Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 24 (1950)

Artikel: Finslersche Räume mit der Grundfunktion L = ...

Autor: Moór, Arthur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20306

Finslersche Räume mit der Grundfunktion $L=\frac{f}{g}$

Von Arthur Moór (Szeged)

§ 1. Der Hauptskalar

L. Berwald führte in die Theorie der Finslerschen Räume die grundlegende Funktion, Hauptskalar genannt:

$$J(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{4L^{\frac{1}{2}}F_1^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}}\right) \tag{1}$$

ein[1]), wo

$$L = L(x,y,\dot{x},\dot{y}) \tag{1a}$$

die Fundamentalfunktion des Finslerschen Raumes, und

$$F_1 = \frac{1}{\dot{y}^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\dot{x}\dot{y}}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}} = \frac{1}{\dot{x}^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2} \tag{1b}$$

bedeutet.

Im folgenden werden wir Finslersche Räume untersuchen, deren Grundfunktion die Form:

$$L = \frac{f}{g} \tag{2}$$

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k(x,y)\,\dot{x}^{n-k}\,\dot{y}^k \tag{2a}$$

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x,y)\,\dot{x}^{n-k-1}\,\dot{y}^k \tag{2b}$$

hat. Diejenigen Finslerschen Räume, in denen im Ausdruck von L ein homogenes Polynom von $\dot{x}, \dot{y}$ vorkommt, hat zuerst Herr J. Wegener untersucht und auf Grund ihrer Invarianten klassifiziert. Er wählte als Grundfunktion

$$L = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^{3} a_k\,\dot{x}^{3-k}\,\dot{y}^k}. \text{ [2])} \tag{3}$$

[1]) Vgl. [1] und [3]. Literaturverzeichnis am Ende. [2]) Vgl. [5].

Für die Räume mit der Grundfunktion (2) ist:

$$F_1 = \frac{1}{\dot y^2}\,\frac{f_{\dot x \dot x}\, g^2 - g_{\dot x \dot x}\, f g - 2 f_{\dot x}\, g_{\dot x}\, g + 2 g_{\dot x}^2 f}{g^3} =$$

$$= -\frac{1}{\dot x \dot y}\,\frac{f_{\dot x \dot y}\, g^2 - g_{\dot x \dot y}\, f g - f_{\dot x}\, g_{\dot y}\, g - f_{\dot y}\, g_{\dot x}\, g + 2 g_{\dot x}\, g_{\dot y}\, f}{g^3} =$$

$$= \frac{1}{\dot x^2}\,\frac{f_{\dot y \dot y}\, g^2 - g_{\dot y \dot y}\, f g - 2 f_{\dot y}\, g_{\dot y}\, g + 2 g_{\dot y}^2 f}{g^3} \tag{4}$$

also F_1 hat die Form:

$$F_1 = \frac{A}{g^3} \tag{5}$$

wo A die Funktion:

$$A = \frac{1}{\dot y^2}\left(f_{\dot x \dot x}\, g^2 - g_{\dot x \dot x}\, f g - 2 f_{\dot x}\, g_{\dot x}\, g + 2 g_{\dot x}^2 f\right) =$$

$$= \frac{1}{\dot x \dot y}\left(g_{\dot x \dot y}\, f g - f_{\dot x \dot y}\, g^2 + f_{\dot x}\, g_{\dot y}\, g + f_{\dot y}\, g_{\dot x}\, g - 2 f g_{\dot x}\, g_{\dot y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dot x^2}\left(f_{\dot y \dot y}\, g^2 - g_{\dot y \dot y}\, f g - 2 f_{\dot y}\, g_{\dot y}\, g + 2 g_{\dot y}^2 f\right) \tag{5a}$$

bedeutet. Es ist also

$$J(x, y, \dot x, \dot y) = -\frac{1}{4 f^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}}}\left\{ g \begin{vmatrix} f_{\dot x} & f_{\dot y} \\ A_{\dot x} & A_{\dot y} \end{vmatrix} - 3A \begin{vmatrix} f_{\dot x} & f_{\dot y} \\ g_{\dot x} & g_{\dot y} \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} g_{\dot x} & g_{\dot y} \\ A_{\dot x} & A_{\dot y} \end{vmatrix} \right\}. \tag{6}$$

