Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1950)

Artikel: Projektive Methoden in der Gewebegeometrie.

Autor: Jeger, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20312

Projektive Methoden in der Gewebegeometrie

Von M. Jeger, Olten/Zürich

Einleitung

Zur Abklärung differentialgeometrischer Fragen der *Gewebegeometrie* ist bis jetzt zur Hauptsache der Kalkül der Differentiatoren bzw. der schiefen Differentialformen verwendet worden. Im zusammenfassenden Werk „*Geometrie der Gewebe*" von *Blaschke* und *Bol*[1]) ist zwar im § 29 ein Ansatz in anderer Richtung vorhanden. *Blaschke* ermittelt dort gewisse Invarianten von ebenen Kurven-4-Geweben unter Verwendung der *Geodätischen geeigneter projektiver Zusammenhänge*. Weiter scheint aber dieser Ansatz nicht mehr ausgewertet worden zu sein.

Gewebe sind geometrische Gebilde mit projektivem Charakter. Es ist daher naheliegend, zur Diskussion gewebegeometrischer Fragen die Methoden der *projektiven Differentialgeometrie* beizuziehen. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß sich der oben erwähnte *Blaschke*sche Ansatz auf beliebige Dimensionen erweitern läßt und dadurch die Einordnung der Differentialgeometrie der Gewebe in die projektive Differentialgeometrie möglich wird. Dieses Vorgehen gestattet einerseits, sämtliche differentialgeometrischen Aussagen über Gewebe auf höhere Dimensionen zu übertragen. Andererseits treten die Vorteile des weit umfassenderen *Absoluten Differentialkalküls* klar hervor.

Der Rechenapparat ist dem *Ricci-Kalkül* entnommen. Entsprechend den Prinzipien der *Kern-Index-Methode* werden für die allgemeinen Koordinatensysteme griechische Indizes $\varkappa$, λ, μ, $\nu, \ldots$, für die speziellen Koordinatensysteme lateinische Indizes h, i, j, $k, \ldots$ verwendet. Dies hat den Vorteil, daß zur Unterscheidung invarianter und nichtinvarianter Gleichungen kein besonderes Zeichen notwendig wird. Eine Gleichung zwischen Größen mit lateinischen Indizes bezieht sich somit immer auf ein spezielles Koordinatensystem; durch die lateinischen Indizes ist aber gleichzeitig zum Ausdruck gebracht, daß die Gleichung nicht invariant ist, das heißt nur in einem entsprechend speziellen Koordinatensystem

[1]) Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 49.

richtig ist. Von der Vorschrift des *Ricci*-Kalküls, daß über Indizes, welche in derselben Beziehung *ko-* und *kontravariant* auftreten, stets zu summieren ist, wird insofern etwas abgewichen, als sie nur für griechische Indizes zur Anwendung kommen soll. Diese Konvention erlaubt, verschiedene, in speziellen Koordinatensystemen öfters auftretende Ausdrücke in einfachere Gestalt zu bringen. Eine Summation über lateinische Indizes wird durch Voranstellung des gewöhnlichen Summenzeichens Σ angedeutet.

Kurven bzw. Hyperflächen der in dieser Arbeit untersuchten Gewebe sind stets *genügend oft stetig differenzierbar* vorausgesetzt. Damit diese Eigenschaft der Gewebe erhalten bleibt, soll dasselbe auch für die zugelassenen topologischen Abbildungen gelten.

I. Projektive Zusammenhänge

1. *Affine Zusammenhänge und ihre Geodätischen* [2]). In einem n-dimensionalen Raum mit den *affinen Koordinaten* x^ν sei durch die in den untern Indizes symmetrischen Größen $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ eine *affine Übertragung* A_n gegeben.

Bei Parallelverschiebung eines Vektors v^λ längs einer Kurve $x^\nu(t)$ ändert sich dieser gemäß

$$dv^\lambda = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, v^\mu\, dx^\nu \;. \tag{1}$$

Verschiebt man speziell ein Linienelement dx^λ im Sinne der zugrunde gelegten Übertragung stets in seiner eigenen Richtung, so wird

$$v^\lambda = \beta \cdot \frac{dx^\lambda}{dt} \;. \tag{2}$$

Seine Bahn heißt eine *geodätische Linie* der A_n. Aus (1) und (2) folgt für die Differentialgleichungen der Geodätischen

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \alpha \cdot \frac{dx^\lambda}{dt} \;. \tag{3}$$

Darin ist $\alpha(x^1,\ldots, x^n)$ eine Funktion, die von der speziellen Wahl des Kurvenparameters t abhängt. Durch eine geeignete Parametertransformation kann α stets zum Verschwinden gebracht werden. Die Integralkurven von (3) besitzen zwei charakteristische Eigenschaften der Geodätischen eines *Riemannschen* Raumes; sowohl durch zwei benachbarte

[2]) Vgl. [1] § 29, [2] Abschnitt IV, sowie des Literaturverzeichnisses.

Punkte als auch durch einen Punkt und eine Richtung ist genau eine Systemkurve bestimmt.

Eine Transformation der Übertragung von der Gestalt

$$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + A^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{4}$$

heißt *bahntreu*, wenn die Lage der Geodätischen invariant bleibt. Für eine derartige Transformation hat das additive Glied notwendigerweise die Form

$$A^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} p_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu} p_{\mu} = 2\delta_{(u}\, p_{\nu)} \;^{3)} \tag{5}$$

p_ν ist ein willkürliches Kovektorfeld.

Eine Klasse affiner Übertragungen, welche sich nur durch bahntreue Transformationen unterscheiden, heißt eine *Klasse isogeodätischer Übertragungen* und die invariant damit verknüpften Integralkurven (3) bezeichnet man als das zu dieser Klasse gehörige *quasigeodätische Kurvensystem*[4]). Sie bilden eine $2(n-1)$-parametrige Kurvenschar. Geht man von einem quasigeodätischen System aus, so sind dadurch die *Christoffelschen* Symbole $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ nur bis auf bahntreue Transformationen bestimmt. Man spricht in diesem Falle von einem *projektiven Zusammenhang*. Im Gegensatz zur Geometrie der affinen Zusammenhänge gibt es in der Geometrie der projektiven Zusammenhänge nur die Verschiebung eines Linienelementes in seiner eigenen Richtung.

2. *Der Projektivkrümmungstensor.* Mit einer affinen Übertragung A_n sind verschiedene tensorielle Größen oder Beziehungen bestimmt. Für die nachfolgenden Untersuchungen sind diejenigen von Bedeutung, welche gegenüber bahntreuen Transformationen invariant sind, das heißt durch einen projektiven Zusammenhang allein schon bestimmt sind. Eine derartige Größe ist der *Projektivkrümmungstensor.*

Wir legen über dem betrachteten projektiven Zusammenhang eine spezielle A_n mit den *Dreiindizes-Symbolen* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ zugrunde.

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = \partial_{\mu}\Gamma^{\omega}_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\omega}_{\nu\mu} + \Gamma^{\omega}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\omega}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{6}$$

ist deren Krümmungstensor. Dieser bildet keine projektive Invariante. Durch Verjüngung folgt daraus

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda} \,.$$

---

[3]) *Bach*sche Symbolik zur Abkürzung symmetrischer und alternierender Summen.

[4]) In der englischen Literatur „*system of paths*" genannt.

Mit der daraus abgeleiteten Größe

$$P_{\mu\nu} = -\frac{1}{n^2-1}(n R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})$$

stellt

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} - 2P_{[\lambda\mu]}\,\delta_{\nu}^{\omega} + 2\,\delta_{[\lambda}^{\omega}\,P_{\mu]\nu} \tag{7}$$

schließlich einen mit dem projektiven Zusammenhang invariant verknüpften Tensor dar. In der Tat ist $P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}$ invariant gegenüber bahntreuen Transformationen der A_n.

$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}$ heißt der Projektivkrümmungstensor des Zusammenhangs. Er verschwindet identisch für $n = 2$.

Unter den quasigeodätischen Systemen sind diejenigen ausgezeichnet, welche sich durch eine topologische Abbildung in die Geraden des *projektiven Raumes* P_n überführen lassen. Die A_n, welche zu einem derartigen System gehören, heißen *projektiv-euklidisch.*

Für die topologische Äquivalenz der Geodätischen einer A_n mit den Geraden des P_n ist der Tensor

$$2\nabla_{[\lambda}P_{\mu]\nu} = \nabla_{\lambda}P_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}P_{\lambda\nu} \quad ^{5)}$$

maßgebend. Wie man leicht zeigen kann, ist

$$\nabla_{[\lambda}P_{\mu]\nu} = 0$$

eine gegenüber bahntreuen Transformationen invariante Beziehung und es gilt der

Satz: *Eine affine Übertragung ist dann und nur dann projektiv-euklidisch, wenn*

$$\nabla_{[\lambda}P_{\mu]\nu} = 0 \quad ^{6)} \tag{8}$$

Da die Beziehungen (8) für $n > 2$ äquivalent mit

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = 0 \tag{9}$$

sind [7]), läßt sich der Satz auch in folgender Form aussprechen:

Eine A_n ist für $n > 2$ dann und nur dann projektiv-euklidisch, wenn der Projektivkrümmungstensor verschwindet, und für $n = 2$ dann und nur dann, wenn für den Tensor $P_{\mu\nu}$ die Gleichungen (8) *bestehen.*

---

[5]) ∇ ist das Symbol für den kovarianten Differentialquotienten.

[6]) Vgl. [2], S. 130.

[7]) Die Gleichungen (8) stellen die Integrabilitätsbedingungen für die Abbildungsfunktionen dar. Sie sind für $n > 2$ eine direkte Folge von $P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = 0$.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß die Geradlinigkeitsbedingungen für die Dimension $n = 2$ eine Differentiationsordnung mehr enthalten, als für alle übrigen Dimensionen.

