Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1950)

Artikel: Finslersche Räume mit der Grundfunktion L = ...
Autor: Moór, Arthur
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20306

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Finslersche Räume mit der Grundfunktion $L = \frac{f}{g}$

Von Arthur Moór (Szeged)

§ 1. Der Hauptskalar

L. Berwald führte in die Theorie der Finslerschen Räume die grundlegende Funktion, Hauptskalar genannt:

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{4 L^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} \right) \tag{1}$$

ein[1]), wo

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \tag{1 a}$$

die Fundamentalfunktion des Finslerschen Raumes, und

$$F_1 = \frac{1}{\dot{y}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = - \frac{1}{\dot{x}\,\dot{y}} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{y}} = \frac{1}{\dot{x}^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2} \tag{1 b}$$

bedeutet.

Im folgenden werden wir Finslersche Räume untersuchen, deren Grundfunktion die Form:

$$L = \frac{f}{g} \tag{2}$$

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k(x, y)\, \dot{x}^{n-k}\, \dot{y}^k \tag{2 a}$$

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x, y)\, \dot{x}^{n-k-1}\, \dot{y}^k \tag{2 b}$$

hat. Diejenigen Finslerschen Räume, in denen im Ausdruck von L ein homogenes Polynom von $\dot{x}, \dot{y}$ vorkommt, hat zuerst Herr J. Wegener untersucht und auf Grund ihrer Invarianten klassifiziert. Er wählte als Grundfunktion

$$L = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^{3} a_k\, \dot{x}^{3-k}\, \dot{y}^k}\,.\ ^{2)} \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. [1] und [3]. Literaturverzeichnis am Ende.

[2]) Vgl. [5].

Für die Räume mit der Grundfunktion (2) ist:

$$F_1 = \frac{1}{\dot{y}^2} \frac{f_{\dot{x}\dot{x}} g^2 - g_{\dot{x}\dot{x}} f g - 2 f_{\dot{x}} g_{\dot{x}} g + 2 g_{\dot{x}}^2 f}{g^3} =$$

$$= -\frac{1}{\dot{x}\dot{y}} \frac{f_{\dot{x}\dot{y}} g^2 - g_{\dot{x}\dot{y}} f g - f_{\dot{x}} g_{\dot{y}} g - f_{\dot{y}} g_{\dot{x}} g + 2 g_{\dot{x}} g_{\dot{y}} f}{g^3} =$$

$$= \frac{1}{\dot{x}^2} \frac{f_{\dot{y}\dot{y}} g^2 - g_{\dot{y}\dot{y}} f g - 2 f_{\dot{y}} g_{\dot{y}} g + 2 g_{\dot{y}}^2 f}{g^3} \tag{4}$$

also F_1 hat die Form:

$$F_1 = \frac{A}{g^3} \tag{5}$$

wo A die Funktion:

$$A = \frac{1}{\dot{y}^2} (f_{\dot{x}\dot{x}} g^2 - g_{\dot{x}\dot{x}} f g - 2 f_{\dot{x}} g_{\dot{x}} g + 2 g_{\dot{x}}^2 f) =$$

$$= \frac{1}{\dot{x}\dot{y}} (g_{\dot{x}\dot{y}} f g - f_{\dot{x}\dot{y}} g^2 + f_{\dot{x}} g_{\dot{y}} g + f_{\dot{y}} g_{\dot{x}} g - 2 f g_{\dot{x}} g_{\dot{y}}) =$$

$$= \frac{1}{\dot{x}^2} (f_{\dot{y}\dot{y}} g^2 - g_{\dot{y}\dot{y}} f g - 2 f_{\dot{y}} g_{\dot{y}} g + 2 g_{\dot{y}}^2 f) \tag{5a}$$

bedeutet. Es ist also

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{4 f^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}}} \left\{ g \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} & f_{\dot{y}} \\ A_{\dot{x}} & A_{\dot{y}} \end{vmatrix} - 3A \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} & f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} & g_{\dot{y}} \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} g_{\dot{x}} & g_{\dot{y}} \\ A_{\dot{x}} & A_{\dot{y}} \end{vmatrix} \right\} . \tag{6}$$

§ 2. Besondere Fälle

Wir werden jetzt spezielle Fälle untersuchen:

I. $n = 2$.

Es ist jetzt

$$f = a_0 \dot{x}^2 + 2 a_1 \dot{x} \dot{y} + a_2 \dot{y}^2$$
$$g = b_0 \dot{x} + b_1 \dot{y}$$
$$A = 2(a_0 b_1^2 - 2 a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2) = \text{konst.} \tag{7}$$

(6) gibt für J die Gleichung:

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -\frac{3}{4} \frac{A^{-\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} \cdot \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} & f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} & g_{\dot{y}} \end{vmatrix} . \tag{8}$$

Die Funktion

$$C_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} g_{\dot{y}} \end{vmatrix} = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, \dot{x} + (b_1 a_1 - b_0 a_2)\, \dot{y} \tag{9}$$

ist eine Kovariante der Formen f, g, nämlich die Funktionaldeterminante [3]).