§ 2. Besondere Fälle

Wir werden jetzt spezielle Fälle untersuchen:

I. $n = 2$.

Es ist jetzt

$$f = a_0\, \dot x^2 + 2 a_1\, \dot x\, \dot y + a_2\, \dot y^2$$

$$g = b_0\, \dot x + b_1\, \dot y$$

$$A = 2\left(a_0 b_1^2 - 2 a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2\right) = \text{konst.} \tag{7}$$

(6) gibt für J die Gleichung:

$$J(x, y, \dot x, \dot y) = -\frac{3}{4}\,\frac{A^{-\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} \cdot \begin{vmatrix} f_{\dot x} & f_{\dot y} \\ g_{\dot x} & g_{\dot y} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Die Funktion

$$C_1 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} g_{\dot{y}} \end{vmatrix} = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, \dot{x} + (b_1 a_1 - b_0 a_2)\, \dot{y} \tag{9}$$

ist eine Kovariante der Formen f, g, nämlich die Funktionaldeterminante [3]).

Durch $J = 0$ sind die Riemannschen Räume charakterisiert [4]), bei denen also der Maßtensor g_{ik} allein von x, y abhängt. Aus (8) bekommt man für J die Bedingung:

$$2\, C_1 = \begin{vmatrix} f_{\dot{x}} f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} g_{\dot{y}} \end{vmatrix} = 0 \; . \tag{10}$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$a_0 \dot{x}^2 + 2 a_1 \dot{x} \dot{y} + a_2 \dot{y}^2 = \left[\frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y}\right] \cdot \left[b_0 \dot{x} + b_1 \dot{y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{b_0^2} (a_0 b_1^2 - 2 a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2)\, \dot{y}^2 \tag{11}$$

ist immer erfüllt. Besteht die Gleichung

$$A = 0$$

so bekommt man

$$a_0 \dot{x}^2 + 2 a_1 \dot{x} \dot{y} + a_2 \dot{y}^2 = \left[\frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y}\right] \left[b_0 \dot{x} + b_1 \dot{y}\right]$$

und das Bogenelement wird

$$L = \frac{a_0}{b_0} \dot{x} + \left(\frac{2 a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}\right) \dot{y} \tag{11a}$$

dann ist J unbestimmt. $J = \frac{0}{0}$. [5])

Aus der Gleichung (10) folgt

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$$
$$b_1 a_1 - b_0 a_2 = 0$$

oder

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

also

$$a_0 a_2 = a_1^2 \, , \quad b_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \cdot b_1 \; .$$

---

[3]) Vgl. [4]. [4]) Vgl. [2].

[5]) Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn $F_1 = 0$ und somit L die Form

$$L = a_0 \dot{x} + a_1 \dot{y} \qquad (a_i = a_i(x, y))$$

hat.

Es wird aber auch in diesem Falle $A = 0$, J ist also wieder unbestimmt.

Es wird jetzt

$$f = (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y})^2$$

$$g = b_1 \left(\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\,\dot{x} + \dot{y}\right) = \frac{b_1}{\sqrt{a_2}} (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y}) \; .$$

Die Grundfunktion wird also

$$L = \frac{\sqrt{a_2}}{b_1} (\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y}) \; . \tag{12}$$

Das Bogenelement ist infolgedessen vom selben Typ wie bei (11a).

Wir werden nun die durch $J =$ konst. charakterisierten Räume, die sogenannten affinzusammenhängenden Räume, untersuchen [6]).