3. *Geodätische Hyperflächen.*

Definition: *Eine Hyperfläche*

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = 0$$

oder das Schnittgebilde mehrerer solcher Hyperflächen heißt geodätisch in einer A_n, wenn jede Integralkurve von (2), *welche ein Linienelement mit diesem Gebilde gemeinsam hat, ganz darin verläuft.*

Für die einparametrige Hyperflächenschar

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = c \tag{10}$$

mit c als Parameter ergibt sich als Bedingung für geodätische Lage die Existenz eines Konvektorfeldes u_λ, so daß

$$\nabla_\lambda \Phi_\mu = 2u_{(\lambda}\Phi_{\mu)} \quad {}^{8)} , \tag{11}$$

wobei $\Phi_\mu = \partial_\mu \Phi$.

Satz: *Das Schnittgebilde geodätischer Hyperflächen ist selbst wieder geodätisch.*

Zum Beweise betrachte man ein Linienelement des Schnittgebildes; die zugehörige Geodätische liegt ganz in allen Hyperflächen und daher auch ganz im Schnittgebilde.

II. Hyperflächengewebe im n-dimensionalen projektiven Raum P_n

Zur Darstellung der Gewebe im n-dimensionalen euklidischen Raum werden im folgenden affine Koordinaten benutzt. Da aber im Verlaufe der Untersuchungen die Gruppe der projektiven Abbildungen des Raumes auf sich eine wesentliche Rolle spielt, ist es naheliegend, den n-dimensionalen projektiven Raum zugrunde zu legen.

Definition: *n einparametrige Hyperflächenscharen*

$$\Phi^\beta (x^1, \ldots, x^n) = \text{const.}, \qquad \beta = 1, \ldots, n$$

8) Vgl. [3], Bd. II, S. 181.

bilden innerhalb eines Gebietes G des P_n ein Hyperflächennetz, wenn in jedem Punkte von G

$$\frac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \neq 0 \tag{1}$$

ist. (1) bedeutet, daß im kleinen n Hyperflächen aus verschiedenen Scharen höchstens einen Punkt gemeinsam haben.

Definition: *Ein System von k ($k > n$) Hyperflächenscharen innerhalb eines Gebietes G heißt ein Gewebe, wenn n beliebig herausgegriffene Scharen stets ein Hyperflächennetz erzeugen.*

Für k Hyperflächenscharen bestehen somit die Gewebebedingungen im Nichtverschwinden von $\binom{k}{n}$ Funktionaldeterminanten.

1. *Projektive Zusammenhänge über einem Hyperflächen-$(n+1)$-Gewebe.* Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Klasse projektiver Zusammenhänge aufzusuchen, in denen ein vorgeschriebenes $(n+1)$-Gewebe aus geodätischen Hyperflächen besteht. Durch Überführung eines Gewebenetzes in das Koordinatennetz [9]) vereinfacht sich die Konstruktion dieser projektiven Zusammenhänge wesentlich. Eine derartige Abbildung ist wenigstens im kleinen als Folge der Gewebebedingungen (1) immer möglich. Die $(n+1)$-te Hyperflächenschar gehe dabei über in

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = \text{const.} \tag{2}$$

In unserem speziellen Koordinatensystem wird das Gewebe durch die $(n+1)$-*Gradientenfelder*

$$\begin{matrix} (1, 0, & \ldots, 0) \\ (0, 1, & \ldots, 0) \\ & \\ (0, 0, & \ldots, 1) \\ (\Phi_1, \Phi_2, & \ldots, \Phi_n) \end{matrix} \tag{3}$$

aufgespannt und die Gewebebedingungen [10]) lauten:

$$\Phi_i \neq 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n\,. \tag{4}$$

Die Forderung, daß die Gewebescharen geodätisch in einer A_n liegen sollen, zieht für jedes Feld in (3) ein Gleichungssystem von der Form

[9]) Netz, welches aus den Koordinatenhyperebenen $dx^i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) besteht.

[10]) Die $(n+1)$-te Gewebebedingung steckt im Netz der Koordinatenhyperebenen.

(I, 11) nach sich. Die ersten n Felder haben zur Folge, daß zunächst für alle in Betracht kommenden A_n

$$\Gamma^j_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \text{und} \quad k \neq j \tag{5}$$

ist. Unter Berücksichtigung von (5) liefert nun das letzte Gradientenfeld in entsprechender Weise die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Phi_i \Gamma^i_{ik} \qquad\qquad &= \Phi_{ii} - 2\, u_i \Phi_i \\ \Phi_i \Gamma^i_{ik} + \Phi_k \Gamma^k_{ik} &= \Phi_{ik} - (u_i \Phi_k + u_k \Phi_i) \end{aligned} \tag{6}$$

i und k durchlaufen dabei die Zahlen von 1 *bis* n. u_i stellt ein willkürliches *Kovektorfeld* dar.

Dieses lineare Gleichungssystem von $n + \binom{n}{2}$ Gleichungen ist infolge (4) nach den darin auftretenden *Christoffel*schen Symbolen lösbar und wir erhalten

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{\Phi_{ii}}{\Phi_i} - 2\, u_i$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \tfrac{1}{2} \frac{\Phi_{ik}}{\Phi_i} - u_k + \overset{(ik)}{\lambda} \Phi_k \\ \Gamma^k_{ik} &= \tfrac{1}{2} \frac{\Phi_{ik}}{\Phi_k} - u_i - \overset{(ik)}{\lambda} \Phi_i \end{aligned}\right\} \; i < k \;, \tag{7}$$

wobei für jedes Indexpaar (i, k) ein Lösungsparameter

$$\overset{(ik)}{\lambda} (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

auftritt; es ist nämlich für die beiden Symbole Γ^i_{ik} und Γ^k_{ki} nur eine einzige Bestimmungsgleichung vorhanden.

Das Kovektorfeld u_i, das vom letzten Gradientenfeld herrührt, steckt noch als willkürliche Größe in der Lösung. Durch Vergleich von (7) mit (I, 5) stellt man sofort fest, daß eine Änderung dieses Kovektorfeldes äquivalent mit einer *bahntreuen Transformation der Übertragung* ist. Dagegen durchläuft man bei Änderung der λ die Gesamtheit aller projektiven Zusammenhänge, welche unser Gewebe geodätisch enthalten. Daraus folgt:

Satz 1: *Die Gesamtheit der projektiven Zusammenhänge, die ein vorgegebenes Hyperflächen-*$(n + 1)$*-Gewebe geodätisch enthalten, wird aufgespannt durch* $\binom{n}{2}$ *Funktionen in* n *Variabeln.*

Dabei ist die Meinung, daß durch jede feste Wahl dieser $\binom{n}{2}$ Funktionen $\overset{(ik)}{\lambda}$ ein derartiger projektiver Zusammenhang eindeutig bestimmt ist.

Für ein gewisses System dieser $\overset{(ik)}{\lambda}$ sei das Symbol $[\lambda]$ gesetzt. Zur Charakterisierung des zu $[\lambda]$ gehörenden projektiven Zusammenhanges können wir uns auf eine spezielle Wahl von u_i beschränken. Wir wählen dazu diejenige A_n, für welche in unserem speziellen Koordinatensystem Γ^i_{ii} ebenfalls verschwindet. Für diesen Repräsentanten ergibt sich dann nach einer einfachen Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \tfrac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) + \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_k \\ \Gamma^k_{ik} &= \tfrac{1}{2}\,\partial_i \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i}\right) - \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_i \end{aligned}\right\}\; i < k\;. \tag{8}$$
$$\Gamma^j_{ik} = 0\;, \quad \textit{sonst.}$$

2. *Ein Satz über Hyperflächen-(n + 2)-Gewebe.*

Satz 2: *Ein Hyperflächen-$(n+2)$-Gewebe bestimmt stets eindeutig einen projektiven Zusammenhang, in dem es geodätisch enthalten ist*[11]).

Das Gewebe sei durch die $(n+2)$ Hyperflächenscharen

$$\begin{aligned} dx^i &= 0\,; & i &= 1, 2, \ldots, n \\ d\Phi &= 0\,; & d\Psi &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Die Gewebebedingungen lauten dann

$$\Phi_i = 0 \;;\quad \Psi_i = 0 \;;\quad \begin{vmatrix} \Phi_i & \Phi_k \\ \Psi_i & \Psi_k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k\;. \tag{9}$$

Wir adjungieren nun zum Netz der ersten n Scharen einmal die Schar $d\Phi = 0$ und einmal die Schar $d\Psi = 0$. Es werden dadurch zwei $(n+1)$-Gewebe ausgezeichnet. (8) stellt mit Hilfe der Funktionen $\overset{(ik)}{\lambda}$ die Klasse der projektiven Zusammenhänge über dem erstern dieser beiden $(n+1)$-Gewebe dar; entsprechend können wir mit den Funktionen $\overset{(ik)}{\mu}$ die Klasse der projektiven Zusammenhänge über dem andern $(n+1)$-Gewebe erzeugen. Der *Durchschnitt* dieser beiden Klassen liefert dann diejenigen Zusammenhänge, welche das ganze $(n+2)$-Gewebe enthalten. Dies drückt sich aus in

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \tfrac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) + \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_k = \tfrac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Psi_i}{\Psi_k}\right) + \overset{(ik)}{\mu}\,\Psi_k \\ \Gamma^k_{ik} &= \tfrac{1}{2}\,\partial_i \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i}\right) - \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_i = \tfrac{1}{2}\,\partial_i \ln\left(\frac{\Psi_k}{\Psi_i}\right) - \overset{(ik)}{\mu}\,\Psi_i \end{aligned}\;. \tag{10}$$

---

[11]) Dieser Satz ist bekannt für $n = 2$. Vgl. [1], S. 246.

