \frac{\partial}{\partial x_h} \end{pmatrix}$$

$(h = 0, 1, \dots, m-1)$

m Matrixoperatoren verstanden werden. Ferner sei

$$\mathbf{B} = (b_{ik})$$

eine Koeffizientenmatrix. In diesem Fall lautet das System von Differentialgleichungen

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \left(\sum_{h=0}^{m-1} A_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \lambda \mathbf{B} \right) \mathbf{u} = f .$$

Um nun für das Folgende eine zweckmäßige Einteilung vornehmen zu können, ordnen wir jedem System $\mathbf{L} \mathbf{u}$ die sogenannte *charakteristische Determinante* Γ zu, indem wir formal $\frac{\partial}{\partial x_h}$ durch x_h ersetzen¹⁾:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \sum_{h=0}^{m-1} a_{00}^h x_h & \sum_{h=0}^{m-1} a_{01}^h x_h & \cdots & \sum_{h=0}^{m-1} a_{0n-1}^h x_h \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{h=0}^{m-1} a_{n-10}^h x_h & \sum_{h=0}^{m-1} a_{n-11}^h x_h & \cdots & \sum_{h=0}^{m-1} a_{n-1n-1}^h x_h \end{vmatrix} = \left| \sum_{h=0}^{m-1} A_h x_h \right| .$$

Das heißt also praktisch, daß wir die i -te Differentialgleichung nach den gesuchten Funktionen u_k ordnen und zusammenfassen, und dann die $\frac{\partial u_k}{\partial x_h}$ durch x_h ersetzen. So ergibt sich das Glied in der Zeile i und in der Kolonne k . Diese Determinante hat nun die wesentliche Eigenschaft, daß sie mit dem gegebenen System \mathbf{L} derart verbunden ist, daß bei einer beliebigen Transformation

$$x'_h = x'_h(x_0, \dots, x_{m-1})$$

¹⁾ Rudolf Fueter: Funktionentheorie im Hyperkomplexen, ausgearbeitete Vorlesung (Wintersemester 1948/49), S. 42 ff.

Courant-Hilbert: Mathematische Methoden der Physik, Springer, Berlin 1937, Band II, Kapitel III, § 4.

der ursprünglichen Variablen die neue charakteristische Determinante Γ wieder in derselben oben beschriebenen Art dem neuen System \mathbf{L} zugeordnet ist, falls in der alten charakteristischen Determinante Γ gleichzeitig die lineare Transformation

$$x_h = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial x_h}{\partial x'_k} x'_k$$

vorgenommen wird. Ebenso ist Γ auch gegen die elementaren Umformungen sowie die Einführung neuer linearer Kombinationen der Differentialgleichungen und der gesuchten Funktionen bis höchstens auf einen konstanten Faktor invariant. Somit ist die folgende Unterscheidung naheliegend.

a) Es ist durch eine geeignete lineare Transformation

$$x_h = \sum_{(k)} t_{hk} x'_k$$

möglich, die charakteristische Form $\Gamma = 0$ auf weniger als m Variable zu reduzieren. Ein solches System heißt *parabolisch ausgeartet* und ist unter b, c und d ausgeschlossen.

b) Besitzt die charakteristische Gleichung m -ten Grades $\Gamma = 0$ für kein x_h eine reelle Lösung außer $x_0 = \dots = x_{m-1} = 0$, so ist das System *total elliptisch*. Besitzt das zugehörige System \mathbf{L} einen Multiplikator ersten Grades (dessen Definition sich in Paragraph 2 findet), so heißt das System einfach *elliptisch*. Diese Systeme sind für $f \equiv 0$ von Herrn *Kriszten* in einer soeben erschienenen Arbeit untersucht worden, und die vorliegende Definition ist mit derjenigen von Herrn Kriszten äquivalent²⁾.

c) Ist es aber möglich, durch eine geeignete lineare Transformation die Variable x_0 so auszuzeichnen, daß sie für beliebige reelle Werte der übrigen Variablen x_1, \dots, x_{m-1} in $\Gamma = 0$ m reelle (auch mehrfache) Wurzeln hat, so sprechen wir von einem *total hyperbolischen* System. Geometrisch bedeutet dies, daß der charakteristische Kegel $\Gamma = 0$ durch jede Ebene $x_i = \text{const.}$ in m reellen $(m - 2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten geschnitten wird.

Wir betrachten nun speziell eine reduzierbare charakteristische Determinante Γ , die sich in der Form

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_{\frac{n}{2}}$$

²⁾ Adolf Kriszten: Elliptische Systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Comm. Math. Helv. vol. 23, 243.

darstellen läßt, in welcher die Γ_k irreduzible quadratische Formen³⁾ darstellen. Existiert nun auch hier ein Multiplikator ersten Grades, so heißen die totalhyperbolischen Systeme *einfach hyperbolisch*.

d) Die verbleibenden möglichen Systeme heißen (total) ultrahyperbolisch. Diese Systeme sind ihrer Natur nach viel komplizierter und vor allem deshalb weniger von Interesse, als in der mathematischen Physik keine ultrahyperbolischen Systeme bekannt sind.

Unsere Systematik ist selbstverständlich auch gültig, falls die Koeffizienten Funktionen des Ortes sind, jedoch gilt dann die Einteilung nur gerade an der betreffenden Stelle. — Schließlich sei darauf hingewiesen, daß wir stets reelle Koeffizienten vorausgesetzt haben. Dies ist insofern keine Einschränkung, als sich komplexe und hyperkomplexe Systeme stets auf ein reelles System reduzieren und so klassifizieren lassen. Ebenso können komplexe Lösungen in reelle Differentialgleichungen aufgespalten werden, so daß auch alle Komponenten u_k als reell zu betrachten sind. Man beachte ferner, daß sich stets Gleichungen höherer Ordnung auf Gleichungen erster Ordnung reduzieren lassen.

2. Definition und Existenz des Multiplikators ersten Grades

Im folgenden soll ein Gedanke von *Harry Malmheden*⁴⁾ verallgemeinert werden, um daraus einen wichtigen Schluß über die Auflösbarkeit von Systemen partieller Differentialgleichungen mittels hyperkomplexer Funktionen zu ziehen.

Wir gehen aus von einem System partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und von beliebigem Typus

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{A}_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \lambda \mathbf{B} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

und betrachten vorläufig nur die linke Seite des Systems. Zu jeder Operatorenmatrix \mathbf{L} mit konstanten Koeffizienten können wir eine adjungierte Matrix \mathbf{L}^* bilden, deren Elemente die $(n - 1)$ -reihigen Unter-

³⁾ Der Fall, wo sich Γ in lineare Faktoren zerlegen läßt, ist nicht interessant, da sich für $x_0 = t$ zum Beispiel eine unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in gewissen Richtungen ergeben würde, mit Ausnahme des Falles $m = 2$, wo der Kegel natürlich immer in ein Geradenpaar zerfällt und die Ausbreitungsrichtung von selbst vorgegeben ist.

⁴⁾ *Harry Malmheden* : A Class of Hyperbolic Systems of Linear Differential Equations. Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Band 8, 1947.

determinanten von \mathbf{L} sind. Üben wir den Operator \mathbf{L}^* von links her auf $\mathbf{L} \mathbf{u}$ aus, so ergeben sich (nach Paragraph 1) nur erlaubte Operationen. Also wird

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} = |\mathbf{L}| \mathbf{E} ,$$

wenn wir unter $|\mathbf{L}|$ die Determinante des Systems \mathbf{L} und unter \mathbf{E} die Einheitsmatrix verstehen. Somit genügen die Komponenten der Vektor-matrix \mathbf{u} den folgenden Differentialgleichungen, wenn wir wieder die Matrzenschreibweise anwenden :

$$|\mathbf{L}| \mathbf{u} = \mathbf{f}^* ,$$

wo $\mathbf{f}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{f}$ wiederum eine bekannte Funktion darstellt. Hierdurch sind die unbekannten Funktionen u_k ($k = 0, 1, \dots, n - 1$) separiert und können einzeln aus der Differentialgleichung n -ter Ordnung bestimmt werden. Hieraus entsteht die

Definition: Jeder Operator, der das System \mathbf{L} auf die Diagonalform bringt, heißt ein Multiplikator. \mathbf{L}^* ist ein Multiplikator ($n - 1$)-ten Grades.

a) Hinreichende Bedingungen für einen Multiplikator ersten Grades.

Mit unsren Matrix-Operatoren können wir rechnen, als ob es algebraische Gebilde wären. Wir versuchen nun, einen Multiplikator von möglichst niedrigem Grad zu konstruieren, das heißt also, aus der Determinante $|\mathbf{L}|$ möglichst viele Faktoren herauszuziehen. Hat nun $|\mathbf{L}|$ ein Teiler T , so muß \mathbf{L}^* nicht unbedingt denselben Teiler auch haben. Ist aber ein Faktor T in allen Unterdeterminanten enthalten, so kann dieser aus $|\mathbf{L}|$ und aus \mathbf{L}^* herausgezogen werden, so daß sich wieder ein Diagonaloperator ergibt :

$$\frac{\mathbf{L}^*}{T} \mathbf{L} = \frac{|\mathbf{L}|}{T} \mathbf{E} ,$$

der aber einen niedrigeren Grad in $\frac{\partial}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \dots$ besitzt. Wir interessieren uns vor allem für einen Teiler T vom Grade $n - 2$ und für den Multiplikator \mathbf{M} vom ersten Grade, den wir wie folgt definieren können :

$$\frac{\mathbf{L}^*}{T} = \mathbf{M} , \quad (\text{Definition})$$

wobei sich nun \mathbf{M} wieder in die allgemeine Form

$$\mathbf{M} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{A}_k^* \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda \mathbf{B}^*$$

zerlegen läßt, indem man alle Elemente mit denselben $\frac{\partial}{\partial x_k}$ als symbolisch-skalaren Faktor zu einer Matrix zusammenfaßt. Da nach der Definition

$$\mathbf{L}^* = T \cdot \mathbf{M}$$

ist, muß

$$| L | = T \cdot |\Gamma_0|$$

sein, wo Γ_0 einen allgemeinen m -dimensionalen Kegelschnitt symbolisch darstellt

$$|\Gamma_0| \left(\frac{\partial}{\partial x_h} \right) = \sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + 2 \sum_{k=0}^{m-1} g_k \frac{\partial}{\partial x_k} + g_m .$$

Γ_0 soll entsprechend unserer Bemerkung in Paragraph 1 irreduzibel angenommen werden. Aus

$$| \mathbf{L}^* | = | L |^{n-1}$$

und

$$| L | = T \cdot |\Gamma_0|$$

wird

$$| \mathbf{L}^* | = T^n | \mathbf{M} | = T^{n-1} |\Gamma_0|^{n-1}$$

und somit

$$| \mathbf{M} | = \frac{|\Gamma_0|^{n-1}}{T} .$$

Nun haben wir Γ_0 vom zweiten Grade und irreduzibel vorausgesetzt; $| \mathbf{M} |$ ist vom Grade n in $\frac{\partial}{\partial x}$ und T vom Grade $n - 2$. T muß somit Potenz von Γ_0 sein bis auf einen konstanten Faktor c

$$T = \Gamma_0^x .$$

Der Vergleich der Exponenten auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} \Gamma_0^x \cdot | \mathbf{M} | &= |\Gamma_0|^{n-1} \\ T &= \Gamma_0^{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

als notwendige Bedingung für T , und weiter

$$| L | = \Gamma_0^{\frac{n}{2}} .$$

Damit erkennt man auch die hinreichenden Bedingungen für einen Teiler T und wir haben folgendes bewiesen:

Soll das lineare Differentialgleichungssystem $\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ einen Multiplikator ersten Grades haben, so ist *hinreichend*

$$\text{I. } |\mathbf{L}| = \Gamma_0^{\frac{n}{2}} .$$

$$\text{II. Alle Unterdeterminanten von } |\mathbf{L}| \text{ sind teilbar durch } \Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} .$$

b) *Die Notwendigkeit der Bedingungen I und II.*

Wir gehen davon aus, daß das System

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

den Multiplikator ersten Grades \mathbf{M} besitzt. Daher ist

$$\mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{u} = \Gamma_0 \mathbf{u} ,$$

wobei Γ_0 als irreduzibel und $m > 2$ vorausgesetzt wird. Aus der Matrizedarstellung

$$\mathbf{M} \mathbf{L} = \Gamma_0 \cdot \mathbf{E}$$

wird die Determinantendarstellung

$$|\mathbf{M}| |\mathbf{L}| = \Gamma_0^n ,$$

wenn man $\frac{\partial}{\partial x_k}$ durch x_k ersetzt. Da links zwei Polynome vom Grade n stehen, ist also notwendig

$$\begin{aligned} \text{I. } |\mathbf{L}| &= \Gamma_0^{\frac{n}{2}} \cdot c \\ |\mathbf{M}| &= \Gamma_0^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{c} \quad (c = \text{const.}) \end{aligned}$$

Daraus aber folgt ferner die wichtige Eigenschaft, daß \mathbf{L} und \mathbf{M} bis auf einen konstanten Faktor dieselbe charakteristische Mannigfaltigkeit haben, so daß auch wiederum $(\mathbf{M} \mathbf{L})$ genau denselben charakteristischen Kegel besitzt.