Durch $J = 0$ sind die Riemannschen Räume charakterisiert [4]), bei denen also der Maßtensor g_{ik} allein von x, y abhängt. Aus (8) bekommt man für J die Bedingung:

$$2\, C_1 = \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} g_{\dot{y}} \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{10}$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$a_0 \dot{x}^2 + 2 a_1 \dot{x}\, \dot{y} + a_2 \dot{y}^2 = \left[\frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y}\right] \cdot \left[b_0 \dot{x} + b_1 \dot{y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{b_0^2} (a_0 b_1^2 - 2 a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2)\, \dot{y}^2 \tag{11}$$

ist immer erfüllt. Besteht die Gleichung

$$A = 0$$

so bekommt man

$$a_0 \dot{x}^2 + 2 a_1 \dot{x}\, \dot{y} + a_2 \dot{y}^2 = \left[\frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y}\right] \left[b_0 \dot{x} + b_1 \dot{y}\right]$$

und das Bogenelement wird

$$L = \frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y} \tag{11a}$$

dann ist J unbestimmt. $J = \frac{0}{0}$. [5])

Aus der Gleichung (10) folgt

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$$
$$b_1 a_1 - b_0 a_2 = 0$$

oder

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

also

$$a_0 a_2 = a_1^2 \ , \quad b_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \cdot b_1 \ .$$

---

[3]) Vgl. [4]. [4]) Vgl. [2].

[5]) Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn $F_1 = 0$ und somit L die Form

$$L = a_0 \dot{x} + a_1 \dot{y} \qquad (a_i = a_i(x, y))$$

hat.

Es wird aber auch in diesem Falle $A = 0$, J ist also wieder unbestimmt.

Es wird jetzt

$$f = (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y})^2$$

$$g = b_1 \left(\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\,\dot{x} + \dot{y}\right) = \frac{b_1}{\sqrt{a_2}} (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y}) \ .$$

Die Grundfunktion wird also

$$L = \frac{\sqrt{a_2}}{b_1} (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y}) \ . \tag{12}$$

Das Bogenelement ist infolgedessen vom selben Typ wie bei (11a).

Wir werden nun die durch $J =$ konst. charakterisierten Räume, die sogenannten affinzusammenhängenden Räume, untersuchen [6]).

Nach (8) und (9) ist dazu notwendig und hinreichend (es ist nämlich wie schon erwähnt wurde, $A =$ konst.), daß

$$f^{\frac{1}{2}} = B C_1 \qquad | \, B = \text{konst.} \, |$$

sei, also

$$f = B^2 C_1^2 \ . \tag{13}$$

Aus (13) bekommt man wegen (9):

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)^2 = \frac{1}{B^2} a_0 \tag{14a}$$

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(b_1 a_1 - b_0 a_2) = \frac{1}{B^2} a_1 \tag{14b}$$

$$(a_1 b_1 - b_0 a_2)^2 = \frac{1}{B^2} a_2 \ . \tag{14c}$$

Nach den Gleichungen (14) besteht die Identität:

$$a_1 = \sqrt{a_0 a_2} \ . \tag{15}$$

Setzt man den Wert von (15) in (14a), (14b) und (14c) ein, so bekommt man aus diesen Gleichungen die einzige Identität:

$$\sqrt{a_0}\, b_1 - \sqrt{a_2}\, b_0 = B^{-1} \ . \tag{16}$$

---

[6]) Vgl. [1], § 4.