Betrachtet man diese Beziehungen für ein festes Indexpaar (i, k) als lineares Gleichungssystem für $\overset{(ik)}{\lambda}$ und $\overset{(ik)}{\mu}$, so ist dieses infolge (9) eindeutig lösbar. Der Durchschnitt besteht daher aus einem einzigen projektiven Zusammenhang; Satz 2 ist damit bewiesen.

Aus Satz 2 schließt man sofort, daß jede topologische Abbildung des P_n auf sich, welche ein Hyperebenen-$(n + 2)$-Gewebe wieder in ein solches überführt, geradentreu und damit eine Projektivität ist.

3. *Schnittgewebe.* Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir einen Hilfssatz über projektive Zusammenhänge:

Satz: *In einem projektiven Zusammenhang des P_n sei eine geodätische Hyperflächenschar gegeben. Dann erzeugen die Geodätischen des P_n, welche ganz in dieser Schar verlaufen, in jeder ihrer Hyperflächen einen $(n - 1)$-dimensionalen projektiven Zusammenhang.*

Zum Beweise führen wir ein spezielles Koordinatensystem ein;

$$dx^n = 0$$

sei gerade die Differentialgleichung der ausgezeichneten Hyperflächenschar. Die affinen Zusammenhänge A_n, welche diese Schar geodätisch enthalten, sind dann ausgezeichnet durch

$$\Gamma^n_{ik} = 0 \quad \textit{für} \quad i \neq n \quad \textit{und} \quad k \neq n \ .$$

Unter diesen A_n gibt es genau eine, für welche sogar

$$\Gamma^n_{ik} = 0 \quad \textit{für beliebige } i, k \text{ [12]} \ .$$

Mit einem geeigneten Parameter t lauten die Differentialgleichungen der Geodätischen eines Zusammenhanges im P_n:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \ .$$
$$i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

In unserem Falle vereinfachen sie sich zu

$$\frac{d^2 x^i}{dx^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \ , \quad i < n$$
$$\frac{d^2 x^n}{dt^2} = 0 \ .$$

[12]) Es existiert genau eine bahntreue Transformation p_i, so daß

$$\Gamma^n_{ni} + \delta^n_n p_i + \delta^n_i p_n = 0 \quad \textit{für} \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Für die Geodätischen, die ganz in unserer Hyperflächenschar verlaufen, ist aber dauernd

$$\frac{dx^n}{dt} = 0 \ ,$$

das heißt diese genügen den Gleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \ , \quad i < n$$

$$\frac{dx^n}{dt} = 0 \ .$$

Dies sind aber die Gleichungen $(n-1)$-*dimensionaler quasigeodätischer Systeme* in den Hyperebenen $dx^n = 0$. Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir betrachten nun wieder ein $(n+1)$-Gewebe im P_n. Das Schnittgebilde von $(n-m)$[13]) Gewebehyperflächen, welche verschiedenen Scharen angehören, ist eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit R^m, und die übrigen $(m+1)$ Gewebescharen erzeugen in dieser R^m ein $(m+1)$-Gewebe. Wir bezeichnen dieses als das Schnittgewebe.

Wie im Abschnitt I gezeigt wurde, ist das Schnittgebilde geodätischer Hyperflächen selbst wieder geodätisch. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz über projektive Zusammenhänge schließt man daher auf den im folgenden Satz formulierten Sachverhalt:

Satz: *Ein projektiver Zusammenhang über einem* $(n+1)$-*Gewebe induziert im Schnittgebilde* R^m *von* $(n-m)$ *Gewebehyperflächen aus verschiedenen Scharen einen projektiven Zusammenhang von der Dimension* m, *welcher das Schnittgewebe geodätisch enthält.*

4. *Das Doppelverhältnis-System.* Wir verlegen nun unsere Betrachtungen für einen Moment in den P_2, das heißt in die *projektive Ebene.* Es liege hier das Kurven-3-Gewebe

$$dx^1 = 0 \ , \qquad dx^2 = 0 \ , \qquad d\Phi = 0 \tag{11}$$

vor. Für jeden gegebenen (von x^1 und x^2 unabhängigen) Wert σ ist

$$\sigma\, \Phi_1\, dx^1 + \Phi_2\, dx^2 = 0 \tag{12}$$

die Differentialgleichung einer einparametrigen Kurvenschar, welche mit den Kurven des 3-Gewebes (11) in jedem Punkt das *Doppelverhältnis* σ bildet. Es sei

---

[13]) $n - m > 1$.

$$\Psi(x^1, x^2)$$

das Integral von (12) und f der zugehörige integrierende Faktor

$$\Psi_1 = \sigma \cdot f \cdot \Phi_1 \; ; \qquad \Psi_2 = f \cdot \Phi_2 \; . \tag{13}$$

Für jedes $\sigma \neq 1$ bilden die Kurvenscharen (11) und (12) zusammen ein Kurven-4-Gewebe, durch welches gemäß Satz 2 ein projektiver Zusammenhang eindeutig bestimmt ist. Man findet aus (10), daß dieser Zusammenhang für jeden Wert von σ durch $\overset{(12)}{\lambda} = \lambda = 0$ gegeben ist.

Satz 3: *Sämtliche einparametrigen Kurvenscharen der Ebene, welche mit den Kurven eines 3-Gewebes ein festes Doppelverhältnis bilden, sind Geodätische eines ausgezeichneten projektiven Zusammenhanges. Dieser ist in unserem speziellen Koordinatensystem durch* $\lambda = 0$ *gekennzeichnet.*

Dieser ausgezeichnete projektive Zusammenhang war bereits Thomsen bekannt[14]) und wurde von ihm *Doppelverhältnis-System* genannt. Das Doppelverhältnis-System, im folgenden kurz als D.V.-System bezeichnet, erlaubt bereits einem Kurven-3-Gewebe invariant einen projektiven Zusammenhang zuzuordnen.

Da keine der drei Gewebekurvenscharen irgendwie ausgezeichnet ist, folgt sofort, daß das D.V.-System nach Abbildung eines Gewebenetzes auf das Koordinatennetz immer durch

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{ik} = \tfrac{1}{2}\, \partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \quad \text{für} \quad i \neq k \\ &\Gamma^j_{ik} = 0 \; , \quad \text{sonst} \end{aligned} \qquad i \, , \, j \, , \, k = 1 \, , \, 2 \tag{14}$$

gegeben ist. Dabei ist Φ_i das Gradientenfeld der restlichen Schar.

Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir nun ein $(n+1)$-Gewebe im P_n. Dieses sei gegeben durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dx^i &= 0 \; , \qquad i = 1, \ldots, n \; . \\ d\Phi &= 0 \; . \end{aligned} \tag{15}$$

Bei Voraussetzung eines geeigneten Parameters t lauten die Gleichungen der Geodätischen eines projektiven Zusammenhanges über diesem Gewebe

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \; , \tag{16}$$

[14]) Vgl. [7].

wobei für die *Christoffel*schen Symbole (8) zu setzen ist. Fixieren wir nun für einen Augenblick zwei Indizes i und k. Im Schnittgebilde R^2 von $(n - 2)$ Gewebehyperflächen aus den Scharen

$$dx^j = 0, \quad j \neq i \quad \textit{und} \quad j \neq k$$
$$\textit{aber sonst alle Zahlen von } 1 \textit{ bis } n$$

wird ein 2-dimensionaler projektiver Zusammenhang induziert, dessen Geodätische durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2\Gamma^i_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x^k}{dt^2} + 2\Gamma^k_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

gegeben sind. Dieser Zusammenhang ist gemäß den vorangegangenen Betrachtungen in der Ebene dann und nur dann ein D.V.-System[15]), wenn

$$\overset{(ik)}{\lambda} = 0 \quad \text{oder} \quad \Gamma^i_{ik} = \tfrac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \quad \text{und} \quad \Gamma^k_{ik} = \tfrac{1}{2}\,\partial_i \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i}\right)$$

ist. Es drückt daher das Verschwinden von $\overset{(ik)}{\lambda}$ einen geometrischen Sachverhalt aus.

Setzen wir nun $\overset{(ik)}{\lambda} = 0$ für alle Indizespaare (i, k). Für den zugehörigen projektiven Zusammenhang führen wir das Symbol [0] ein. Dieser Zusammenhang ist einmal dadurch ausgezeichnet, daß er in sämtlichen Schnittgebilden R^2, bei deren Erzeugung die Schar $d\Phi = 0$ nicht beteiligt ist, das D.V.-System über dem Schnittgewebe induziert.

Wir wollen nun zeigen, daß dies überhaupt für alle 2-dimensionalen Schnittgewebe gilt. Dazu haben wir noch diejenigen Schnittgebilde zu untersuchen, bei deren Bildung die Gewebeschar $d\Phi = 0$ beteiligt ist.

Betrachten wir etwa das Schnittgebilde R^2 aus je einer Hyperfläche der Scharen

$$dx^4 = 0\ , \quad dx^5 = 0, \dots, dx^n = 0\ , \quad d\Phi = 0$$ [16]) .

Diese R^2 hat mit der Schar $dx^1 = 0$ eine Kurvenschar gemeinsam, deren Tangentenfeld sich als Vektorprodukt im P_n darstellen läßt. Man findet dafür

$$\bar{r}^i = (0 \quad , \quad -\Phi_3 \quad , \quad \Phi_2 \quad , \quad 0 \quad , \dots , 0)\ .$$

---

[15]) und zwar das D.V.-System über dem Kurven-3-Gewebe, welches durch die restlichen drei Gewebescharen im Schnittgebilde R^2 erzeugt wird.