Die Bedingung II verlangt die Teilbarkeit der Unterdeterminanten durch $\Gamma_0^{\frac{n}{2}-1}$. Diese ist ebenfalls erfüllt; denn aus

$$\mathbf{M} \mathbf{L} = \Gamma_0 \mathbf{E}$$

folgt durch Multiplikation mit $\Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} \cdot c$ ($c = \text{const.}$)

$$c \cdot \Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathbf{M} \mathbf{L} = \Gamma_0^{\frac{n}{2}} \cdot \mathbf{E} \cdot c .$$

Ferner ist

$$\mathbf{L}^* \mathbf{L} = |L| \cdot \mathbf{E} = \Gamma_0^{\frac{n}{2}} \cdot \mathbf{E} \cdot c ,$$

wobei wieder dieselbe Konstante c wie unter I verwendet wird. Die Differenz der beiden Zeilen gibt

$$(c \cdot \Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{L}^*) \mathbf{L} = \mathbf{O} .$$

Da nach Voraussetzung \mathbf{L} nicht die Nullmatrix ist, ergibt sich

$$c \cdot \Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{L}^* ,$$

womit II als notwendig erwiesen ist.

Satz : Für die Existenz eines Multiplikators ersten Grades ist daher notwendig und hinreichend bei irreduziblem Γ_0

$$\text{I : } |L| = \Gamma_0^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{II : } \Gamma_0^{\frac{n}{2}-1} \text{ teilt alle Unterdeterminanten von } \mathbf{L} .$$

Dieser Satz wird von fundamentaler Bedeutung werden für die Beantwortung der Frage, ob für ein System von partiellen Differentialgleichungen die Möglichkeit besteht, mittels hyperkomplexer Funktionen das Rand- bzw. Anfangswertproblem zu lösen.

3. Transformation der Systeme mit einem Multiplikator ersten Grades auf die Normalform und deren Eigenschaften

Wir nehmen an, daß das System

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \left(\sum_{h=0}^{m-1} \mathbf{A}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \lambda \mathbf{B} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

den Multiplikator

$$\mathbf{M} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{A}_k^* \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda \mathbf{B}^*$$

besitzt. Dann ergibt sich sofort

$$\mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{u} = \Gamma_0 \mathbf{u}$$

oder

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{h,k=0}^{m-1} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_k^* \mathbf{A}_h + \mathbf{A}_h^* \mathbf{A}_k) \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + \lambda \sum_{h=0}^{m-1} (\mathbf{A}_h^* \mathbf{B} + \mathbf{B}^* \mathbf{A}_h) \frac{\partial}{\partial x_h} + \lambda^2 \mathbf{B}^* \mathbf{B} \right\} \mathbf{u} \\ &= \left\{ \sum_{h,k=0}^{m-1} g_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + 2 \sum_{h=0}^{m-1} g_h \frac{\partial}{\partial x_h} + g_m \right\} \mathbf{u} = \mathbf{f}^* \\ & \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{M} \mathbf{f} . \end{aligned}$$

Für den mittleren Teil dieser Gleichung ist bekannt, daß sich der zugehörige algebraische Ausdruck von Γ_0 durch eine richtig gewählte affine Transformation

$$\bar{x}_h = \sum_{k=0}^{m-1} t_{hk} x_k$$

in die kanonische Gestalt überführen läßt. Dasselbe gilt auch für die Differentialgleichung, und man erhält, falls man die neuen unabhängigen Variablen \bar{x} wieder mit x bezeichnet, den Ausdruck

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\varkappa_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2 b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + c \right\} \mathbf{u} .$$

Hier sind die b_i und c konstante Werte, während

$$\begin{aligned} \varkappa_0 &= 1 \\ \varkappa_i &= \begin{cases} +1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, \mu \\ -1 & \text{für } i = \mu + 1, \dots, m-1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Da wir in unsren Betrachtungen den parabolischen Fall ausschließen, können wir auch die Ableitungen erster Ordnung wegschaffen, indem wir statt der gesuchten Funktion \mathbf{u} eine neue Funktion \mathbf{w} durch die Relation

$$u_i = w_i e^{- \sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l}$$

einführen. Nach kurzer Rechnung wird der neue Differentialausdruck

$$e^{- \sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i}{\varkappa_i} x_i} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \varkappa_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left(c - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l}{\varkappa_l} \right) \right\} \mathbf{w} .$$

Wir kürzen mit $\exp - \sum \frac{b_i}{\kappa_i} x_i$ und setzen

$$\omega^2 = \kappa_m \left(c - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l^2}{\kappa_l} \right) ,$$

$$\kappa_m = \operatorname{sign} \left(c - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l^2}{\kappa_l} \right) .$$

So ergibt sich der

Satz : Bei Betrachtung nicht parabolisch ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die entweder

a) einen Multiplikator ersten Grades besitzen oder

b) den Bedingungen I und II genügen,

kann man sich auf Systeme beschränken, die sich durch den Multiplikator ersten Grades auf die Form

$$\left\{ \sum_i \kappa_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \kappa_m \omega^2 \right\} \mathbf{w} = \mathbf{g}^*$$

bringen lassen, wobei \mathbf{g}^* noch zu bestimmen ist.

Unsere **Definitionen** aus Paragraph 1 lauten nun so :

Ein System von partiellen Differentialgleichungen ist einfach *elliptisch*, wenn es äquivalent zu

$$(\Delta + \kappa_m \omega^2) \mathbf{w} = \mathbf{g}^*$$

ist, und einfach *hyperbolisch*, wenn es äquivalent zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta + \kappa_m \omega^2 \right) \mathbf{w} = \mathbf{g}^*$$

ist.

Dieselben Transformationen, die wir auf das mittlere Glied ausgeübt haben, können wir auch auf die andern Glieder übertragen. Auf der linken Seite ergibt die lineare Transformation

$$\bar{\mathbf{L}} \mathbf{u} = \left(\sum_{h=0}^{m-1} \mathbf{B}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \lambda \mathbf{B} \right) \mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}$$

mit

$$\mathbf{B}_h = \sum_{l=0}^{m-1} t_{hl} \mathbf{A}_l ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

und

$$\bar{\mathbf{M}} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{B}_k^* \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda \mathbf{B}^* \right)$$

mit

$$\mathbf{B}_k^* = \sum_{l=0}^{m-1} t_{kl} A_l \quad ; \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B}^* .$$

Ersetzen wir links

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot e^{-\sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l},$$

so wird

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}} \mathbf{u} &= e^{-\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \left\{ \sum \mathbf{B}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \left(\lambda \mathbf{B} - \sum \frac{b_h}{\varkappa_h} \mathbf{B}_h \right) \right\} \mathbf{w} \\ &= e^{-\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \cdot \{ \mathbf{L}' \} \mathbf{w} = \bar{\mathbf{f}} . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß das System keine konstanten Koeffizienten mehr hat, hingegen besitzt

$$\mathbf{L}' \mathbf{w} = e^{+\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \cdot \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

solche. Das neue System errechnet sich also zu

$$\mathbf{L}' = \bar{\mathbf{L}} - \sum \frac{b_h}{\varkappa_h} \mathbf{B}_h .$$

Ähnlich bestimmt man den zu \mathbf{L}' gehörenden linearen Multiplikator

$$\mathbf{M}' = \bar{\mathbf{M}} - \sum \frac{b_k}{\varkappa_k} \mathbf{B}_k$$

und erhält schließlich als Resultat

$$\mathbf{M}' \mathbf{L}' \mathbf{w} = e^{\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \cdot \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{f}} = e^{\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \left(\mathbf{M}' + \frac{b_k}{\varkappa_k} \mathbf{B}_k^* \right) \cdot \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{g}^* .$$

Ohne Verwendung des Hyperkomplexen drängt sich von hier an die invariante Schreibweise auf, um den bisherigen Formalismus wahren zu können. Da wir aber zur Herleitung der *Cliffordschen Algebra* nur die linke Seite benötigen und für die Behandlung des Randwertproblems von der Operation \mathbf{M}' gar keinen Gebrauch machen, so liegt hier der tiefere Grund, warum wir auch inhomogene Probleme mit Hilfe hyperkomplexer Funktionen ohne invariante Schreibweise erfolgreich in Angriff nehmen können. Hierdurch wird also die Überlegenheit der hyperkomplexen Methoden motiviert und die viel einfachere und übersichtlicher gestaltete Durchführung der Rechnung erklärt.