Die Form der Grundfunktion ist demnach:

$$L = \frac{(\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y})^2}{b_0\,\dot{x} + \dfrac{B^{-1} + \sqrt{a_2}\,b_0}{\sqrt{a_0}}\,\dot{y}} = \frac{(C_0\,\dot{x} + C_1\,\dot{y})^2}{d_0\,\dot{x} + d_1\,\dot{y}}\,. \tag{17}$$

Es ist also nach (7) und (16) unter Beachtung von (15) $A = 2B^{-2}$, das heißt nach (8)

$$J = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\,. \tag{18}$$

II. $n = 3$.

Es ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} f &= a_0\,\dot{x}^3 + 3a_1\,\dot{x}^2\,\dot{y} + 3a_2\,\dot{x}\,\dot{y}^2 + a_3\,\dot{y}^3 \\ g &= b_0\,\dot{x}^2 + 2b_1\,\dot{x}\,\dot{y} + b_2\,\dot{y}^2 \\ A &= (6a_2\,b_0^2 - 2a_0\,b_0\,b_2 - 12a_1\,b_0\,b_1 + 8a_0\,b_1^2)\,\dot{x}^3 + \\ &\quad + (6a_3\,b_0^2 + 12a_0\,b_1\,b_2 - 18a_1\,b_0\,b_2)\,\dot{x}^2\,\dot{y} + \\ &\quad + (-18a_2\,b_0\,b_2 + 12a_3\,b_0\,b_1 + 6a_0\,b_2^2)\,\dot{x}\,\dot{y}^2 + \\ &\quad + (-12a_2\,b_1\,b_2 + 8a_3\,b_1^2 - 2a_3\,b_0\,b_2 + 6a_1\,b_2^2)\,\dot{y}^3\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Einteilung der Formen dritter Ordnung können wir mit Hilfe der Hesseschen Kovariante Δ und der Diskriminante R ausführen. Es ist

$$\Delta = \tfrac{1}{6}\{f_{\dot{x}\dot{x}}\,f_{\dot{y}\dot{y}} - f_{\dot{x}\dot{y}}^2\} = (a_0 a_2 - a_1^2)\,\dot{x}^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\,\dot{x}\,\dot{y} + (a_1 a_3 - a_2^2)\,\dot{y}^2$$

$$R = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2\,.$$

1. $\Delta = 0$.

Verschwinden die Koeffizienten von Δ identisch, so ist auch $R = 0$ und f hat die Form:

$$f = (C_0\,\dot{x} + C_1\,\dot{y})^3\,. \tag{20}$$

2. $R = 0$, $\Delta \neq 0$.

In diesem Falle hat f einen zweifachen Faktor:

$$f = (a_0\,\dot{x} + a_1\,\dot{y})^2\,(c_0\,\dot{x} + c_1\,\dot{y})\,. \tag{21}$$

3. $R \neq 0$, $\Delta \neq 0$.

Dies ist der allgemeinste Fall; f hat drei verschiedene Faktoren:

$$f = (a_0\,\dot{x} + a_1\,\dot{y})\,(c_0\,\dot{x} + c_1\,\dot{y})\,(d_0\,\dot{x} + d_1\,\dot{y})\ ^{7)}\,. \tag{22}$$

---

[7]) Vgl. [4].

Der Fall 1. Wählen wir für Parameterlinien $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ die Nullinien von f und g. Es muß angenommen werden, daß einer der Faktoren von g von denjenigen des f verschieden ist, widrigenfalls bekommt man eine Riemannsche Geometrie (z.B. Gl. (12)).

Es reduziert sich also L wegen der Wahl der Parameterlinien auf:

$$L = \frac{f}{g} = \frac{a_0 \dot{x}^3}{2 b_1 \dot{x}\, \dot{y} + b_2 \dot{y}^2} \quad . \tag{23}$$

Nach (19) und (23) bekommt man

$$A = 8 a_0 b_1^2 \dot{x}^3 + 12 a_0 b_1 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + 6 a_0 b_2^2 \dot{x}\, \dot{y}^2 \tag{24}$$

und

$$A^{\frac{3}{2}} = a_0 f^{\frac{1}{2}} (8 b_1^2 \dot{x}^2 + 12 b_1 b_2 \dot{x}\, \dot{y} + 6 b_2^2 \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \quad . \tag{24 a}$$

Der Hauptskalar ist in diesem Falle nach (6)

$$J = -3 \frac{(b_1 \dot{x} + b_2 \dot{y})\,(8 b_1^2 \dot{x}^2 + 10 b_1 b_2 \dot{x}\, \dot{y} + 5 b_2^2 \dot{y}^2)}{(8 b_1^2 \dot{x}^2 + 12 b_1 b_2 \dot{x}\, \dot{y} + 6 b_2^2 \dot{y}^2)^{3/2}} \quad .$$

Es ist $J = \text{konst.}$ für $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$. $b_1 = 0$ gibt für J den Wert

$$J = -\frac{5}{2^{3/2}\, 3^{1/2}} \quad . \tag{24 b}$$

Der Fall $b_2 = 0$ ist nach (23) von demselben Typ wie (17). J hat den in der Gleichung (18) gegebenen Wert.