[16]) Für die übrigen verläuft der Nachweis genau gleich.

Entsprechend erhält man für die *Tangentenfelder* der Schnittkurven mit den Scharen $dx^2 = 0$ und $dx^3 = 0$:

$$\begin{aligned}
\bar{s}^i &= (\ \Phi_3 \ , \ 0 \ , \ -\Phi_1 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ , \\
\bar{t}^i &= (-\Phi_2 \ , \ \Phi_1 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ .
\end{aligned}$$

Normiert man diese drei Felder so, daß ihre Summe verschwindet, so wird etwa

$$\begin{aligned}
r^i &= (\ 0 \ , \ -\Phi_1 \Phi_3 \ , \ \Phi_1 \Phi_2 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ , \\
s^i &= (\ \Phi_2 \Phi_3 \ , \ 0 \ , \ -\Phi_1 \Phi_2 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ , \\
t^i &= (-\Phi_2 \Phi_3 \ , \ \Phi_1 \Phi_3 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ .
\end{aligned} \tag{18}$$

Eine zu diesen drei Scharen *harmonische* Schar ist dann gegeben durch das Tangentenfeld

$$h^i = r^i - s^i = (-\Phi_2 \Phi_3 \ , \ -\Phi_1 \Phi_3 \ , \ 2\Phi_1 \Phi_2 \ , \ 0 \ , \ldots , 0) \ . \tag{19}$$

Die Integralkurven des Vektorfeldes h^i liegen natürlich ganz in unserer R^2. Falls wir nun zeigen können, daß sie gleichzeitig Geodätische im projektiven Zusammenhang [0] sind, so ist unsere Behauptung bewiesen. Der in unserer R^2 induzierte projektive Zusammenhang enthält nämlich dann nebst dem Schnittgewebe (18) noch eine Kurvenschar (19), die mit den Gewebekurven ein konstantes Doppelverhältnis bildet; es handelt sich daher um das D.V.-System über dem Schnittgewebe.

Setzt man in (I, 3)

$$v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt} \ ,$$

so erhält man daraus die Bedingungen für ein geodätisches Tangentenfeld. Sie lauten

$$v^\mu \, \partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \alpha v^\lambda \ . \tag{20}$$

Diese Beziehungen haben wir nun für das Vektorfeld h^i zu verifizieren. Da h^i nur drei wesentliche Komponenten aufweist, reduziert sich (20) in unserem Falle auf

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{3} h^s \, \partial_s h^1 + 2\Gamma^1_{12} h^1 h^2 + 2\Gamma^1_{13} h^1 h^3 &= \alpha h^1 \ , \\
\sum_{s=1}^{3} h^s \, \partial_s h^2 + 2\Gamma^2_{21} h^1 h^2 + 2\Gamma^2_{23} h^2 h^3 &= \alpha h^2 \ , \\
\sum_{s=1}^{3} h^s \, \partial_s h^3 + 2\Gamma^3_{31} h^1 h^3 + 2\Gamma^3_{32} h^2 h^3 &= \alpha h^3 \ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Die Rechnung zeigt, daß diese drei Beziehungen miteinander verträglich sind. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen. Wir formulieren dieses Resultat in

Satz 4: *Der projektive Zusammenhang* [0] *über einem* $(n + 1)$*-Gewebe ist geometrisch ausgezeichnet. Er induziert in sämtlichen* 2*-dimensionalen Schnittgebilden des Gewebes das D.V-System über dem Schnittgewebe.*

Aus naheliegenden Gründen werden wir nun diesen eindeutig bestimmten projektiven Zusammenhang [0] auch in höheren Dimensionen als das *D.V.-System zum gegebenen* $(n + 1)$*-Gewebe* bezeichnen. Dieser Zusammenhang hat übrigens die bemerkenswerte Eigenschaft, daß nach Abbildung irgendeines Gewebenetzes auf das Koordinatennetz die *Christoffel*schen Symbole einer geeigneten, eindeutig bestimmten A_n stets die Gestalt

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \tfrac{1}{2}\, \partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \qquad \text{für} \qquad i \neq k \\ \Gamma^i_{jk} &= 0 \ , \ \textit{sonst} \end{aligned} \tag{22}$$

annehmen. Dabei ist Φ_i das Gradientenfeld der restlichen Gewebeschar. Die erste Zeile in (22) drückt nämlich gerade aus, daß in gewissen 2-dimensionalen Schnittgebilden des Gewebes D.V.-Systeme induziert werden.

Da die *Christoffel*schen Symbole des D.V.-Systems in jedem Koordinatensystem, dessen Parameterflächen mit einem Gewebenetz übereinstimmen, die Gestalt (2) haben, gilt in sämtlichen Dimensionen $n \geqq 2$:

Satz 5: [0] *besitzt den Charakter einer Invarianten. In jedem Koordinatensystem, dessen Parameternetz mit einem Gewebenetz übereinstimmt, ist das D.V.-System durch das System* [0], *das heißt durch das Verschwinden aller* $\overset{(ik)}{\lambda}$ *gekennzeichnet.*

Aus dem Beweise des Satzes 4 entnehmen wir noch ein Kriterium für das D.V.-System:

Satz 6: *Induziert ein projektiver Zusammenhang über einem* $(n + 1)$*-Gewebe in sämtlichen* $\binom{n}{2}$ *Scharen von* 2*-dimensionalen Schnittgebilden, welche durch n Gewebescharen erzeugt werden, D.V.-Systeme, so tut er dies auch in allen übrigen* 2*-dimensionalen Schnittgebilden und es handelt sich um das D.V.-System zum vorgelegten* $(n + 1)$*-Gewebe.*

5. *Ebenheitsfragen.* Das Kriterium für die Existenz einer *topologischen Abbildung*, die ein vorgegebenes Gewebe in ein *Hyperebenengewebe* überführt, ist im folgenden Satz enthalten:

Satz 7: *Ein Hyperflächengewebe läßt sich dann und nur dann eben machen, wenn es aus geodätischen Hyperflächen eines projektiveuklidischen quasigeodätischen Systems besteht*[17]).

Die Richtigkeit ist leicht einzusehen. Da ein Hyperebenengewebe im projektiven Zusammenhang der Geraden des P_n enthalten ist, ist die Bedingung notwendig; sie ist auch hinreichend, weil jedes projektiveuklidische quasigeodätische System mit den Geraden des P_n topologisch äquivalent ist.

Wir wollen nun die Ebenheitsfragen noch speziell für $(n+1)$-Gewebe weiter diskutieren. Da der Projektivkrümmungstensor für $n = 2$ identisch verschwindet, ist dabei die Ebene gesondert zu behandeln.

$n = 2$. Gemäß (8) lassen sich die projektiven Zusammenhänge über einem *Kurven-3-Gewebe* durch die beiden wesentlichen Größen

$$\Gamma^1_{12} = H(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \lambda)$$
$$\Gamma^2_{12} = L(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \lambda)$$

darstellen. Der Zusammenhang ist projektiveuklidisch, wenn

$$\nabla_{[i} P_{j]k} = 0$$

ist. Die Rechnung liefert hiefür

$$\begin{aligned} 2H(2H_1 + L_2) + 2H_{12} + L_{22} &= 0 \\ 2L(2L_2 + H_1) + 2L_{12} + H_{11} &= 0\,, \end{aligned} \tag{23}$$

worin die Indizes Ableitung nach x^1 bzw. x^2 bedeuten.

Sollen nun die Kurven eines 3-Gewebes einem projektiveuklidischen quasigeodätischen System angehören, so heißt dies, daß eine Funktion λ existiert, derart, daß (23) befriedigt wird. Da Φ durch das Gewebe gegeben ist, kann man diesen Sachverhalt auch folgendermaßen formulieren:

Satz 8: *Ein Kurven-3-Gewebe der Ebene läßt sich dann und nur dann geradlinig machen, wenn das System* (23) *von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in λ eine Lösung hat*[18]).

Die Entscheidung, ob sich ein vorgelegtes 3-Gewebe geradlinig machen läßt, führt somit auf die Aufgabe, für ein gewisses partielles Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung die Existenz von Lösungen abzuklären.

---

[17]) Im P_2 sind natürlich die Hyperflächen Kurven und die Hyperebenen Geraden.

[18]) Vgl. [1], S. 173.

$n > 2$. Die Gesamtheit der projektiven Zusammenhänge über einem $(n+1)$-Gewebe ist gemäß Satz 1 durch die Systeme $[\lambda]$ von $\binom{n}{2}$ Funktionen in n Variabeln gegeben. Das Gewebe kann dann und nur dann eben gemacht werden, wenn es ein $[\lambda]$ gibt, so daß der Projektivkrümmungstensor des zugehörigen Zusammenhanges verschwindet[19]). Da nur erste Ableitungen der Γ^i_{ik} in diesen Tensor eingehen, ergibt sich

Satz 9: *Ein $(n+1)$-Gewebe läßt sich dann und nur dann eben machen, wenn das Differentialgleichungs-System erster Ordnung*

$$P_{rst}{}^h(\overset{(ik)}{\lambda}, \partial_j \overset{(ik)}{\lambda}) = 0 \tag{24}$$

in den $\binom{n}{2}$ Funktionen von $[\lambda]$ eine Lösung besitzt.

Die Entscheidung, ob sich ein vorgelegtes $(n+1)$-Gewebe eben machen läßt, ist genau gleich wie in der Ebene äquivalent mit der Aufgabe, die Existenz von Lösungen eines gewissen partiellen Differentialgleichungs-Systems nachzuweisen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß dieses für $n > 2$ nur von erster Ordnung ist.