Für das Folgende ist es bequem, wenn wir unser System noch zweckmäßig normieren. Wir setzen daher

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0 &= \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{L}' \\ \mathbf{M}_0 &= \mathbf{M}' \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{g}_0 &= \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{g}\end{aligned}$$

Mit dieser Normierung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0 &= \sum_{h=0}^{m-1} \mathbf{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega \mathbf{C}_m \\ \mathbf{M}_0 &= \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\mathbf{C}}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \omega \bar{\mathbf{C}}_m ,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_h &= \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{B}_h , \quad \omega \mathbf{C}_m = \mathbf{B}_0^{-1} \left(\lambda \mathbf{B} - \sum \frac{b_h}{\varkappa_h} \mathbf{B}_h \right) \\ \bar{\mathbf{C}}_k &= \mathbf{B}_k^* \mathbf{B}_0 , \quad \omega \bar{\mathbf{C}}_m = \left(\lambda \mathbf{B}^* - \sum \frac{b_k}{\varkappa_k} \mathbf{B}_k^* \right) \mathbf{B}_0 .\end{aligned}$$

Also wird

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{L}_0 \mathbf{w} = \mathbf{M}' \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{L}' \mathbf{w} = \mathbf{M}' \mathbf{L}' \mathbf{w}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=0}^{m-1} \bar{\mathbf{C}}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \omega \bar{\mathbf{C}}_m \right) \left(\sum_{h=0}^{m-1} \mathbf{C}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega \mathbf{C}_m \right) \mathbf{w} \\ &= \left\{ \sum_{h,k=0}^{m-1} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{C}_h + \bar{\mathbf{C}}_h \mathbf{C}_k) \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} \right. \\ &\quad \left. + \omega \sum_{k=0}^{m-1} (\bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{C}_m + \bar{\mathbf{C}}_m \mathbf{C}_k) \frac{\partial}{\partial x_k} + \omega^2 \bar{\mathbf{C}}_m \mathbf{C}_m \right\} \mathbf{w} \\ &= \left\{ \sum_i \varkappa_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varkappa_m \omega^2 \right\} \mathbf{w} .\end{aligned}$$

Hieraus können wir nun eine Reihe Eigenschaften und Beziehungen der Matrizen \mathbf{C} ablesen.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_0 &= \mathbf{E} \\ \bar{\mathbf{C}}_0 \mathbf{C}_0 &= \varkappa_0 \mathbf{E} \quad \varkappa_0 = 1 \\ \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{C}_0 + \bar{\mathbf{C}}_0 \mathbf{C}_k &= \mathbf{O} \\ \bar{\mathbf{C}}_h \mathbf{C}_h &= \varkappa_h \quad \varkappa_h = \begin{cases} +1 & \text{für } h = 1, 2, \dots, \mu \\ -1 & \text{für } h = \mu + 1, \dots, m-1 \end{cases} \\ \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{C}_h + \bar{\mathbf{C}}_h \mathbf{C}_k &= \mathbf{O} \quad h \neq k \\ \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{C}_m + \bar{\mathbf{C}}_m \mathbf{C}_k &= \mathbf{O} \quad k \neq m \\ \bar{\mathbf{C}}_m \mathbf{C}_m &= \varkappa_m \quad \varkappa_m = \text{sign} \left(c - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{b_l^2}{\varkappa_l} \right) .\end{aligned}$$

4. Algebren

a) Hyperkomplexe Zahlen und Funktionen im e -Raum.

Die Matrizen

$$C_h = \begin{pmatrix} c_{00}^h & c_{01}^h & \dots & c_{0\ n-1}^h \\ c_{10}^h & c_{11}^h & \dots & c_{1\ n-1}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1\ 0}^h & c_{n-1\ 1}^h & \dots & c_{n-1\ n-1}^h \end{pmatrix}$$

deuten wir als Einheiten einer *Cliffordschen Algebra*⁵⁾ und sehen, daß aus ihnen die Multiplikationstafel bestimmt ist. Identifizieren wir C_h mit e_h , so haben wir folgende Tabelle :

$$\text{Haupteinheit: } e_0 = 1$$

$$\text{Grundeinheiten: } e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m$$

$$\text{Cliffordsche Einheiten: } e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_1 e_2 e_3, \dots, e_1 e_2 \dots e_m$$

$$\text{Anzahl der Basiselemente: } 2^m$$

Es gelten folgende Relationen :

$$e_0^2 = 1$$

$$e_h^2 = -1 \quad \text{für } h = 1, 2, \dots, \mu$$

$$e_h^2 = +1 \quad \text{für } h = \mu + 1, \dots, m - 1$$

$$e_m^2 = -\kappa_m \quad \kappa_m = \text{sign} \left(c - \sum \frac{b_i}{\kappa_i} \right)$$

oder allgemein

$$e_0^2 = \kappa_0, \quad e_h^2 = -\kappa_h$$

$$e_0 e_h = e_h e_0 = e_h \quad (h = 0, 1, \dots, m)$$

$$e_h e_k = -e_k e_h \quad (h, k > 0, \quad h \neq k)$$

$$e_k e_m = -e_m e_k \quad (k = 1, 2, \dots, m - 1).$$

Die konjugierten Einheiten werden durch Überstrichen gekennzeichnet.

$$\bar{e}_0 = e_0 = 1, \quad \bar{e}_h = -e_h \quad (h = 1, 2, \dots, m)$$

Für unsere Betrachtungen genügen die hyperkomplexen Zahlen aus dem Linearsystem \mathfrak{L}_e .

$$\mathfrak{L}_e : \quad z = \sum_{h=0}^m x_h e_h.$$

⁵⁾ Über eine ausführliche Theorie der *Cliffordschen Algebra* vergleiche *R. Fueter*, Vorlesung 1948/49, S. 1ff. und über die *Funktionentheorie der Cliffordschen Algebren* l. c. S. 264ff. Die hier verwendeten Begriffe stimmen, soweit als möglich, mit jenen der Vorlesung überein.

Die konjugierte Zahl \bar{z} ist definiert durch

$$\bar{z} = \sum_{h=0}^m x_h \bar{e}_h .$$

Unter der Norm einer Zahl verstehen wir ⁶⁾

$$n(z) = z \bar{z} = \bar{z} z = \sum_{h=0}^m \kappa_h x_h^2 .$$

Man beachte, daß für $x_m = 0$ die Norm von z gerade mit dem charakteristischen Kegel Γ_0 des transformierten Gleichungssystems übereinstimmt.

Wir gebrauchen später noch folgende Tatsachen.

1. Ist für zwei hyperkomplexe Größen

$$z = \sum_{h=0}^m e_h x_h \quad \text{und} \quad v = \sum_{h=0}^m e_h v_h$$

das Produkt $zv = 0$, so ist auch $vz = 0$. Denn es ist

$$\begin{aligned} zv &= e_0 x_0 v_0 - \sum_{h=1}^m \kappa_h x_h v_h + \sum_{0 < h < k} e_h e_k (x_h v_k - x_k v_h) + \sum_{k=1}^m e_k (x_0 v_k + x_k v_0) = 0 \\ vz &= e_0 v_0 x_0 - \sum_{h=1}^m \kappa_h v_h x_h + \sum_{0 < h < k} e_h e_k (v_h x_k - v_k x_h) + \sum_{k=1}^m e_k (v_0 x_k + v_k x_0) = ? \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung müssen die Komponenten von jedem Basiselement für sich verschwinden. Weil dies für zv zutrifft, ist folglich auch $vz = 0$, wie der Vergleich der Komponenten zeigt.

2. Da die Clifffordsche Algebra einer Matrixalgebra isomorph ist, gilt das assoziative Gesetz

$$(e_i e_h) e_k = e_i (e_h e_k) .$$

Die e -Funktionen.

Durch die $m + 1$ Grundeinheiten können wir uns einen euklidischen $(m + 1)$ -dimensionalen Raum aufgespannt denken, der auf sich selbst abgebildet werden kann. Es seien also $m + 1$ reelle Funktionen v_h der $m + 1$ reellen Veränderlichen x_0, \dots, x_m gegeben

$$v_h = v_h(x_0, \dots, x_m) \quad (h = 0, 1, \dots, m) ,$$

welche wir mit Hilfe des Linearsystems \mathfrak{L}_* zu einer sogenannten e -Funktion der hyperkomplexen Variablen

⁶⁾ R. Fueter: Vorlesung 1948/49, S. 267 f.

$$z = \sum_{h=0}^m x_h e_h$$

zusammenfassen :

$$v(z) = \sum_{h=0}^m v_h e_h .$$

Die Differentiation nach den einzelnen Komponenten der Variablen z (oder ζ usw.) wird in der Theorie der hyperkomplexen Funktionen zweckmäßig wie folgt bezeichnet

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \sum_{h=0}^m \frac{\partial v_h}{\partial x_k} e_h \equiv v^{(k)} = \sum_{h=0}^m v_h^{(k)} e_h .$$

Für $v^{(k)}$ wird „ $v - k -$ Strich“ gelesen.

b) *Der ϵ -Raum und seine Eigenschaften.*

Wir können uns neben dem e -Raum auch noch einen weiteren Funktionalraum denken, in welchem wir ganz neue Einheiten und eine von der Cliffordschen völlig verschiedene Algebra einführen mit den n Einheiten

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1} .$$

Die Abbildung des e -Raumes (oder eines Teilraumes davon) auf den ϵ -Raum erfolgt mittels der sogenannten ϵ -Funktion

$$w(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k w_k(z) ,$$

wobei die w_k wiederum reelle Funktionen der Variablen x_0, \dots, x_m sind, also

$$w_k = w_k(x_0, \dots, x_m) .$$

Man merke sich wohl, daß die Variablen der e - und der ϵ -Funktionen aus dem e -Raum stammen und die Abbildung also nur in einer Richtung definiert ist. Die wesentlichen Funktionen werden daher die ϵ -Funktionen sein. Im ϵ -Raum definieren wir die neuen Einheiten wie folgt :

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \epsilon_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

so daß also für ϵ_h in der ersten Kolonne und in der $(h+1)$ -ten Zeile eine 1 steht, sonst aber hat die Matrix lauter Nullen. Daher ergeben sich folgende Rechenvorschriften

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_0^2 = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_h^2 = \mathbf{0} \\ \varepsilon_h \varepsilon_0 = \varepsilon_h \\ \varepsilon_0 \varepsilon_h = \mathbf{0} \\ \varepsilon_h \varepsilon_k = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n-1) .$$

Wir haben also keine Cliffordschen Zahlen mehr. $\mathbf{0}$ bedeutet die Nullmatrix. Außer $\varepsilon_h \varepsilon_0 = \varepsilon_h$ ist das Produkt zweier Einheiten immer Null.

Nun legen wir uns eine Multiplikationstafel für $e \varepsilon$ an. Die Produkte berechnen wir, indem wir auch für die e in die Matrizendarstellung zurückkehren. So wird

$$e_h \varepsilon_k = \begin{pmatrix} c_{00}^h & \dots & c_{0k}^h & \dots & c_{0n-1}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-10}^h & \dots & c_{n-1k}^h & \dots & c_{n-1n-1}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0k}^h & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1k}^h & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1k}^h & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_{ik}^h \varepsilon_i .$$

Hiermit ist die *Multiplikationstafel* gegeben.

	ε_0	ε_k
e_0	$\sum_{i=0}^{n-1} c_{i0}^0 \varepsilon_i$	$\sum_{i=0}^{n-1} c_{ik}^0 \varepsilon_i$
\dots	\dots	\dots
e_h	$\sum_{i=0}^{n-1} c_{i0}^h \varepsilon_i$	$\sum_{i=0}^{n-1} c_{ik}^h \varepsilon_i$
\dots	\dots	\dots

Aus dieser Tafel ersehen wir, daß wir im ε -Raum bleiben, wenn wir eine ε -Funktion von links mit einer e -Funktion multiplizieren. Mit anderen Worten, der ε -Raum ist invariant gegenüber e -Multiplikationen von links. Diese Eigenschaft wird funktionentheoretisch von Bedeutung sein.