Der Fall 2. In diesem Falle wählen wir für Parameterlinien $x = \text{konst.}$ $y = \text{konst.}$ die Nullinien von f (Gleichung 21). Dann wird $a_0 = a_3 = 0$. Wegen $R = 0$ bekommt man $a_2 = 0$, also für die Grundfunktion die Gleichung

$$L = \frac{3 a_1 \dot{x}^2 \dot{y}}{b_0 \dot{x}^2 + 2 b_1 \dot{x}\, \dot{y} + b_2 \dot{y}^2} \quad . \tag{25}$$

(Aus $R = 0$ könnte man auch auf $a_1 = 0$ schließen, aber das gibt denselben Typ wie $a_2 = 0$.) Es ist nach (19):

$$A = -12 a_1 b_0 b_1 \dot{x}^3 - 18 a_1 b_0 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + 6 a_1 b_2^2 \dot{y}^3 \quad .$$

Der Hauptskalar wird

$$J = \frac{3}{2\sqrt{2}} \dot{y}^{-\frac{1}{2}} (-2 b_0 b_1 \dot{x}^3 - 3 b_0 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + b_2^2 \dot{y}^3)^{-\frac{3}{2}} \{ -b_0^2 b_1 \dot{x}^5 +$$

$$+ (2 b_0 b_1^2 - 4 b_0^2 b_2) \dot{x}^4 \dot{y} + 3 b_0 b_1 b_2 \dot{x}^3 \dot{y}^2 + 5 b_0 b_2^2 \dot{x}^2 \dot{y}^3 - b_2^3 \dot{y}^5 \} \quad . \tag{26}$$

Ist $b_0 = b_1 = 0$, dann ist (25) identisch mit (17) und (26) geht in (18) über. In diesem Falle ist also $J =$ konst.

In anderen Fällen ist J eine veränderliche.

Es sei noch bemerkt: wenn die Grundfunktion die Form:

$$L = \frac{a\,\dot{x}^n}{b\,\dot{y}^{n-1}} \tag{27}$$

hat, oder auf diese Form transformierbar ist, dann ist der Hauptskalar eine Konstante. Es ist

$$J = -\frac{2n-1}{2\sqrt{n(n-1)}}\,. \tag{28}$$

((28) gibt natürlich für $n = 2, 3$ für J die in (18) und (24b) gegebenen Werte.)

§ 3. Der Krümmungsskalar

Den Krümmungsskalar [8]) werden wir nur für die Grundfunktion (27) berechnen. Es ist ganz allgemein:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{L^2}\Bigg\{&\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\dot{y}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial\dot{x}}\right)\dot{y} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\dot{y}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial\dot{x}}\right)\dot{x} + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}}\right)\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{y}^2}\right)\psi - \\ &- \tfrac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right)^2 + 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{y}}\right)^2\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{29}$$

wo

$$\varphi = \frac{1}{LF_1}\left\{\dot{x}\,F_1\left(\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y}\,\frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\,\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{y}\,\partial x}\right)\right\} \tag{30 a}$$

$$\psi = \frac{1}{LF_1}\left\{\dot{y}\,F_1\left(\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y}\,\frac{\partial L}{\partial y}\right) - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\,\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{y}\,\partial x}\right)\right\}. \tag{30 b}$$

Hat die Grundfunktion die Form (27), so bekommt man nach den Gleichungen (30a) und (30b)

$$\varphi = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{a}{b}\dot{x}^2\,, \qquad \psi = -\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{a}{b}\dot{y}^2\,.$$

---

[8]) Vgl. [1].

Der Krümmungsskalar wird nach (29)

$$\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{n(n-1)} \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{a}{b} \cdot \frac{\dot{y}^{2n-1}}{\dot{x}^{2n-1}} .$$

Hat die Funktion $\log \frac{a}{b}$ die Form:

$$\log \frac{a}{b} = \alpha(x) + \beta(y) ,$$

so wird $\mathfrak{K} = 0$ und (27) bestimmt (wegen $J =$ konst.) eine Minkowskische Geometrie [9]).

(Eingegangen den 3. April 1949.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *L. Berwald*, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles Journal 156 (1927) 191—222.

[2] *L. Berwald*, Über Finslersche und Cartansche Geometrie I, Mathematica 17 (1941) 34—58.

[3] *L. Berwald*, On Finsler and Cartan Geometries III, Annals Mathematics 42 (1941) 84—112.

[4] *A. Clebsch*, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, Verlag B. G. Teubner.

[5] *J. M. Wegener*, Untersuchungen über Finslersche Räume, Wetensch. Amsterdam Proc. 38 (1935) 949—955.

[9]) Vgl. [3].