Die Abbildung, welche ein projektiveuklidisches quasigeodätisches System in die Geraden des P_n überführt, ist bis auf *Projektivitäten* eindeutig bestimmt; denn sind etwa T_1 und T_2 zwei Abbildungen, die ein derartiges System gerade machen, so ist

$$T_1 \cdot T_2^{-1}$$

eine geradentreue Abbildung des P_n auf sich, das heißt eine Projektivität. Daraus folgt aber

Satz 10: *Sowohl zu einer Lösung λ von* (23) *als auch zu einer Lösung* $[\lambda]$ *von* (24) *gehört genau eine Klasse projektiv-äquivalenter gerader bzw. ebener Realisationen des $(n+1)$-Gewebes*[20]).

Da die parallelisierbaren Kurven-3-Gewebe in der Ebene[21]) nach einem Satz von *Graf* und *Sauer*[22]) unendlich viele *projektiv verschiedene gerade Realisationen* zulassen, haben wir in diesen Geweben ein Beispiel dafür, daß die Lösung λ von (23), falls sie überhaupt existiert, nicht unbedingt

---

[19]) Es genügt natürlich zu fordern, daß die *wesentlichen Komponenten* von $P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}$ verschwinden. Eine Abzählung findet sich in [9].

[20]) Für $n = 2$ vgl. [1], S. 173.

[21]) Gewebe, die drei Parallelenscharen topologisch äquivalent sind. *Blaschke* bezeichnet sie auf Grund einer Schließungseigenschaft als Sechseckgewebe.

[22]) Vgl. [1], § 3.

eindeutig zu sein braucht. Die Vermutung, daß die Lösungen von (23) für ein nichtparallelisierbares Kurven-3-Gewebe höchstens eine Klasse projektiv-aequivalenter gerader Realisationen erzeugen, ist der Inhalt des bekannten *Eindeutigkeitsproblems der Nomographie*[23]).

Für ein Gewebe aus mehr als $(n + 1)$ Hyperflächenscharen vereinfacht sich das Kriterium für die topologische Äquivalenz mit einem Hyperebenengewebe bedeutend. Handelt es sich um ein $(n + 2)$-Gewebe, so ist der projektive Zusammenhang stets eindeutig bestimmt; zur Entscheidung, ob eine Abbildung auf ein Hyperebenengewebe möglich ist, bleibt bloß (I, 8) bzw. (I, 9) zu verifizieren. Bei mehr als $n + 2$ Hyperflächenscharen hat man zunächst noch zu prüfen, ob das Gewebe einem projektiven Zusammenhang angehört. Trifft dies zu, so ist er jedenfalls eindeutig gegeben. Da er sich mit Hilfe eines willkürlich herausgegriffenen $(n + 2)$-Gewebes bestimmen läßt, ist das weitere Vorgehen dasselbe wie im Falle eines $(n + 2)$-Gewebes.

III. Invarianten im *D. V.*-System

1. $(n + 1)$*-Gewebe, deren D.V.-System projektiveuklidisch ist.*

Betrachten wir zunächst die Kurven-3-Gewebe in der Ebene. Für diese gilt:

Satz 11: *Ein Kurven-3-Gewebe in der Ebene ist dann und nur dann parallelisierbar, wenn das zugehörige D.V.-System projektiveuklidisch ist.*

Zum Beweise führen wir die Hilfsgröße

$$\varrho = \partial_1 \partial_2 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) \quad [24]) \tag{1}$$

ein. Die Geradlinigkeitsbedingungen (I, 8) heißen dann für das D.V.-System laut (II, 23):

$$\begin{aligned} -\varrho_1 + \varrho \cdot \partial_1 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) &= 0 \ , \\ \varrho_2 + \varrho \cdot \partial_2 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Durch Differentiation nach x^2 bzw. x^1 entnimmt man daraus

$$\varrho_{12} - \varrho^2 - \varrho_2 \cdot \partial_1 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 \ ; \quad \varrho_{12} + \varrho^2 + \varrho_1 \cdot \partial_2 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 \ .$$

---

[23]) Vgl. [1], S. 176.

[24]) Die Größe ϱ ist identisch mit der von *Blaschke* eingeführten *Sechseckinvarianten*. Vgl. [1], § 16.

Unter Berücksichtigung von (2) ergibt sich dafür

$$\varrho(\varrho_{12} - \varrho^2) - \varrho_1 \cdot \varrho_2 = 0 \; ; \qquad \varrho(\varrho_{12} + \varrho^2) - \varrho_1 \cdot \varrho_2 = 0 \; ,$$

was nur für $\varrho = 0$ verträglich ist. Die Funktion Φ, welche die dritte Gewebeschar kennzeichnet, muß somit der Differentialgleichung von *de Saint-Robert*

$$\partial_1 \partial_2 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 \quad {}^{25)} \tag{3}$$

genügen. Daraus folgt aber die Abbildbarkeit auf drei Parallelenscharen.

Da das D.V.-System zu drei Parallelenscharen aus den Geraden der Ebene besteht, so folgt auch umgekehrt, daß dieses für ein parallelisierbares Gewebe notwendigerweise projektiveuklidisch ist. Ferner schließt man weiter auf

Satz 12: *Ist das D.V.-System eines Kurven-3-Gewebes projektiveuklidisch, so geht bei jeder Abbildung desselben auf die Geraden der Ebene das Gewebe über in drei Geradenbüschel, deren Scheitel auf einer (eventuell unendlichfernen) Geraden liegen.*

Gemäß Satz 10 sind nämlich sämtliche geraden Realisationen des Gewebes, die zu einer Lösung λ von (II, 23) gehören, projektiv äquivalent. Dies gilt speziell auch für die Lösung $\lambda = 0$, das heißt für die geraden Realisationen des D.V.-Systems.

Der entsprechende Satz für Flächen-4-Gewebe im P_3 lautet:

Satz 12a: *Ist das D.V.-System eines Flächen-4-Gewebes im P_3 projektiveuklidisch, so führen die zugehörigen ebenen Realisationen das Gewebe über in Ebenenbüschel-4-Gewebe, deren Trägergeraden den Rang 3 haben*[26]).

Zum Beweise betrachten wir eine Abbildung des D.V.-Systems auf die Geraden des P_3[27]). Das Gewebe wird dabei zu einem *Ebenengewebe.* Die 2-dimensionalen Schnittgebilde auf den Gewebeebenen bestehen dann gemäß Satz 11 je aus drei Geradenbüscheln, deren Scheitel auf einer Geraden liegen. Daraus schließt man aber, daß das Ebenen-4-Ge-

---

[25]) Vgl. etwa *Schwerdt, H.*, Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924, S. 136.

[26]) Als *Rang* einer Anzahl Geraden bezeichnet man den *Rang der Matrix* ihrer *Plückerschen* Koordinaten.

[27]) Mit dem Gewebe ist natürlich auch das quasigeodätische System nur in einem Gebiete G des P_3 definiert, so daß man im strengen Sinne höchstens von einer Abbildung auf die Geraden eines Teilgebietes G^* des P_3 sprechen kann. Durch Hinzunahme der restlichen Geraden des P_3 läßt sich aber das quasigeodätische System über G^* hinaus fortsetzen.

webe vier Ebenenbüschel umfaßt. Seine *Träger* seien die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4. Bezüglich ihrer gegenseitigen Lage sind folgende Fallunterscheidungen zu machen:

a) Die g_i sind paarweise *windschief*. Dann gehören sie notwendigerweise derselben *Erzeugendenschar* einer *Regelfläche zweiten Grades* an.

b) Zwei Träger, etwa g_1 und g_2, schneiden sich. Von g_3 und g_4 wird nur verlangt, daß sie g_1 und g_2 nicht treffen. In diesem Falle sind auch g_3 und g_4 miteinander inzident, und es liegen die Schnittpunkte von g_1, g_2 und g_3, g_4 auf der Schnittgeraden der durch die beiden Geradenpaare aufgespannten Ebenen.

c) Drei Träger liegen in einer Ebene α. Dann liegt auch der restliche Träger in α und es bilden die 4 Träger ein *Vierseit*. Die Gewebe von diesem Typus sind parallelisierbar; befördert man nämlich die Ebene dieses Vierseits durch eine Projektivität ins Unendlichferne, so gehen die 4 Ebenenbüschel in 4 Parallelebenenscharen über[28]).

Weitere Möglichkeiten bestehen nicht.

Da die Trägergeraden in allen drei Fällen stets den Rang 3 haben[29]), ist unser Satz bewiesen. Die 3 festgestellten Gewebetypen sind sogar die allgemeinsten Ebenenbüschel-4-Gewebe vom Rang 3. Es gibt nämlich neben a), b) und c) nur noch 2 weitere Möglichkeiten für die gegenseitige Lage von 4 Geraden vom Rang 3.

d) g_1, g_2, g_3, g_4 schneiden sich in einem Punkt.

e) g_1, g_2, g_3, g_4 liegen in einer Ebene, aber ohne ein Vierseit zu bilden.

Da aber für die beiden Konfigurationen d) und e) die Gewebebedingungen nicht erfüllt sind, erzeugen die ebenen Bilder unserer Gewebe mit projektiveuklidischem D. V.-System genau die Klasse der ebenen 4-Gewebe vom Rang 3.

Ein Analogon zu den Sätzen 11 und 12 für höhere Dimensionen ist noch nicht gefunden. Es läßt sich höchstens aussagen, daß ein $(n+1)$-Gewebe, dessen D.V.-System projektiveuklidisch ist, topologisch äquivalent einem Hyperebenen-$(n+1)$-Gewebe ist, dessen sämtliche Schnitt-Flächen-4-Gewebe in den 3-dimensionalen Schnittgebilden Ebenenbüschel-4-Gewebe vom Rang 3 sind. Beachtenswert ist, daß für $n > 2$ ein projektiveuklidisches D.V.-System zur Charakterisierung der parallelisierbaren Gewebe nicht mehr genügt.