5. Operationen. Klassifizierung der ε - und e -Funktionen

Zur Abkürzung führen wir die folgenden Operatoren ein.

$$\begin{aligned} \overset{s}{O} &= \sum_{h=0}^{s-1} e_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega e_m & (s = m \text{ oder } m+1) . \\ \overline{\overset{s}{O}} &= \sum_{h=0}^{s-1} \bar{e}_h \frac{\partial}{\partial x_h} + \omega \bar{e}_m \end{aligned}$$

Die Operatoren $\overset{m}{O}$ und $\overset{\bar{m}}{O}$ sind den Linearsystemen \mathbf{L}_0 und \mathbf{M}_0 nachgebildet. \bar{O} heißt der zu O konjugierte Operator. In dieser Schreibweise wird auch

$$n(O) = \sum_{h=0}^{m-1} \kappa_h \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} + \kappa_m \omega^2 .$$

Denken wir uns die Komponenten w_h von \mathbf{w} (siehe S. 300) und die Komponenten g_h von \mathbf{g}_0 zu ε -Funktionen zusammengefaßt

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{h=0}^{n-1} \varepsilon_h w_h , \\ g(z) &= \sum_{h=0}^{n-1} \varepsilon_h g_h , \end{aligned}$$

so ist vermöge der Konstruktion der Einheiten im ε -Raum die folgende Gleichung erfüllt

$$\overset{m}{O} w(z) = g(z) .$$

Die reellen Bedingungsgleichungen stellen gerade das Differentialgleichungssystem dar

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{w} = \mathbf{g}_0 .$$

Hieraus gewinnen wir eine wichtige Erkenntnis. Die Komponenten der ε -Funktion $w(z)$ sind nämlich Lösungen des Systems von partiellen Differentialgleichungen $\mathbf{L}_0 \mathbf{w} = \mathbf{g}_0$, und somit sind auch die Lösungen von

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

bekannt. Ist das Rand- bzw. Anfangswertproblem für die hyperkomplexen Funktionen gelöst, das heißt ist der zweite Integralsatz bekannt, so ist auch das vorgelegte System von Differentialgleichungen gelöst. Daher ergibt sich der wichtige

Satz : *Die Existenz eines Multiplikators ersten Grades ist notwendig, damit ein System von partiellen Differentialgleichungen mittels (der heute bekannten) hyperkomplexen Funktionen gelöst werden kann.* Ein linearer Multiplikator aber existiert, falls die Bedingungen I und II (Seite 299) erfüllt sind.

Unsere Erkenntnisse und die folgenden Entwicklungen geben Anlaß zur Aufstellung einiger

Definitionen: I. Eine ε -Funktion $w(z)$ heißt in einem Punkte z *linksanalytisch*, falls

$$\overset{m}{O} w(z) = 0 ,$$

und durch g gestört *linksanalytisch*, falls

$$\overset{m}{O} w(z) = g \quad \left(g = \sum_{h=0}^{n-1} \varepsilon_h g_h \right)$$

ist. Dieselbe Definition gilt auch für ein Gebiet respektive für einen Bereich, falls $w(z)$ dort überall regulär ist.

II. Eine der obigen äquivalente Definition heißt: Eine ε -Funktion $w(z)$ heißt in einem Punkt z durch g gestört linksanalytisch, falls

$$\overset{m+1}{O} w(z) = g(z)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\frac{\partial w}{\partial x_m} \equiv \frac{\partial g}{\partial x_m} \equiv 0 .$$

Diese Definition kann auch auf ein Gebiet ausgedehnt werden.

III. Für die e -Funktionen bilden wir in Anlehnung an die Theorie der Differentialgleichungen den zu $\overset{m+1}{O}$ adjungierten Operator

$$\overset{m+1}{O}^* = \sum_{h=0}^m e_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega e_m .$$

Entsprechend heißt

$$\overline{\overset{m+1}{O}^*} = \sum_{h=0}^m \bar{e}_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega \bar{e}_m$$

konjugiert-adjungierter Operator. Man beachte, daß im Gegensatz zu $n(\overset{m}{O})$ die Norm jetzt

$$n(\overset{m+1}{O}^*) = \sum_{h=0}^m \kappa_h \frac{\partial}{\partial x_h^2} - 2 \kappa_m \omega \frac{\partial}{\partial x_m} + \kappa_m \omega^2$$

lautet.

IV. Die e -Funktion

$$v(z) = \sum_{h=0}^m e_h v_h$$

mit

$$z = \sum_{h=0}^m e_h x_h$$

heißt in einem Gebiete *adjungiert analytisch*, wenn in jedem Punkt des Gebietes gilt

$$\overline{O^*} v = 0 .$$

Corollar: Nach Seite 305 folgt aus $zv = 0$ auch $vz = 0$, deshalb (symbolisch) gilt :

$$\overline{O^*} v = (\overline{v} \overline{O^*}) = \sum_{h=0}^m v^{(h)} e_h - \omega v e_m = 0 .$$

Man beachte, daß unsere bisherigen Ausführungen gültig sind für Systeme vom elliptischen, hyperbolischen und ultrahyperbolischen Typus. Eine verschiedene Behandlung ist erst bei der Aufstellung des zweiten Integralsatzes notwendig. Da es ein Ziel dieser Arbeit ist, spezielle hyperbolische Systeme zu integrieren, ziehen wir es vor, jetzt schon den Wert der κ_i festzulegen. Es gelte von nun an immer, falls nichts anderes bemerkt wird

$$\kappa_0 = 1, \quad \kappa_h = -1 \quad (h = 1, 2, \dots, m) .$$

Es liegt in der Natur der verwendeten Lösungsmethode, daß alle $\kappa_h = -1$ sein müssen außer κ_0 .

V. Das skalare Potential der *e*-Funktionen.

Satz: Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiet des *e*-Raumes adjungiert-analytische *e*-Funktion läßt sich darstellen in der Form

$$v(z) = \overline{\overline{O^*} \Phi(z)} ,$$

wo Φ eine skalare Lösungsfunktion (das „skalare Potential“) der skalaren Gleichung

$$n(\overline{O^*}) \Phi = \sum_{h=0}^m \kappa_h \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \Phi - 2 \kappa_m \omega \frac{\partial}{\partial x_m} \Phi + \kappa_m \omega^2 \Phi = 0$$

darstellt. Ist umgekehrt Φ eine Lösung dieser Differentialgleichung, so stellt $v = \overline{O^*} \Phi$ eine adjungiert-analytische *e*-Funktion dar.

Die Umkehrung ist wegen der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes selbstverständlich, denn es ist

$$(\overline{O^*} \overline{O^*}) \Phi = \overline{O^*} (\overline{O^*} \Phi) = 0 .$$

Dieser Satz wird bei der Konstruktion der integrierenden e -Funktion eine entscheidende Rolle spielen.

Für den Beweis des ersten Teils des Satzes schreiben wir die Regularitätsbedingungen für $O^{*} v = 0$ im Reellen an. Es ist

$$\begin{aligned}
 O^{*} v &= \sum_{h,k=0}^m e_h e_k \frac{\partial v_k}{\partial x_h} - \omega e_m e_k \sum_{k=0}^m v_k = 0 \\
 \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \sum_{h=1}^m \frac{\partial v_h}{\partial x_h} - \omega v_m &= 0 \\
 \frac{\partial v_0}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_0} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \\
 \frac{\partial v_m}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial x_m} - \omega v_m &= 0 \\
 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} - \frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \omega v_k &= 0 \\
 \frac{\partial v_k}{\partial x_h} - \frac{\partial v_h}{\partial x_k} &= 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, m-1 ; h \neq k) .
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind aber die Komponenten für ein vorgegebenes $v(z)$

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi , \quad v_k = - \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi , \quad v_m = - \frac{\partial}{\partial x_m} \Phi + \omega \Phi . \\
 (k &= 1, 2, \dots, m-1)
 \end{aligned}$$

Diese Werte erfüllen gerade die obenstehenden Existenzbedingungen. Die erste Gleichung liefert $n(O^{*}) \Phi = 0$.

6. Der verallgemeinerte erste Integralsatz

Zur Herleitung des verallgemeinerten ersten Integralsatzes benutzen wir gleichzeitig eine adjungiert-analytische e -Funktion

$$v(z) = \sum_{h=0}^m v_h e_h ,$$

welche also

$$O^{*} v = (v O^{*}) = 0 \quad (\text{symbolisch !})$$

genügt, und eine linksanalytisch gestörte ε -Funktion

$$w = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k w_k ,$$

welche die Bedingung

$$O^m w = g \quad \left(g = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k g_k \right)$$

erfüllt.

Sind beide Funktionen in einem $(m+1)$ -dimensionalen Bereich R^+ und auf dessen Rand H^+ stetig und stetig differenzierbar, so gilt der *Gaußsche Integralsatz*⁷⁾

$$\int_{R^+} \cdots \int \int (v e_k w)^{(k)} dr^+ = - \int_{H^+} \cdots \int v (e_k v_k dh^+) w ,$$

wobei $v_k = \cos(v, e_k)$ die k -te Komponente der nach innen gerichteten Einheitsnormalen auf H^+ darstellt. dr^+ und dh^+ bedeuten die reellen Argumente im euklidischen R^{m+1} respektive auf der reellen Hyperfläche H^+ . Wir setzen

$$dZ^+ = \sum_{k=0}^m e_k v_k dh^+$$

und erhalten

$$\int_{R^+} \cdots \int \int \sum_{k=0}^m (v e_k w)^{(k)} dr^+ = - \int_{H^+} \cdots \int v dZ^+ w .$$

Wir formen nun den Integranden der linken Seite wie folgt um.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (v e_k w)^{(k)} &= \sum_{k=0}^m (v^{(k)} e_k w + v e_k w^{(k)}) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^m v^{(k)} e_k \right) w + v \left(\sum_{k=0}^m e_k w^{(k)} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^m v^{(k)} e_k - v \omega e_m \right) w + v \left(\sum_{k=0}^m e_k w^{(k)} + \omega e_m w \right) \\ &= (v O^*) \cdot w + v (O w) = v \cdot g \end{aligned}$$

(symbolisch!)

Setzen wir den Integranden wieder ein, so erhalten wir den

Verallgemeinerten ersten Integralsatz :

Ist die e -Funktion v im Bereich R^+ (und auf dessen Rand H^+) adjungiert-analytisch, und ist die ε -Funktion w durch g links-analytisch gestört, so gilt

⁷⁾ R. Fueter : Vorlesung 1948/49, S. 305.

$$\int_{H^+} \cdots \int v dZ^+ w + \int_{R^+} \cdots \int \int v dr^+ g = 0$$

Anmerkung: Hätten wir uns, natürlich unter entsprechender Abänderung der Voraussetzungen, der Operatoren $\overset{m}{O}$ respektive $\overset{m}{O}^*$ bedient, so wäre der genau gleiche Satz für die Dimension m entstanden. So kann er für die Lösung des Randwertproblems der elliptischen Systeme verwendet werden (vgl. § 7). Wegen unserer Forderungen an die integrierende Funktion v (§ 8) werden wir aber im Verlauf der Ableitungen gezwungen, in die Dimension $m + 1$ aufzusteigen.

7. Der verallgemeinerte zweite Integralsatz für elliptische Systeme (Randwertproblem elliptischer Systeme)

Das Randwertproblem für inhomogene elliptische Systeme ist leicht zu lösen. Man erhält als Resultat den **zweiten Integralsatz** für inhomogene elliptische Systeme :

Ist die ϵ -Funktion $w(z)$ im Innern einer geschlossenen, orientierbaren und genügend regulären Hyperfläche H und auf H selbst durch g linksanalytisch gestört, dann gilt für jeden Punkt z im Innern von H ⁸⁾

$$w(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2V\pi^m} \left\{ \int_{H^+} \cdots \int \overset{m}{O}_{(\xi)}^* \Phi(|\zeta - z|) dZ w(\zeta) + \right. \\ \left. + \int_{R^+} \cdots \int \int \overset{m}{O}^* \Phi(|\zeta - z|) dr g \right\},$$

wobei Φ die Grundlösung der Gleichung

$$(\Delta + \kappa_m \omega^2) \Phi = 0$$

ist ^{9).}

⁸⁾ Der Index (ξ) fordert Differentiation nach den Variablen ξ_k .

⁹⁾ Man vergleiche die Ausführungen von *Adolf Kriszten: Elliptische Systeme ...*, S. 256 ff., wo auch die Berechnung von Φ für $\kappa_m = +1$ durchgeführt ist.

Für die allgemeine Methode sei auf die zitierte Vorlesung von Herrn Professor *Fueter* hingewiesen (Kap. IV, S. 254 ff.).

8. Die Grundlagen für den zweiten Integralsatz oder das Anfangswertproblem der inhomogenen hyperbolischen Systeme

a) Forderungen an die integrierende Funktion v im elliptischen Fall.