---

[28]) *Blaschke* bezeichnet diesen Typus auf Grund von Schließungsfiguren als *Achtflachgewebe*.

[29]) Eine Aufzählung der Geradenquadrupel vom Rang 3 findet sich bei *Blaschke, W.*, Projektive Geometrie, S. 97/98, Wolfenbüttel-Hannover 1947.

2. *Ein Satz über Hyperflächensechseckgewebe.*

Wie weiter vorn bereits bemerkt wurde, werden die parallelisierbaren Kurven-3-Gewebe in der Ebene infolge der Existenz einer Schließungsfigur als Sechseckgewebe bezeichnet. Wenn nun in diesem Abschnitt von Sechseckgeweben die Rede ist, so wollen wir uns dabei eher diese Schließungsfigur vor Augen halten, als die Abbildbarkeit auf Parallelenscharen.

Definition: *Sind sämtliche 2-dimensionalen Schnittgewebe eines Hyperflächen-$(n+1)$-Gewebes Sechseckgewebe, so heißen wir dieses ein Hyperflächensechseck-Gewebe.*

Für diesen Gewebetypus soll nun im folgenden eine geometrische Eigenschaft nachgewiesen werden.

Wir betrachten zunächst ein beliebiges $(n+1)$-Gewebe im P_n $(n>2)$. Für seine Hyperflächenscharen setzen wir die Symbole

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n+1} \,. \tag{4}$$

Es werde ein beliebiges Netz herausgegriffen, etwa das Netz, bestehend aus den Scharen

$$\mathfrak{S}_{j_1}, \mathfrak{S}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{j_n} \,. \tag{5}$$

$\overset{(a)}{w}_\mu$ sei das Gradientenfeld von $\mathfrak{S}_{j_a}$ und $\overset{(a)}{v}{}^\mu$ die Schnittkongruenz der Scharen $\mathfrak{S}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{j_{a-1}}, \mathfrak{S}_{j_{a+1}} \ldots, \mathfrak{S}_{j_n}$. (6)

Über dem Gewebe (4) errichten wir nun das D.V.-System. $P_{\lambda\mu\nu}{}^\omega$ sei dessen Projektivkrümmungstensor.

Satz: *Es seien a und b zwei verschiedene feste Indizes. Wenn in einem Gewebenetz der Pseudoskalar*

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} \overset{(a)}{v}{}^{\lambda} \overset{(b)}{v}{}^{\mu} \overset{(c)}{v}{}^{\nu} \overset{(c)}{w}_{\omega} \tag{7}$$

für einen von a und b verschiedenen Index c verschwindet, dann für alle andern ebenfalls.

Zum Beweise ziehen wir ein spezielles Koordinatensystem heran; das ausgezeichnete Netz sei gerade das Koordinatennetz. Für den P-Tensor liefert dann eine einfache Rechnung:

$$\left.\begin{array}{ll} P_{ijk}{}^h = 0 & \textit{wenn } h \textit{ nicht mit einem unteren Index übereinstimmt.} \\[2ex] P_{ijk}{}^h = \dfrac{1}{2(n+1)}\,\partial_i \partial_j \ln\left(\dfrac{\Phi_j}{\Phi_i}\right) & \textit{für alle Tripel voneinander verschiedener Indizes } i, j \textit{ und } k. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Weiter wird

$$\begin{array}{ll} \overset{(1)}{w}_i = (1, 0, \ldots, 0 & \overset{(1)}{v}{}^i = (1, 0, \ldots, 0) \\ \overset{(2)}{w}_i = (0, 1, \ldots, 0) & \overset{(2)}{v}{}^i = (0, 1, \ldots, 0) \\ & \\ \overset{(n)}{w}_i = (0, 0, \ldots, 1) & \overset{(n)}{v}{}^i = (0, 0, \ldots, 1) \end{array} \tag{9}$$

Somit ergibt sich für $i \neq k$ und $j \neq k$

$$P_{\lambda \mu \nu}{}^{\omega} \overset{(i)}{v}{}^{\lambda} \overset{(j)}{v}{}^{\mu} \overset{(k)}{v}{}^{\nu} \overset{(k)}{w}_{\omega} = P_{i j k}{}^{k} . \tag{10}$$

Gemäß (8) ist aber die rechte Seite vom Index k unabhängig, wenn nur $k \neq i$ und $k \neq j$ ist. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Satz: *Wenn in einem Gewebenetz sämtliche Pseudoskalare* (7) *verschwinden, dann verschwinden diese auch in allen andern Netzen.*

Wir nehmen etwa an, daß in unserem Koordinatennetz (9) sämtliche Pseudoskalare verschwinden, also

$$P_{i j k}{}^{k} = 0 \quad \textit{für} \quad i \neq k \quad \textit{und} \quad j \neq k . \tag{11}$$

Betrachten wir nun ein anderes Netz, etwa dasjenige aus den Scharen

$$dx^2 = 0, \quad dx^3 = 0, \ldots, dx^n = 0, \quad d\Phi = 0.$$

Für dieses wird

$$\begin{array}{ll} \overset{(1)}{w}_i = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) & \overset{(1)}{v}{}^i = (\ 1\ ,\ 0\ , \ldots, 0) \\ \overset{(2)}{w}_i = (\ 0\ ,\ 1\ , \ldots, 0\ ) & \overset{(2)}{v}{}^i = (\Phi_2, -\Phi_1, \ldots, 0) \\ & \\ \overset{(n)}{w}_i = (\ 0\ ,\ 0\ , \ldots, 1\ ) & \overset{(n)}{v}{}^i = (\Phi_n, 0, \ldots, -\Phi_1) \end{array} \tag{12}$$

Infolge des vorhergehenden Satzes haben wir nur zu zeigen, daß

$$P_{i j k}{}^{h} \overset{(a)}{v}{}^{i} \overset{(b)}{v}{}^{j} \overset{(c)}{v}{}^{k} \overset{(c)}{w}_{h} = 0$$

für alle möglichen a und b zu einem festen, von a und b verschiedenen c. Dabei treten als Folge der Symmetrien von $P_{i j k}{}^{h}$ und als Folge der speziellen Gestalt von (12) nur zwei wesentlich verschiedene Fälle auf:

α) $a = 1$, b und c beliebig.

$$\sum_{i,j,k,h} P_{ijk}{}^h \overset{(1)}{v^i} \overset{(b)}{v^j} \overset{(c)}{v^k} \overset{(c)}{w_h} = -\Phi_1 \Phi_c \underbrace{P_{1b1}{}^k}_{\substack{0 \\ \text{laut (8)}}} + \Phi_1^2 \underbrace{P_{1bc}{}^c}_{\substack{0 \\ \text{laut (11)}}} = 0 .$$

β) a, b und c von 1 verschieden.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,h} P_{ijk}{}^h \overset{(a)}{v^i} \overset{(b)}{v^j} \overset{(c)}{v^k} \overset{(c)}{w_k} = &- \Phi_a \Phi_1 \Phi_c P_{1b1}{}^c + \Phi_1^2 \Phi_a P_{1bc}{}^c \\ &- \Phi_1 \Phi_b \Phi_c P_{ab1}{}^c + \Phi_1^2 \Phi_b P_{abc}{}^c \\ &+ \Phi_1^2 \Phi_c P_{ab1}{}^c - \Phi_1^3 P_{abc}{}^c = 0 ,\end{aligned}$$

da auch hier die einzelnen Summanden verschwinden.

Gehen wir nun über zu unserm angekündigten Satz über Hyperflächensechseckgewebe.

Satz 13: *Sind in einem $(n+1)$-Gewebe die $\binom{n}{2}$ Schnittkurvengewebe in den durch n Gewebescharen aufgespannten 2-dimensionalen Schnittgebilden Sechseckgewebe, so sind auch die restlichen $\binom{n}{3}$ derartigen Schnittkurvengewebe Sechseckgewebe und es liegt ein Hyperflächensechseckgewebe vor*[30]).

Der Beweis folgt direkt aus den vorangehenden Betrachtungen. Sind etwa die Schnittkurvengewebe in den durch das Koordinatennetz erzeugten R^2 Sechseckgewebe, so ist

$$\partial_i \, \partial_k \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \quad ^{31)} .$$

Dann verschwinden gemäß (8) und (11) sämtliche Pseudoskalare (7) des Koordinatennetzes; laut dem letzten Hilfssatz verschwinden aber in diesem Falle die Pseudoskalare (7) auch in allen übrigen Netzen des Gewebes. Daraus folgt wiederum, daß sämtliche Schnittkurven-3-Gewebe Sechseckgewebe sind und es liegt daher ein Hyperflächensechseckgewebe vor.

---

[30]) Für Flächen-4-Gewebe im P_3 ist dieser Satz erstmals von *J. Dubourdieu* angegeben worden. Vgl. [1], S. 185. Seine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen gelang *H. Aue.* Vergleiche Mitt. Math. Ges. Hamburg 7, 1938, S. 367/399.

[31]) Differentialgleichung von *de Saint-Robert* für die Projektion des Gradienten von Φ in eine bestimmte R^2 hinein.

3. *Parallelisierbare* $(n+1)$*-Gewebe in Dimensionen* $n \geqq 3$.

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, genügt ein projektiv-euklidisches D.V.-System für die Abbildbarkeit auf $(n+1)$ Parallelhyperebenescharen nicht.