Bei der Lösung der elliptischen Systeme geht man davon aus, die integrierende Funktion v derart zu konstruieren, daß sie die nachfolgenden Forderungen erfüllt:

1. v ist eine adjungiert-analytische Funktion.
2. v ist innerhalb des ganzen Bereiches R mit Ausnahme des Aufpunktes z regulär.
3. v soll im Aufpunkt z singulär werden wie r^{1-m} , wobei r den Radius einer den Aufpunkt z als Zentrum besitzenden infinitesimalen Kugel bedeutet.

Die Methode der elliptischen Systeme läßt sich deshalb nicht ohne weiteres auf den hyperbolischen Fall übertragen, als die Funktion

$$v = \frac{U}{r}$$

nicht mehr adjungiert-analytisch im neuen System sein kann und dadurch die Anwendung des verallgemeinerten ersten Integralsatzes unmöglich würde.

b) Der Satz von Delassus für hyperkomplexe Funktionen.

Deshalb stellen wir uns die Frage: Wie muß die integrierende Funktion v beschaffen sein, damit sie die Gestalt

$$v = \frac{u}{\varrho^{m_0}}$$

erhält, wo ϱ (entsprechend r) eine rein skalare Funktion sein soll¹⁰⁾. Da v adjungiert-analytisch vorausgesetzt ist, haben wir die Bedingungs-gleichung

$$\begin{aligned} O^* v &= \left(\sum_{h=0}^{m+1} e_h \frac{\partial}{\partial x_h} - \omega e_m \right) \frac{u}{\varrho^{m_0}} = \\ &= -m_0 \frac{1}{\varrho^{m_0+1}} \left(\sum_{h=0}^m e_h \frac{\partial \varrho}{\partial x_h} \right) u + \frac{1}{\varrho^{m_0}} \left(\sum_{h=0}^m e_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \omega e_m u \right) = 0 . \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Für den Moment hat m_0 nichts mit der Dimensionszahl m des Variablenraumes zu tun.

Nähert sich nun $\varrho \rightarrow 0$, so werden die beiden Terme von verschiedener Ordnung unendlich, womit eine gegenseitige Kompensation ausgeschlossen ist. Daher müssen die beiden Koeffizienten von $\varrho^{-(m_0+1)}$ und ϱ^{-m_0} einzeln verschwinden. Wir erhalten somit als Bedingung für die skalare Funktion ϱ :

$$\left(\sum_{h=0}^m e_h \frac{\partial \varrho}{\partial x_h} \right) u = 0 , \quad \text{falls } \varrho = 0 .$$

Da sowohl der Term in der Klammer, sowie u für sich allein hyperkomplexe Größen aus dem e -Raum darstellen, kann auch die Norm gebildet werden. Nach elementaren Regeln der hyperkomplexen Algebra wird

$$n \left\{ \left(\sum_{h=0}^m e_h \frac{\partial \varrho}{\partial x_h} \right) u \right\} = \left(\sum_{h=0}^m \varkappa_h \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x_h} \right)^2 \right) n(u) = 0 .$$

Wenn wir u im ganzen endlichen Raum ungleich null annehmen, ist also für die skalare Funktion ϱ eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades gegeben. Die einfachste, nichttriviale Lösung, welche für $\varrho = 0$ die Gleichung erfüllt, ist

$$\varrho = n(\zeta - z) ,$$

das heißt die Norm der Variablen aus der zugehörigen Clifffordschen Algebra. Diese Differentialgleichung kann als Analogon zum Satz von *Delassus* gedeutet werden. Im elliptischen Fall liefert ϱ gerade r^2 .

Über die Funktion u läßt sich nur aussagen, daß sie sicher nicht adjungiert-analytisch sein kann, falls wir $n(\zeta - z)$ als ϱ verwenden. Die allgemeine Form der integrierenden Funktion wird daher zweckmäßig, auf jeden Fall hinreichend lauten

$$v = \frac{e\text{-Funktion}}{n^{m_0}} .$$

Es handelt sich also darum, m_0 und die e -Funktion zu bestimmen.

c) *Die Grundlösung der Gleichung $n(O^*) \Phi = 0$ (Solution élémentaire) und die integrierende Funktion.*

Wir haben in Paragraph 5 bewiesen, daß jede adjungiert-analytische Funktion sich in der Form

$$v = \overline{O^* \Phi}^{m+1}$$

darstellen läßt. Daher kann man auch zur Konstruktion der integrierenden Funktion v für den $(m + 1)$ -dimensionalen Raum die Φ -Potentiale

benützen, deren allgemeinste Form offenbar von folgender Gestalt sein muß :

$$\Phi = \frac{\text{reguläre skalare Funktion}}{n^{m_0}} + \text{reg. Funkt.} \cdot \log n ,$$

wobei n die Norm $n(\zeta - z)$ bedeutet. Wir haben ebenfalls bewiesen, daß $\overline{O^*} \Phi$ wieder adjungiert-analytisch ist. Da es sich in $\overline{O^*}$ um einen Differentialoperator erster Ordnung handelt, wird die Dimension des Ausdrucks nach seiner Anwendung um eins kleiner sein und somit dann den Anforderungen der integrierenden Funktion v entsprechen müssen.

Man ist versucht, die Lösung des zweiten Integralsatzes gerade im m -dimensionalen Variablenraum zu suchen, falls das gegebene System von partiellen Differentialgleichungen m willkürliche Veränderliche aufweist. Dieser Weg ergibt folgendes Resultat : Es existiert ein ganz analoger erster Integralsatz wie in § 6, und die Grundlösungen ergeben die folgende allgemeine Gestalt, welche sich durch eine einfache Rekursionsformel gewinnen lassen. Für ungerades $m = 2p + 1$ wird

$$\Phi = \frac{e^{\sqrt{-\kappa_m \omega^2 n}}}{n^{\frac{m-2}{2}}} \{ 1 + \sqrt{n} \cdot a + \sqrt{n^2} b + \dots + \sqrt{n^{m-2}} \}$$

und für gerades $m = 2p$

$$\Phi = \frac{1}{n^{\frac{m-2}{2}}} \cdot J_0(\sqrt{\kappa_m \omega^2 n}) + \frac{b_m}{a_m} \cdot \frac{m^2}{n^{\frac{m-3}{2}}} \cdot J'_0 \cdot \log n + \text{höhere Potenzen,}$$

wo $J_0(x)$ die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung bedeutet, und a_m, b_m mittels allgemeiner Formeln bestimmbare Konstanten sind. Die zugehörigen integrierenden Funktionen v haben ein ähnliches, aber weit komplizierteres Verhalten. Wenn man auch mit diesen Funktionen in einem dem Nachfolgenden ganz analogen Verfahren zum Ziele gelangt, so müssen doch auch die Ableitungen der gegebenen und der sich auf dem charakteristischen Kegel befindenden Randwerte in Betracht gezogen werden, und zwar in einer ziemlich verwickelten Art. Daher zeigt die Rechnung, daß es nicht anstrengender ist, die Lösung sowohl für gerades wie ungerades m eine Dimension höher zu suchen, ja, es ergibt sich sogar eine elegante Lösung.

Durch die Forderung nämlich, daß sich die integrierende Funktion v in der Form

$$v = \frac{u}{n^{m_0}}$$

darstellen lasse und im Punkt z wie r^{m-1} unendlich werde, wobei r den infinitesimalen Abstand von z bedeute, sind wir gezwungen, eine entsprechende Differentialgleichung für Φ zu suchen, die wir nur durch Aufsteigen in eine höhere Dimension finden können, indem wir einen Dämpfungsfaktor zufügen. Der Grund des Aufsteigens liegt im Satz von Delassus und in der Herleitung des ersten Integralsatzes begründet.

Damit ist auch der Gebrauch des Operators O^* an Stelle von \overline{O}^* motiviert. Wir sehen also rückblickend, daß durch den Satz von Delassus für das Hyperkomplexe und unsere Forderung an die Gestalt der Grundlösung der Gang unserer bisherigen Entwicklungen festgelegt ist. Die einfachste Gleichung für Φ lautet im hyperbolischen Fall

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} + 2\omega \frac{\partial}{\partial x_m} - \omega^2 \right\} \Phi = 0$$

oder, wenn wir der Konstanten ω ihren bisherigen Wert (§ 3) zulegen und für x von nun an ξ als Variable schreiben :

$$n(O^*(\xi)) \Phi = 0 .$$

Hier ist es leicht, eine Lösung mit der geforderten Singularität zu finden, da nach dem Satz von Delassus eine Potenz der Norm im Nenner stehen muß. Durch einen gewöhnlichen Ansatz der Funktionen, wie er bei Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten üblich ist, findet man sofort als Grundlösung

$$\Phi = \frac{1}{1-m} \cdot \frac{e^{\omega(\xi_m - x_m)}}{\left[(\xi_0 - x_0)^2 - \sum_{\nu=1}^m (\xi_\nu - x_\nu)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}} = - \frac{e^{\omega(\xi_m - x_m)}}{(m-1) \cdot n^{\frac{m-1}{2}}} .$$

Hieraus berechnet sich nun die integrierende Funktion v :

$$v = \overline{O}^* \Phi = \left(\sum_{h=0}^m \bar{e}_h \frac{\partial}{\partial \xi_h} - \omega \bar{e}_m \right) \Phi .$$

Nach einer Zwischenrechnung ergibt sich

$$v = \frac{e^{\omega(\xi_m - x_m)}}{n^{\frac{m+1}{2}}} (\xi - z)^+$$

wobei z als fest, ξ als variabel zu betrachten ist.

Wir haben also für eine gerade und eine ungerade Anzahl unabhängiger Variablen dieselbe integrierende Funktion.

9. Eine der Hadamardschen äquivalenten Lösungsmethode. Der beschränkte und der logarithmische Anteil

Nachdem wir nun die integrierende Funktion v gefunden haben, können wir dennoch nicht über eine geschlossene Hyperfläche integrieren, da die Funktion v auf dem Kegel $n(\zeta - z)$ singulär wird. Wir müssen deshalb diese singulären Stellen umgehen. Es wird sich auch hier zeigen, in Analogie zu der Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, daß durch das gesamte Innere des charakteristischen Kegels, des sogenannten Abhängigkeitsgebietes, die linksanalytische ε -Funktion $w(z)$ eindeutig bestimmbar ist.

Während nun *Hadamard*¹¹⁾ im gesamten Abhängigkeitsgebiet die Konvergenz der Integrale durch Hinzufügen von sogenannten konvergenzerzeugenden Funktionen erzwang, geht die nachfolgende Methode in Anlehnung an die Vorstellung der Reihenentwicklungen vom Begriff des „Koeffizientenvergleichs“ aus. Wie gesagt, sind beide Methoden im Prinzip dieselben, aber die Vorstellung des Koeffizientenvergleichs gibt der ganzen nachfolgenden Rechnung eine große Klarheit.

Wir geben nun zuerst eine allgemeine Beschreibung der Methode und anschließend folgt in § 10 die explizite Durchführung der Rechnung. Zum vornherein nehmen wir an, daß die gesuchte ε -Funktion überall, wo sie auftritt, gestört linksanalytisch und regulär ist. Für alle unter einem Integralzeichen auftretenden Funktionen verlangen wir die Existenz der $\left[\frac{m+2}{2}\right]$ ersten Ableitungen nach allen Variablen. Von der Notwendigkeit dieser Forderung wird man bald überzeugt sein.