Ein Kovektorfeld p_λ ist *integrabel*, das heißt Vielfaches eines Gradientenfeldes, wenn

$$p_{[\lambda} \nabla_\mu p_{\nu]} = 0 \text{ [32]} \ . \tag{13}$$

Unser $(n+1)$-Gewebe sei nun statt durch $(n+1)$ Gradientenfelder durch die entsprechende Anzahl integrabler Kovektorfelder $\overset{(a)}{p_\lambda}$ gegeben. Der Index (a) bezeichne dabei die Nummer des betreffenden Feldes. Diese Kovektorfelder seien so normiert, daß

$$\sum_{a=1}^{n+1} \overset{}{p_\lambda} = 0 \ , \tag{14}$$

was infolge der Gewebebedingungen im wesentlichen nur auf eine Art möglich ist.

Wir greifen nun durch die normierten Kovektorfelder

$$\overset{(a_1)}{p_\lambda} \, , \ \overset{(a_2)}{p_\lambda} \, , \ \ldots , \ \overset{(a_n}{p_\lambda} \ ; \qquad a_i \neq a_k$$

ein beliebiges Netz aus dem Gewebe heraus.

Definition: *Die n invariant mit dem Gewebe verknüpften Kovektorfelder $\overset{(a_k)}{q_\lambda}$, welche durch*

$$\overset{(a_k)}{q_\lambda} = \sum_{i-1}^{n} \overset{(a_i)}{p_\lambda} - (n-2) \overset{(a_k)}{p_\lambda} \ ; \quad k = 1 \, , \ldots , n \tag{15}$$

bestimmt sind, heißen ein Querfelder-System des Gewebes.

Da jedes Gewebenetz Anlaß zu einem *Querfelder-System* gibt, sind durch ein $(n+1)$-Gewebe deren $(n+1)$ festgelegt. Eine Ausnahme liegt nur für $n = 3$ vor; in diesem Falle sind alle Querfelder-Systeme identisch[33]).

Die Querfelder eines Systems sind infolge der Netzbedingungen im Gewebe *linear unabhängig*, denn die Determinante der Substitution (15) ist von Null verschieden.

---

[32]) Vgl. [2], S. 120.

[33]) Das eindeutig bestimmte Querfelder-System wird dort als *Diagonal-System* bezeichnet.

Für unser Gewebe (II, 3) hat das Querfelder-System zum Koordinatennetz die Gestalt

$$\begin{array}{l} (-(n-3)\Phi_1\ , \quad \Phi_2\ , \quad \Phi_3\ , \ldots , \quad \Phi_n\ ) \\ (\ \Phi_1\ , \quad -(n-3)\Phi_2\ , \quad \Phi_3\ , \ldots , \quad \Phi_n\ ) \\ \\ (\ \Phi_1\ , \quad \Phi_2\ , \quad \Phi_3\ , \ldots . \ -(n-3)\Phi_n) \end{array} \tag{16}$$

Für die Integrabilitätsbedingungen des i-ten Feldes dieses Systems findet man durch einfache Rechnung

$$\partial_i \ln \left(\frac{\Phi_j}{\Phi_k}\right) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq i \quad \text{und} \quad k \neq i\ . \tag{17}$$

Satz 15: *Sind $(n-1)$ Felder eines Querfelder-Systems integrabel, so ist es auch das letzte*[34]).

Sind $(n-1)$ Querfelder integrabel, so heißt dies bei geeigneter Numerierung etwa

$$\partial_j \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \ \textit{für}\ j = 1, 2, \ldots, (n-1) \ \textit{und}\ i, k \neq j\ \cdot \tag{18}$$

Wie sich leicht bestätigen läßt, besteht für drei voneinander verschiedene Indizes i, j, k die Identität

$$\Phi_i \Phi_k \partial_j \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) + \Phi_k \Phi_j \partial_i \ln \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) + \Phi_j \Phi_i \partial_k \ln \left(\frac{\Phi_j}{\Phi_i}\right) = 0\ . \tag{19}$$

Aus (18) und (19) schließt man nun sofort, daß auch

$$\partial_n \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \quad \text{für} \quad i, k \neq n\ ,$$

das heißt es ist laut (17) auch das noch verbleibende n-te Querfeld integrabel. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Satz 16: *Existiert in einem $(n+1)$-Gewebe ein System von integrablen Querfeldern, so ist es parallelisierbar.*

Für $n = 3$ ist dieser Satz ebenfalls bekannt, denn durch die Existenz sämtlicher Diagonalflächen sind gerade die Gewebe gekennzeichnet, welche vier Parallel-Ebenenscharen topologisch äquivalent sind.

---

[34]) Für $n = 3$ ist dieser Satz bekannt. Vgl. [1], S. 177/186.

Der Beweis kann auf folgende Weise gewonnen werden. Durch eine Koordinatentransformation kann stets erreicht werden, daß das System von integrablen Querfeldern durch (16) gegeben ist und es gilt dann

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \ \textit{für sämtliche Tripel verschiedener Indizes } (i, j, k)\,. \tag{20}$$

Infolgedessen ist

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) = \partial_j \ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) + \partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = \partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right)\,.$$

Daraus schließt man, daß

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right) = T_j \tag{21}$$

für alle $j \neq i$. Mit (20) ergibt sich weiter für $k \neq j$

$$\partial_k T_j = \partial_k \partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right) = \partial_j \left(\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right)\right) = 0\ ,$$

da ja i beliebig, also von j und k verschieden gewählt werden kann. Es ist daher T_j nur eine Funktion von x^j allein, also etwa

$$T_j = \partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right) = f_j(x^j) \tag{22}$$

und entsprechend

$$T_i = \partial_i \ln\left(\frac{\Phi_j}{\Phi_i}\right) = f_i(x^i)\ ^{35})\ .$$

Daraus ergibt sich mit (20) zusammen der Ansatz

$$\ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right) = F_i(x^i) + F_j(x^j)\ ,$$

wo $F_i(x^i)$ wiederum eine Funktion von x^i allein ist. Hieraus resultiert aber die Existenz einer Abbildung

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^i)\ ^{36})\ ,$$

welche die Schar $d\Phi = 0$ in die Parallel-Hyperebenenschar

$$d\bar{x}^1 + d\bar{x}^2 + \cdots + d\bar{x}^n = 0$$

überführt, womit die Parallelisierbarkeit nachgewiesen ist.

[35]) Der untere Index i von f_i bedeutet hier die Nummer der Funktion und nicht die Ableitung nach x^1.

[36]) $\bar{x}^i$ ist nur eine Funktion von x^i allein.

Wir haben bis jetzt zur Charakterisierung des Gewebes das D.V.-System noch gar nicht beigezogen. Zunächst folgt aus der Parallelisierbarkeit des Gewebes, daß es projektiveuklidisch ist, eine Bedingung, die sicher *notwendig*, aber noch *nicht hinreichend* ist.[37]) Wir wollen nun noch zeigen, daß ein parallelisierbares Gewebe sich mittels einer andern Eigenschaft des D.V.-Systems charakterisieren läßt.

Versuchen wir etwa, die invarianten Beziehungen (20), welche die Parallelisierbarkeitsbedingungen ausdrücken, im D.V.-System zu deuten.

Bei Zugrundelegung des Repräsentanten (II, 8) heißen die Gleichungen des D.V.-Systems über unserem Gewebe

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 \sum_{s=1}^{n} \Gamma^i_{is} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt} = 0$$

mit

$$\Gamma^i_{ik} = \tfrac{1}{2}\, \partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \; ; \quad \Gamma^i_{jk} = 0 \quad \textit{sonst.}$$

Das D.-V.-System induziert in jeder Hyperfläche der Schar $\mathfrak{S}_{n+1}(d\Phi = 0)$ einen projektiven Zusammenhang, nämlich das $(n-1)$-dimensionale D.V.-System

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 \sum_{s=1}^{n} \Gamma^i_{is} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt} = 0 \ , \\ &d\Phi = \sum_{s=1}^{n} \Phi_s dx^s = 0 \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Wir projizieren nun dieses in der Umgebung eines Gewebepunktes P mittels der *Schnittkongruenz* der Scharen

$$\mathfrak{S}_i : dx^i = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

auf die Hyperfläche der Schar $\mathfrak{S}_n (dx^n = 0)$ durch den Punkt P. Die Differentialgleichungen der *Projektionen* erhalten wir durch Elimination von dx^n:

$$dx^n = -\frac{1}{\Phi_n} \sum_{s=1}^{n-1} \Phi_s\, dx^s \ .$$

[37]) Das D.V.-System eines Parallelgewebes besteht aus den Geraden des P_n.

Die ersten $(n-1)$-Gleichungen von (23) gehen dann über in

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \left(\Gamma^i_{is} - \frac{\Phi_s}{\Phi_n} \right) \Gamma^i_{in} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt} = 0$$

$$i = 1, \ldots, (n-1) \; .$$

Die Projektion des D. V.-Systems in der Schar $\mathfrak{S}_n$ ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^i_{ii} &= -\, 2 \frac{\Phi_i}{\Phi_n} \Gamma^i_{in} \\ \overline{\Gamma}^i_{ij} &= \Gamma^i_{ij} - \frac{\Phi_j}{\Phi_n} \Gamma^i_{in} \quad \textit{für} \quad i \neq j \; . \\ \overline{\Gamma}^i_{jk} &= 0 \; , \; \textit{sonst.} \end{aligned} \tag{24}$$

Die bahntreue Transformation

$$\overline{\Gamma}^{*i}_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} + \delta^i_j \, p_k + \delta^i_k \, p_j \quad \textit{mit} \quad p_k = \frac{\Phi_k}{\Phi_n} \Gamma^k_{kn}$$

führt diesen Zusammenhang in die Normalform über, und zwar ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma^{*i}_{ij} &= \Gamma^i_{ij} - \frac{\Phi_j}{\Phi_n} (\Gamma^i_{in} - \Gamma^j_{jn}) \qquad \text{für} \qquad i \neq j \\ \Gamma^{*i}_{jk} &= 0 \; , \; \textit{sonst.} \end{aligned} \tag{24}$$

Da nun aber

$$2(\Gamma^i_{ik} - \Gamma^j_{jk}) = \partial_k \ln \left(\frac{\Phi_j}{\Phi_j} \right)$$

stimmt (24) mit dem D.V.-System in der Schar $\mathfrak{S}_n$ überein, wenn

$$\partial_n \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j} \right) = 0$$

ist.