Nun denken wir uns den charakteristischen Kegel durch den Aufpunkt z gelegt. Eine raumartige Hyperfläche H (d. i. eine solche, die nirgends charakteristisch wird) und auf der die regulären Anfangswerte der linksanalytisch gestörten ε -Funktion vorgegeben sind, schneidet aus dem Kegel eine Grundfläche G heraus. Somit ist ein abgeschlossener Bereich R definiert. Durch eine Hyperebene senkrecht zur 0-Achse schneiden wir die Spitze des charakteristischen Kegels im Abstand ϱ von z ab, so daß ein Bereich R_ϱ entsteht, welcher durch die Deckfläche D_ϱ begrenzt wird. Den Mantel M des Kegels verändern wir nach innen stetig als Funktion eines Parameters η derart, daß mit $\eta \rightarrow 0$ die neue Mantelfläche M_η in M übergeht. Die Mantelfläche M_η schneidet aus der Deckfläche das Stück $D_{\varrho\eta}$ und aus der Grundfläche den Bereich G_η heraus, während

¹¹⁾ *J. Hadamard*: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris 1932. Man vergleiche ferner *Courant-Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik, Band II, Springer, Berlin 1937.

durch die Deckfläche D_{ϱ_η} , die Mantelfläche M_{ϱ_η} entsteht (vgl. die Figur). Diese drei Hyperflächen begrenzen nun den Bereich R_{ϱ_η} , welcher seinerseits R beliebig genau approximiert. Auf diesen Bereich R_{ϱ_η} dürfen wir den verallgemeinerten ersten Integralsatz anwenden:

$$\int \cdots \int_{(G_\eta + M_{\varrho_\eta} + D_{\varrho_\eta})} v \, dZ \, w + \int \cdots \int_{R_{\varrho_\eta}} v \, dr \, g = 0 \quad .$$

Diese Integrale werden nun nach den erlaubten Gesetzen der Differential- und Integralrechnung sowie der hyperkomplexen Algebren ausgewertet. Man ersieht sofort, daß unsere Beschreibung sehr stark verallgemeinerungsfähig ist. Die integrierende Funktion v ist nun so konstruiert worden, daß im Falle einer ungeraden Dimensionszahl des Variablenraumes ($m = 2p + 1$) jedes ausgewertete Integral die folgende Form annimmt

$$J = \frac{1}{\eta^{\frac{m-2}{2}}} \cdot \left\{ f_{m-2} + \eta \cdot f_{m-4} + \cdots + \eta^{\frac{m-3}{2}} f_1 \right\} + f_0 + O \cdot \eta \quad ,$$

wobei $O \cdot \eta$ eine Funktion bedeutet, die mindestens wie $\sqrt{\eta}$ gegen Null geht für $\eta \rightarrow 0$, und die Funktionen f_k von η unabhängig sind. Da in unserm Falle die Summe der vier Integrale identisch verschwindet

$$\int_{G_\eta} + \int_{M_{\varrho_\eta}} + \int_{D_{\varrho_\eta}} + \int_{R_{\varrho_\eta}} = 0 \quad ,$$

und das η bei festem ϱ beliebig variiert werden darf, so folgt also auch notwendig für jeden einzelnen Koeffizienten derselben η -Potenz

$$f = 0 \quad .$$

Jede solche Koeffizientensumme wird also eine Bedingungsgleichung für $w(\zeta)$ sein und zu seiner Bestimmung genügen, indem man den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ macht. Wir wählen nun speziell f_0 und schreiben

$$f_0 = \sqrt{J} \quad .$$

f_0 heiße der *beschränkte Anteil* und stimmt also mit der „partie finie“ von Hadamard überein. Wir wählen deshalb f_0 zur Berechnung von $w(z)$, weil der beschränkte Anteil invariant ist gegenüber allen Transformationen von η in η^* , welche so beschaffen sind, daß η^* wie η gegen Null geht. Man erkennt dies sofort, wenn man beachtet, daß durch den Faktor $\eta^{-\frac{m-2}{2}}$ keine Glieder aus der geschweiften Klammer entstehen können, die endlich bleiben, aber doch von Null verschieden sind.

Wesentlich anders sieht es im Raum von $m = 2p$ unabhängigen Variablen aus. Ordnen wir hier nach steigenden Potenzen, so lautet ein ausgewertetes Integral

$$J = -\frac{1}{\eta^{\frac{m-2}{2}}} \left\{ f_{m-2} + \eta \cdot f_{m-4} + \cdots + \eta^{\frac{m-2}{2}} f_0 \right\} + f_L \cdot \log \eta + O\eta .$$

Hier bleibt der Koeffizient f_0 nicht mehr gegenüber jeder der oben beschriebenen Transformationen invariant; hingegen besitzt der von η unabhängige Koeffizient f_L diese Eigenschaft, was man schon an der besonderen Singularität von $\log \eta$ für $\eta \rightarrow 0$ erkennt. Substituieren wir also $\eta = \eta^* \varphi$, wo φ eine reguläre Funktion von η^* bedeutet, so wird

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} f_L \log \eta = \lim_{\eta \rightarrow 0} f_L (\log \eta^* + \log \varphi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} f_L \log \eta + \text{endlicher Wert.}$$

Deshalb schreiben wir im Gegensatz zum beschränkten Anteil

$$f_L = \underline{J} .$$

und nennen f_L den *logarithmischen Anteil* des Integrals. Im übrigen bleibt alles wie oben.

10. Der zweite Integralsatz für inhomogene einfache hyperbolische Systeme

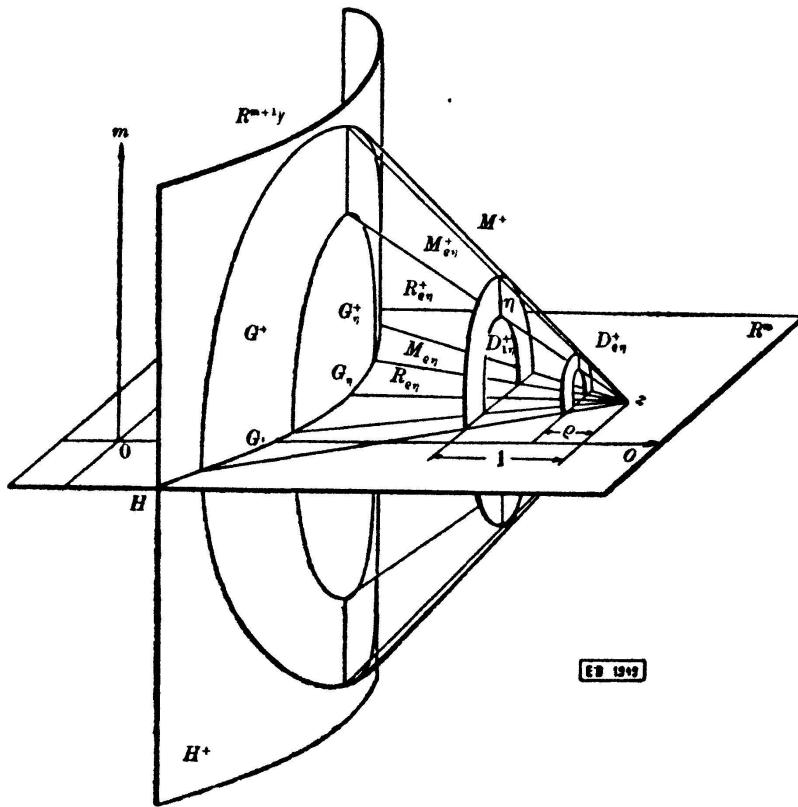
- a) *Das Rand- bzw. Anfangswertproblem für ein System, das ursprünglich eine gerade Anzahl unabhängige Variablen besitzt.*

Wie wir gesehen haben, ist die zugehörige integrierende Funktion v von $m + 1$ Variablen abhängig. Hat also unser Gleichungssystem eine gerade Anzahl von freien Variablen, so müssen wir die Lösung in einem ungeradedimensionierten Variablenraum suchen. Wir befinden uns somit im Fall $m + 1 = 2p + 1$. Nun wollen wir im Aufpunkt

$$z = \sum_{h=0}^{m-1} e_h x_h$$

den Wert der durch g linksanalytisch gestörten ε -Funktion $w(z)$ bestimmen, wenn deren Anfangswerte auf der überall raumartigen Hyperfläche H vorgegeben sind (vgl. die Figur). Dazu konstruieren wir uns folgendes Integrationsgebiet.

Wir gehen von der raumartigen Hyperfläche H , also einer $(m - 1)$ -dimensionalen Fläche im R^m aus. In diesem R^m liegt natürlich auch der Aufpunkt z . Senkrecht zu allen Achsen $0, 1, \dots, m - 1$ errichten wir noch die Koordinatenachse m . Nun ziehen wir in jedem Punkt von H



eine Parallele zur m -Achse, wodurch H zu einer m -dimensionalen Hyperfläche H^+ erweitert wird und natürlich wieder regulär und raumartig ist. Auf jeder solchen Geraden seien die Werte w von x_m unabhängig, so daß also $\frac{\partial w}{\partial x_m} \equiv 0$ erfüllt ist. Aus dem bisherigen charakteristischen Kegel Γ_0 mit der Spitze in z entsteht auf ähnliche Art ein Kegel $\Gamma_0^+ = n(\zeta - z)^+$ mit derselben Spitze $z^+ = z$, und entsprechend werden aus G die erweiterte Grundfläche G^+ , aus M der m -dimensionale Mantel M^+ , aus D wird D^+ usw. Der charakteristische Hyperkegel besitzt nun die Gleichung¹²⁾

$$n(\zeta - z) = (\xi_0 - x_0)^2 - \sum_{\nu=1}^{m-1} (\xi_\nu - x_\nu)^2 - \xi_m^2 = 0 ,$$

da für den Aufpunkt z die Komponente $x_m = 0$ ist.

¹²⁾ Wo eine Verwechslung der Dimensionen ausgeschlossen ist, lassen wir das Zeichen + weg.

Als Näherungsgebiet $R_{\varrho\eta}^+$ wählen wir, wie in § 9 geschildert wurde, folgenden Kegelstumpf :

$$(1 - \eta)^2 (\xi_0 - x_0)^2 - \sum_{\nu=1}^{m-1} (\xi_\nu - x_\nu)^2 - \xi_m^2 > 0 .$$

$$\xi_0 = x_0 - \varrho$$

$$0 \leq \eta \leq 1$$

Die Deckfläche ist die Kugel

$$D_{\varrho\eta} : \sum_{\nu=1}^{m-1} (\xi_\nu - x_\nu)^2 + \xi_m^2 = (1 - \eta)^2 \varrho^2 ,$$

da der Öffnungswinkel des charakteristischen Kegels $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Die Formel für den Mantel lautet :

$$M_{\varrho\eta} : \begin{cases} (1 - \eta)^2 (\xi_0 - x_0)^2 - \sum_{\nu=1}^{m-1} (\xi_\nu - x_\nu)^2 - \xi_m^2 = 0 \\ \xi_0 \leq x_0 - \varrho \end{cases} .$$

Die Funktion w sei im ganzen Bereich R^+ (inklusive Rand !) als regulär vorausgesetzt, was offenbar immer zutrifft, falls die Bedingung schon für R erfüllt ist.

Nach den in § 9 ausgeführten Überlegungen ist also

$$\overline{\int_{R_{\varrho\eta}^+} \cdots \int \int v \, dr \, g} + \overline{\int_{G_\eta^+} \cdots \int v \, dZ \, w} + \overline{\int_{M_{\varrho\eta}^+} \cdots \int v \, dZ \, w} + \overline{\int_{D_{\eta\varrho}^+} \cdots \int v \, dZ \, w} = 0 ,$$

da es sich um eine ungerade Dimensionenzahl handelt. Zur bequemen Rechnung führen wir die dem vorliegenden Problem angepaßten *Kegelkoordinaten* ein

$$\begin{cases} \xi_0 - x_0 = -\varrho \\ \xi_\nu - x_\nu = \varrho(1 - \eta) \alpha_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, m) \end{cases} ,$$

wo

$$\begin{aligned} \varrho &> 0 , & 0 \leq \eta \leq 1 , & x_m \equiv 0 \\ -1 &\leq \alpha_\nu = +1 , & \sum \alpha_\nu^2 = 1 . \end{aligned}$$

Hierin bedeuten :

ϱ : Abstand der Schnittkugel D_ϱ vom Aufpunkt z

α_ν : Richtungskosinusse in der $(m - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche
 $\varrho = \text{const.}$

$1 - \eta$: Proportionalitätsfaktor.

Ist $\eta = 0$, so liegen alle Punkte auf dem Mantel $M = n(\zeta - z) = 0$.
In den Kegelkoordinaten wird

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta - z &= -\varrho \left\{ e_0 - (1 - \eta) \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu e_\nu \right\} \\ n(\zeta - z) &= \eta(2 - \eta) \varrho^2\end{aligned}}$$

I. Um das Integral über R^+ auszurechnen, müssen wir dr^+ kennen.
Nach elementaren Umformungen wird die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial(\varrho, \eta, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})} = \varrho^m (1 - \eta)^{m-1} \frac{1}{\alpha_m} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m^2 \\ 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{m-1} \end{vmatrix}$$

mit

$$\alpha_m = \sqrt{1 - \sum \alpha_\nu^2}.$$

Daher ist

$$dx_0 dx_1 \dots dx_m = \varrho^m (1 - \eta)^{m-1} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{m-1} d\varrho d\eta}{\alpha_m}$$

oder

$$\boxed{dr^+ = \varrho^m (1 - \eta)^{m-1} d\omega d\varrho d\eta}$$

wo ω die Oberfläche der m -dimensionalen Einheitskugel bedeutet.

Setzen wir für v den errechneten Wert ein, indem wir ebenfalls die Koordinaten ϱ , η , α_ν einführen, so wird

$$v = \frac{e^{\omega \varrho (\xi_m - x_m)}}{\frac{m+1}{n^2}} (\zeta - z) = - \frac{e^{\omega \varrho (1-\eta)\alpha_m} (e_0 - (1-\eta) \sum \alpha_\nu e_\nu) \varrho}{(\eta(2-\eta) \cdot \varrho^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Damit erhalten wir nun, wenn wir im Integranden entsprechend kürzen und ordnen:

$$\begin{aligned}& \int_{R^+} \dots \int \int v dr g = \\&= - \int_{\eta(\varrho)(\omega)}^1 \int_{(\varrho)} \int \frac{e^{\omega \varrho (1-\eta)\alpha_m} (e_0 - (1-\eta) \sum \alpha_\nu e_\nu) \varrho}{(\eta(2-\eta) \cdot \varrho^2)^{\frac{m+1}{2}}} \cdot \varrho^m (1-\eta)^{m-1} g d\eta d\varrho d\omega \\&= - \int_{\eta(\varrho)(\omega)}^1 \int_{(\varrho)} \int \frac{e^{\omega \varrho (1-\eta)\alpha_m} (1-\eta)^{m-1}}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} g d\eta d\varrho d\omega \\&+ \int_{\eta(\varrho)(\omega)}^1 \int_{(\varrho)} \int \frac{e^{\omega \varrho (1-\eta)\alpha_m} (1-\eta)^m}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu e_\nu g d\eta d\varrho d\omega = -I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Nun entwickeln wir jeden einzelnen Faktor des Integranden nach η

$$\frac{1}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{1}{(2\eta)^{\frac{m+1}{2}}} \left\{ \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \left(-\frac{m+1}{2} \right) \binom{m}{r} \left(-\frac{\eta}{2} \right)^r + \eta^{\frac{m+2}{2}} R_1 \right\} = \mathfrak{P}_1$$

$$(1-\eta)^{m-1} = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \eta^s = \mathfrak{P}_2$$

$$(1-\eta)^m = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} \eta^s = \mathfrak{P}'_2$$

$$e^{\omega \varrho (1-\eta) \alpha_m} = e^{\omega \varrho \alpha_m} \sum_{t=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-\omega \varrho \alpha_m)^t}{t!} \cdot \eta^t + \eta^{\frac{m+2}{2}} R_3 = \mathfrak{P}_3$$

$$g(\zeta) = g(\eta, \varrho, \alpha_\nu) = g(\eta) = \sum_{p=0}^{\frac{m}{2}} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0) \cdot \eta^p + \eta^{\frac{m+2}{2}} R_4 = \mathfrak{P}_4$$

Das Symbol $g(0)$ bedeutet die Randwerte von $g(\eta, \varrho, \alpha_\nu)$ für $\eta = 0$. Hier und im folgenden sind die R_i stets bestimmbar Restmitglieder¹³⁾.

Der Integrand von I_1 ist nun selbstverständlich bis auf den Faktor

$\eta^{\frac{m+1}{2}}$:

$$\eta^{\frac{m+1}{2}} \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{P}_4 =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}} e^{\omega \varrho \alpha_m} \sum_{\substack{0 \leq r, s, t, p \leq \frac{m}{2} \\ 0 \leq r+s+t+p \leq \frac{m}{2}}} \frac{(-1)^{r+s+t} (\omega \varrho \alpha_m)^t}{2^r \cdot p! t!} \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0) \cdot \eta^{r+s+t+p} + \eta^{\frac{m+2}{2}} \cdot R_5 .$$

¹³⁾ Man wählt für eine beliebige Funktion $F(\eta)$ zweckmäßig als Restglied

$$\eta^{\frac{m+1}{2}} R_F = \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)!} \int_0^\eta y^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(\frac{m+2}{2}\right) (\eta - y) dy .$$

Natürlich darf man bei abbrechenden, semikonvergenten und konvergenten Reihen die Entwicklung entsprechend weiter ausdehnen, wie wir es zum Beispiel für \mathfrak{P}_2 gemacht haben.

Fassen wir die Terme, welche dieselbe Potenz von η besitzen, zusammen, so ergibt sich

$$\eta^{\frac{m+1}{2}} \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{P}_4 = \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} C_q \eta^q + \eta^{\frac{m+2}{2}} \cdot R_5 ,$$

wobei der Koeffizient

$$C_q = \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}} e^{\omega \varrho \alpha_m} \sum_{r+s+t+p=q} \frac{(-1)^{r+s+t} (\omega \varrho \alpha_m)^t}{2^r p! t!} \binom{-\frac{m+1}{2}}{r} \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0)$$

zu setzen und von η unabhängig ist. In R_5 sind selbstverständlich die vorhergehenden Restglieder alle mitenthalten. Jetzt sind wir in der Lage, das Integral I_1 auszuwerten. Es ist

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \int_{\eta}^1 \eta^{q-\frac{m+1}{2}} d\eta \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} C_q d\varrho d\omega + \int_{\eta}^1 \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \eta^{\frac{1}{2}} \cdot R_5(\eta) d\eta d\varrho d\omega = \\ &= \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{\eta^{q-\frac{m-1}{2}}}{q - \frac{m-1}{2}} \right]_{\eta}^1 \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} C_q d\varrho d\omega + \int_{\eta}^1 \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \eta^{\frac{1}{2}} R_5 d\eta d\varrho d\omega . \end{aligned}$$

Nun lassen wir η gegen Null streben. Bilden wir dann den beschränkten Anteil, so müssen alle Glieder, die gegen Unendlich streben, weggelassen werden¹⁴⁾. Da nun das Integral mit dem Restglied ein eigentliches ist, so haben wir

$$\overline{I_1} = \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \frac{2}{2q-m+1} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} C_q d\varrho d\omega + \int_{\eta=0}^1 \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \eta^{\frac{1}{2}} R_5(\eta, \varrho, \omega) d\eta d\varrho d\omega .$$

C_q und R_i sind wegen unserer Voraussetzungen reguläre Funktionen ; und es gibt daher keine andern Singularitäten mehr.

Nun haben wir den beschränkten Anteil von I_2 zu berechnen. Prinzipiell ändert nichts. An Stelle von \mathfrak{P}_2 tritt \mathfrak{P}'_2 und g wird durch $\sum_{v=1}^m \alpha_v e_v g(\eta)$ ersetzt. Daher lautet der Integrand von I_2

$$\eta^{-\frac{m+1}{2}} \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} D_q \eta^q + \eta^{\frac{1}{2}} \cdot R_6 ,$$

wobei der Koeffizient

¹⁴⁾ Für das praktische Vorgehen beachte man folgendes: Alle gebrochenen Potenzen von η werden entweder null oder unendlich und können gesamthaft weggelassen werden.

$$D_q = \frac{e^{\omega \varrho \alpha_m}}{2^{\frac{m+1}{2}}} \sum_{r+s+t+p=q} \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu e_\nu \cdot \frac{(-1)^{r+s+t} (\omega \varrho \alpha_m)^t}{2^r p! t!} \binom{-\frac{m+1}{2}}{r} \binom{m}{s} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0)$$

zu setzen ist, und $g(0)$ wiederum die Randwerte auf dem charakteristischen Kegel bedeuten. Analog wie vorher ist der beschränkte Anteil des Integrals von I_2

$$\boxed{I_2} = \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \frac{2}{2q-m+1} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} D_q d\varrho d\omega + \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \eta^{\frac{1}{2}} \cdot R_6(\eta, \varrho, \alpha_\nu) d\eta d\varrho d\omega .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \boxed{\int_{R^+} \cdots \int \int v dr g} = \\ & = \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \frac{2}{2q-m+1} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} (D_q - C_q) d\varrho d\omega + \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \eta^{\frac{1}{2}} \cdot (R_6 - R_5) d\eta d\varrho d\omega . \end{aligned}$$

II. Nach demselben Muster (oder analog den nachfolgenden Berechnungen) wird der beschränkte Anteil über die Grundfläche bestimmt, nämlich

$$\boxed{\int_{G^+} \cdots \int v dZ w} .$$

Mit unseren Voraussetzungen wird dies immer möglich sein. Ist G^+ (bzw. H^+) insbesondere $\varrho = \text{const.}$, das heißt eine Ebene senkrecht zur 0-Achse, so können die Resultate von IV. weiter verwendet werden.