Andererseits ist diese Projektionseigenschaft bei einem parallelisierbaren Gewebe sogar im Großen erfüllt. Da sämtliche Gewebescharen $\mathfrak{S}_i$ gleichberechtigt sind, folgt daraus

Satz 17: *Die Parallelisierbarkeit eines $(n+1)$-Gewebes ist äquivalent mit der Eigenschaft, daß die Projektion des D.V.-Systems jeder Schar $\mathfrak{S}_i$ auf eine andere Schar $\mathfrak{S}_k$ mittels der Schnittkongruenz der übrigen $(n-1)$-Scharen mit dem D.V.-System in $\mathfrak{S}_k$ übereinstimmt.*

Der Inhalt von Satz 15 läßt sich jetzt ebenfalls ins D. V.-System übersetzen. Er besagt, daß für die Parallelisierbarkeit die Projektionsbeziehung zwischen einer einzigen Schar $\mathfrak{S}_{j_1}$ und den $(n-1)$ weiteren Scharen

$$\mathfrak{S}_{j_2}, \mathfrak{S}_{j_3}, \ldots, \mathfrak{S}_{j_n}$$

schon genügt. Sie ist dann für die restlichen Scharpaare $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_k$ des Gewebes automatisch erfüllt.

4. *Parallelisierbare m-Gewebe* $(m > n+1)$.

Auch für die folgenden abschließenden Betrachtungen setzen wir $n > 2$ voraus. Wir untersuchen zunächst ein $(n+2)$-Gewebe im P_n mit der Eigenschaft, daß die sämtlichen $(n+2)$ $(n+1)$-Gewebe, die durch Weglassen einer Hyperflächenschar entstehen, einzeln parallelisierbar sind. Durch geeignete Koordinatentransformation können die Differentialgleichungen eines derartigen Gewebes immer auf die Gestalt

$$\begin{aligned} dx^i &= 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{s=1}^{n} dx^s &= 0 \\ d\Phi &= 0 \end{aligned}$$

gebracht werden. Die Gewebebedingungen lauten dann

$$\Phi_i \neq 0 \quad \text{für alle } i\,, \qquad \Phi_i \neq \Phi_k \quad \text{für} \quad i \neq k\,.$$

Die Parallelisierbarkeit der einzelnen $(n+1)$-Gewebe drücken wir durch die Integrabilitätsbedingungen geeigneter Querfelder-Systeme aus. Für das Gewebe, bestehend aus dem Koordinatennetz und der Schar $d\Phi = 0$, lauten die Parallelisierbarkeitsbedingungen

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0\,, \quad \text{wenn } i, j, k \text{ voneinander verschieden}\,. \tag{25}$$

Zur Herleitung der entsprechenden Bedingungen für die restlichen $(n+1)$-Gewebe betrachten wir als Repräsentanten etwa das Gewebe mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} dx^s &= 0 \\ dx^i &= 0 \qquad i = 2, 3, \ldots, n \\ d\Phi &= 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 + \cdots + x^n \\ y^i &= x^i \quad \textit{für} \quad i \neq 1 \end{aligned} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{aligned} x^1 &= y^1 - (y^2 + \cdots + y^n) \\ x^i &= y^i \quad \textit{für} \quad i \neq 1 \end{aligned} \tag{27}$$

gehen die Gleichungen (26) über in

$$\begin{aligned} dy^i &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ d\Phi &= 0 \end{aligned}$$

und die Parallelisierbarkeitsbedingungen lauten dann

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \ln \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y^i}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y^k}} \right) = 0 \quad \textit{mit } i, j, k \textit{ voneinander verschieden.}$$

Wir setzen nun speziell $k = 1$. Infolge (27) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \ln \left(\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y^i}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y^k}} \right) = - \partial_1 \ln \left(\frac{\Phi_i - \Phi_1}{\Phi_1} \right) + \partial_j \ln \left(\frac{\Phi_i - \Phi_1}{\Phi_1} \right) = 0 \,.$$ [38]

Durch Umformung folgt daraus weiter

$$\frac{\Phi_{11}}{\Phi_i} - \frac{\Phi_{1j}}{\Phi_1} - \frac{\Phi_{i1} - \Phi_{11}}{\Phi_i - \Phi_1} + \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{1j}}{\Phi_i - \Phi_1} = 0 \,,$$

und man erhält nach einigen Zwischenrechnungen

$$\left(\frac{\Phi_{ij}}{\Phi_i} - \frac{\Phi_{1j}}{\Phi_1} \right) + \left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_1} - \frac{\Phi_{1i}}{\Phi_i} \right) = 0$$

oder

$$\partial_j \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_1} \right) + \partial_1 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right) = 0 \,.$$

Mit (25) zusammen führt dies auf

$$\partial_1 \ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right) = 0 \,.$$

---

[38]) ∂_j bedeutet Ableitung nach x^j; $\Phi_j = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^j}$.

Die Parallelisierbarkeit aller $(n+1)$-Gewebe vom Typus (26) ist daher äquivalent mit den Beziehungen

$$\partial_k \ln \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i}\right) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \ . \tag{28}$$

Dies bedeutet aber, daß das D.V.-System des $(n+1)$-Gewebes

$$\begin{aligned} dx^i &= 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ d\Phi &= 0 \end{aligned}$$

durch das Verschwinden sämtlicher *Christoffel*scher Symbole charakterisiert ist; es ist daher identisch mit den Geraden des P_n und die verbleibende Hyperebenenschar

$$\sum_{s=1}^{n} dx^s = 0$$

ist darin geodätisch. Da in unserem $(n+2)$-Gewebe keine Hyperflächenschar gegenüber den andern ausgezeichnet ist, folgt:

Jede Hyperflächenschar unseres $(n+2)$-Gewebes liegt geodätisch im D.V.-System des verbleibenden $(n+1)$-Gewebes.

Satz 18: *Ein $(n+2)$-Gewebe, in welchem jedes $(n+1)$-Tupel seiner Hyperflächenscharen einzeln parallelisierbar ist, ist gesamthaft parallelisierbar.*

Der Beweis kann leicht auf folgendem Wege gewonnen werden. Wie oben festgestellt wurde, ist der eindeutig bestimmte projektive Zusammenhang zugleich D.V.-System zu allen $(n+1)$-Geweben; infolge der Parallelisierbarkeit dieser $(n+1)$-Gewebe ist er projektiveuklidisch. Wir betrachten nun eine Abbildung, die ein $(n+1)$-Gewebe G_1 parallel macht sowie eine zweite Abbildung, die ein von G_1 verschiedenes $(n+1)$-Gewebe G_2 parallel macht. Die beiden dabei entstehenden ebenen Realisationen des projektiven Zusammenhanges sind aber *projektiv äquivalent.* Es existiert daher eine projektive Abbildung des P_n auf sich, welche die eine in die andere überführt. Da sie die n Parallel-Hyperebenenscharen, welche G_1 und G_2 gemeinsam sind, wieder in solche überführt, ist sie notwendigerweise eine Affinität. Es machen daher die beiden genannten Abbildungen das ganze $(n+2)$-Gewebe parallel.

Aus dem Beweise entnimmt man noch, daß jede Abbildung, die irgendeines der $(n+1)$-Gewebe parallel macht, zugleich auch die noch verbleibende Schar parallelisiert.

Satz 19: *Ein m-Gewebe, in welchem jedes* $(n+1)$*-Tupel von Hyperflächenscharen einzeln parallelisierbar ist, ist gesamthaft parallelisierbar.*

Zum Beweise greifen wir auf die Vorbereitungen zum Satz 18 zurück. Darnach ergibt sich, daß das D.V.-System jedes $(n+1)$-Gewebes sämtliche restlichen Gewebe-Hyperflächenscharen geodätisch enthält. Jede Abbildung, welche irgendeines der $(n+1)$-Gewebe parallel macht, führt daher auch die verbleibenden Scharen in Parallel-Hyperebenenscharen über.

Die beiden Sätze 18 und 19 sind nur für $n \geq 3$ richtig. In der Ebene tritt beispielsweise an Stelle des erstern der Satz von Mayrhofer-Reidemeister[39]).

(Eingegangen den 1. Februar 1950.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Blaschke-Bol,* Geometrie der Gewebe, Berlin 1938.
[2] *Schouten, J. A.,* Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924.
[3] *Schouten-Struik,* Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen-Batavia 1935/38.
[4] *Berwald, L.,* On the projective geometry of paths, Ann. Math. 37, 1936, S. 879 bis 898.
[5] *van Dantzig, D.,* Theorie des projektiven Zusammenhanges n-dimensionaler Räume, Math. Ann. 106, 1932, S. 400/454.
[6] *Haantjes, J.,* On the projective geometry of paths, Proc. Edinburgh Math. Soc. 5, 1937, S. 103/115.
[7] *Thomsen, G.,* Doppelverhältnis-Systeme, Abh. Hamburg 8, 1930, S. 115/122.
[8] *Schreier-Sperner,* Einführung in die analytische Geometrie II, Berlin und Leipzig 1935.
[9] *Jeger, M.,* Projektive Zusammenhänge und Gewebe, Diss. Techn. Hochschule Zürich 1949.

[39]) Vgl. [1], § 10 und § 16.