III. Nun berechnen wir den beschränkten Anteil der Mantelfläche. Es ist

$$\int_{M_{\varrho \eta}^+} \cdots \int v dZ w = \int_{M_{\varrho \eta}^+} \cdots \int \frac{1}{\eta^{\frac{m+1}{2}}} \cdot \text{reg. Funktion } dr .$$

Da nur gebrochene Potenzen von η auftreten können, und η während der Integration über den Mantel konstant ist, so folgt für den Limes $\eta \rightarrow 0$

$$\boxed{\int_{M^+} \cdots \int v dZ w = 0} .$$

IV. Damit kommen wir zum letzten Integral. Es ist über die Deckfläche $D_{\epsilon\eta}^+$ erstreckt. Zuerst rechnen wir uns das Integrationselement aus. Da D^+ senkrecht zur 0-Achse steht, erhält man

$$dZ = \sum e_h v_h dh = -e_0 dh = -e_0 \varrho^m (1-\eta)^{m-1} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_m d\eta}{\alpha_m},$$

was sich direkt aus dem Volumelement (Seite 323) herleiten läßt. Weil jetzt auch ϱ sehr klein wird, können wir die ϵ -Funktion w um den Aufpunkt z nach ϱ entwickeln

$$w(\varrho) = w(z) + \varrho \left[\frac{\partial w}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=0} + \dots.$$

Desgleichen wird

$$e^{\omega \varrho (1-\eta) \alpha_m} = 1 + \varrho \cdot \omega (1-\eta) \alpha_m + \dots.$$

Setzen wir ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{D^+} v dZ w = \\ &= \left\{ - \int \dots \int \frac{1 \cdot (e_0 - (1-\eta) \sum \alpha_\nu e_\nu)}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} (1-\eta)^{m-1} \frac{1}{\alpha_m} d\alpha_1 \dots d\alpha_m d\eta \right\} w(z) + O\varrho. \end{aligned}$$

Wir haben also einen Term, der von ϱ unabhängig und zugleich Koeffizient von $w(z)$ ist

$$- \int \dots \int \frac{(1-\eta)^{m-1}}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} d\eta d\omega + \int_{\eta}^1 \frac{(1-\eta)^m d\eta}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} \sum e_\nu \int_{(\omega)} \alpha_\nu d\omega .$$

Jedes α_ν ist eine ungerade Funktion, so daß das Integral über die Einheitskugel verschwindet. Daher bleibt nur das erste Integral übrig, welches ebenfalls sofort über die Einheitskugel integriert werden kann und folgenden Wert besitzt:

$$- \frac{2V\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{\eta}^1 \frac{(1-\eta)^{m-1}}{(\eta(2-\eta))^{\frac{m+1}{2}}} d\eta .$$

Zur Auswertung substituieren wir η durch $1-\varepsilon$ und erhalten

$$- \frac{V\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot 2 \int_0^{1-\eta} \frac{\varepsilon^{m-1}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{m+1}{2}}} d\varepsilon .$$

Dies ist ein Eulersches Integral zweiter Art, sobald $\eta = 0$ ist; und das Resultat ist die B -Funktion. Bleibt diese endlich, so haben wir gerade den beschränkten Anteil. Zur Berechnung gehen wir von einer Standardfunktion aus¹⁵⁾

$$2 \cdot \int_0^1 \varepsilon^{2x+1} (1 - \varepsilon^2)^y d\varepsilon = \frac{\Pi(x) \Pi(y)}{\Pi(x + y + 1)} = B(x, y) .$$

Es ergibt sich

$$x = \frac{m}{2} - 1 , \quad y = -\frac{m+1}{2} , \quad \text{und} \quad x + y + 1 = -\frac{1}{2} .$$

Somit lautet der Koeffizient von $w(z)$

$$-\frac{V_{\pi}^{-m}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{m}{2} - 1\right) \Pi\left(-\frac{m+1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)} = -V_{\pi}^{-m} \cdot \frac{\Pi\left(-\frac{m+1}{2}\right)}{V_{\pi}} .$$

Da m gerade ist, bleibt der Ausdruck endlich. Damit ist $w(z)$ bestimmt.

$$w(z) = \frac{1}{V_{\pi}^{m-1} \Gamma\left(-\frac{m-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{q=0}^{\frac{m}{2}} \frac{2}{2q - (m-1)} \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} (D_q - C_q) d\varrho d\omega + \right. \\ \left. + \int_{R^+} \cdots \int \int \eta^{\frac{1}{2}} (R_6 - R_5) d\eta d\varrho d\omega + \overline{\int_{\sigma^+} \cdots \int v dZ w} \right\}$$

Die Funktionen D_q , C_q , R_5 , R_6 bestimmt man nach Seite 325 f. Wünscht man das Resultat nicht in Kegelkoordinaten, so hat man nur die folgenden Substitutionen vorzunehmen:

$$\begin{aligned} \varrho &= x_0 - \xi_0 \\ \eta &= 1 - \sqrt{\sum_{\nu=1}^m \left(\frac{x_\nu - \xi_\nu}{x_0 - \xi_0} \right)^2} \\ \alpha_\nu &= \pm \frac{x_\nu - \xi_\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^m (x_\nu - \xi_\nu)^2}} . \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminanten sind reziprok zu den von uns berechneten.

¹⁵⁾ Erwin Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl. 1936, Springer, Berlin, S. 13.

Es ist klar, daß $w(z)$ von den ξ_m unabhängig ist. Theoretisch ist es möglich, jetzt schon nach den ξ_m zu integrieren. Wir verzichten hier jedoch darauf, da man ganz analog verfahren kann, wie es Herr Kriszten¹⁶⁾ in seiner Dissertation gemacht hat. Selbstverständlich wird die Darstellung dann viel komplizierter, insbesondere der Ausdruck, der sich auf das Innere des charakteristischen Kegels bezieht. Anderseits aber ist die Entwicklung nach der Variablen η der Kegelkoordinaten derart einfach, daß man damit wohl rasch zum Ziele gelangt.

b) Das Rand- bzw. Anfangswertproblem für ein System, das ursprünglich eine ungerade Anzahl unabhängige Variablen besitzt.

Wir denken uns jetzt $m + 1 = 2p$ Raumdimensionen vorhanden. Alles, was wir zu Beginn des vorigen Abschnittes gesagt haben, kann wörtlich übernommen werden mit dem einzigen Unterschied, daß die Zahl m im folgenden immer als *ungerade* in Erinnerung behalten werden muß, und als Ausgangspunkt der Berechnung von $w(z)$ die Relation gilt :

$$\boxed{\int_{R_{\varrho\eta}^+} \cdots \int \int v dr g} + \boxed{\int_{G_{\eta}^+} \cdots \int v dZ w} + \boxed{\int_{M_{\varrho\eta}^+} \cdots \int v dZ w} + \boxed{\int_{D_{\varrho\eta}^+} \cdots \int v dZ w = 0} .$$

Die vier Integrale berechnen wir wieder einzeln.

I. Zur Berechnung des logarithmischen Anteils des Integrals über R^+ können die Resultate von Seite 223 ff. übernommen werden, indem wir aber jetzt die Terme mit η^{-1} betrachten, die nach der Integration den logarithmischen Anteil liefern. Wir werden jetzt summieren von 0 bis $\frac{m-1}{2}$, und das Restglied hat ordnungsmäßig allgemein kein η mehr vorgeklammert. So ergibt sich also für den Integranden von I_1 :

$$\eta^{-\frac{m+1}{2}} \sum_{q=0}^{\frac{m-1}{2}} C_q \eta^q + R_5$$

mit den Koeffizienten

$$C_q = \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}} e^{\omega \varrho \alpha_m} \sum_{r+s+t+p=q} \frac{(-1)^{r+s+t} (\omega \varrho \alpha_m)^t}{2^r p! t!} \left(-\frac{m+1}{2} \right) \binom{m-1}{s} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0) ,$$

¹⁶⁾ Adolf Kriszten : Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen, Comm. Math. Helv. vol. 20, S. 333.

welche von η unabhängig sind. Es ist nun klar, daß nur der Koeffizient von η^{-1} der logarithmische Anteil sein kann. Somit ist

$$\boxed{I_1 = - \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} C_{\frac{m-1}{2}} d\varrho d\omega} .$$

Ganz entsprechend muß natürlich

$$\boxed{I_2 = - \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} D_{\frac{m-1}{2}} d\varrho d\omega}$$

mit

$$D_{\frac{m-1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{m+1}{2}}} e^{\omega \varrho \alpha_m} \sum_{r+s+t+p=\frac{m-1}{2}} \sum_{\nu=1}^m e_\nu \alpha_\nu \frac{(-1)^{r+s+t}}{2^r p! t!} \left(-\frac{m+1}{2} \right) \binom{m}{s} \frac{\partial^p}{\partial \eta^p} g(0)$$

sein. Somit ist

$$\boxed{\int_{R^+} \dots \int \int v dr g = - \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} (D_{\frac{m-1}{2}} - C_{\frac{m-1}{2}}) d\varrho d\omega}$$

das analoge Resultat zu Seite 326.

II. Ebenso wird man das Integral über die Grundfläche behandeln, oder, falls diese die Gleichung $\varrho = \text{const.}$ hat, die Ergebnisse von Nummer IV weiterverwenden.

III. Bei der Behandlung des Mantels überlegen wir uns, daß auch hier eine Entwicklung nach den η möglich ist. Da aber nicht nach η integriert wird, kann kein logarithmischer Anteil entstehen. Es ist folglich

$$\boxed{\int_{M^+} \dots \int v dZ w = 0} .$$

Beim Mantelintegral tritt der Vorteil der entwickelten Methode klar zu Tage. Wären wir nicht aufgestiegen, so hätten wir schon in der integrierenden Funktion¹⁷⁾ einen Logarithmus vorgefunden, der auch auf dem Mantel einen logarithmischen Anteil geliefert hätte. Da die Randwerte auf dem Mantel natürlich nicht bekannt sind, müßte man mit Hilfe der Greenschen Formeln den logarithmischen Anteil in ein Integral über die Grundfläche und das Kegelinnere umzuwandeln suchen; was für eine praktische Berechnung sehr mühsam wäre und die Reinheit der bisher verwendeten Methoden verletzen würde.

¹⁷⁾ Es ist natürlich klar, daß diese Bemerkungen sachgemäß unter a) behandelt werden sollten, da ja dort der ursprüngliche Variablenraum in der Tat gerade ist. Allerdings bestand dort kein Anlaß, darauf einzugehen.

IV. Damit kommen wir zum letzten Integral. Wir können die Ausführungen aus a) übernehmen, müssen aber nach η entwickeln. So ergibt sich

$$\begin{aligned} & - \frac{2 V\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{\eta}^1 \frac{(1-\eta)^{m-1}}{\left(\eta(2-\eta)\right)^{\frac{m+1}{2}}} d\eta = \\ & = - \frac{2 V\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{r,s=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{r+s} \frac{1}{2^r} \binom{m-1}{s} \binom{-\frac{m+1}{2}}{r} \cdot \int \eta^{s+r-\frac{m+1}{2}} d\eta \\ & \quad + \text{Restglied.} \end{aligned}$$

Für den logarithmischen Anteil kommt nur der Koeffizient von η^{-1} in Frage. Wir bezeichnen ihn mit A und erhalten

$$A = + \sum_{r+s=\frac{m-1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{r+s+1} \binom{m-1}{s} \binom{\frac{m+1}{2}}{r} .$$

Somit ist $w(z)$ bestimmt.¹⁸⁾

$$w(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2 V\pi^m A} \left\{ \int_{(\varrho)} \int_{(\omega)} \left(C_{\frac{m-1}{2}} - D_{\frac{m-1}{2}} \right) d\varrho d\omega + \boxed{\int_{G^+} \dots \int v dZ w} \right\}$$

Die Funktionen $C_{\frac{m-1}{2}}$ und $D_{\frac{m-1}{2}}$ entnimmt man Seite 329 f.

Man kann natürlich auch die Eindeutigkeit beweisen und zeigen, daß für die Komponenten von $w(\zeta)$ auf G beliebige, dem Gleichungssystem nicht widersprechende Werte vorgegeben werden können. Den Beweis kann man genau demjenigen der Gleichungen zweiter Ordnung nachbilden, und er sei hier nur erwähnt.

(Eingegangen den 6. März 1950.)

¹⁸⁾ Man vergleiche auch die Arbeiten von:

Marcel Riesz: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta mathematica Bd. 81 S. 1 ff. (1949).

M. M. E. Eichler: On the Differential Equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)u = 0$.
Transactions of the American Math. Society Vol. 65, S. 259 ff. (1949).

M. M. E. Eichler: Analytic Functions in Three-dimensional Riemannian Spaces.
Duke Math. Journal Vol. 16, S. 339 ff. (1949),

wo verwandte Probleme mittels anderer Methoden behandelt werden.