Nach (8) und (9) ist dazu notwendig und hinreichend (es ist nämlich wie schon erwähnt wurde, $A =$ konst.), daß

$$f^{\frac{1}{2}} = B C_1 \qquad | B = \text{konst.} |$$

sei, also

$$f = B^2 C_1^2 \; . \tag{13}$$

Aus (13) bekommt man wegen (9):

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)^2 = \frac{1}{B^2} a_0 \tag{14a}$$

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(b_1 a_1 - b_0 a_2) = \frac{1}{B^2} a_1 \tag{14b}$$

$$(a_1 b_1 - b_0 a_2)^2 = \frac{1}{B^2} a_2 \; . \tag{14c}$$

Nach den Gleichungen (14) besteht die Identität:

$$a_1 = \sqrt{a_0 a_2} \; . \tag{15}$$

Setzt man den Wert von (15) in (14a), (14b) und (14c) ein, so bekommt man aus diesen Gleichungen die einzige Identität:

$$\sqrt{a_0}\, b_1 - \sqrt{a_2}\, b_0 = B^{-1} \; . \tag{16}$$

---

[6]) Vgl. [1], § 4.

Die Form der Grundfunktion ist demnach:

$$L = \frac{(\sqrt{a_0}\,\dot{x} + \sqrt{a_2}\,\dot{y})^2}{b_0\,\dot{x} + \dfrac{B^{-1} + \sqrt{a_2}\,b_0}{\sqrt{a_0}}\,\dot{y}} = \frac{(C_0\,\dot{x} + C_1\,\dot{y})^2}{d_0\,\dot{x} + d_1\,\dot{y}} \,. \tag{17}$$

Es ist also nach (7) und (16) unter Beachtung von (15) $A = 2B^{-2}$, das heißt nach (8)

$$J = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \,. \tag{18}$$

II. $n = 3$.

Es ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} f &= a_0\,\dot{x}^3 + 3a_1\,\dot{x}^2\,\dot{y} + 3a_2\,\dot{x}\,\dot{y}^2 + a_3\,\dot{y}^3 \\ g &= b_0\,\dot{x}^2 + 2b_1\,\dot{x}\,\dot{y} + b_2\,\dot{y}^2 \\ A &= (6a_2\,b_0^2 - 2a_0\,b_0\,b_2 - 12a_1\,b_0\,b_1 + 8a_0\,b_1^2)\,\dot{x}^3 + \\ &\quad + (6a_3\,b_0^2 + 12a_0\,b_1\,b_2 - 18a_1\,b_0\,b_2)\,\dot{x}^2\dot{y} + \\ &\quad + (-\,18a_2\,b_0\,b_2 + 12a_3\,b_0\,b_1 + 6a_0\,b_2^2)\,\dot{x}\,\dot{y}^2 + \\ &\quad + (-\,12a_2\,b_1\,b_2 + 8a_3\,b_1^2 - 2a_3\,b_0\,b_2 + 6a_1\,b_2^2)\,\dot{y}^3 \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Einteilung der Formen dritter Ordnung können wir mit Hilfe der Hesseschen Kovariante Δ und der Diskriminante R ausführen. Es ist

$$\Delta = \tfrac{1}{6}\,\{f_{\dot{x}\dot{x}}\,f_{\dot{y}\dot{y}} - f^2_{\dot{x}\dot{y}}\} = (a_0 a_2 - a_1^2)\,\dot{x}^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\,\dot{x}\,\dot{y} + (a_1 a_3 - a_2^2)\,\dot{y}^2$$

$$R = 4\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 \,.$$

1. $\Delta = 0$.

Verschwinden die Koeffizienten von Δ identisch, so ist auch $R = 0$ und f hat die Form:

$$f = (C_0\,\dot{x} + C_1\,\dot{y})^3 \,. \tag{20}$$

2. $R = 0\,,\ \Delta \neq 0$.

In diesem Falle hat f einen zweifachen Faktor:

$$f = (a_0\,\dot{x} + a_1\,\dot{y})^2\,(c_0\,\dot{x} + c_1\,\dot{y}) \,. \tag{21}$$

3. $R \neq 0\,,\ \Delta \neq 0$.

Dies ist der allgemeinste Fall; f hat drei verschiedene Faktoren:

$$f = (a_0\,\dot{x} + a_1\,\dot{y})\,(c_0\,\dot{x} + c_1\,\dot{y})\,(d_0\,\dot{x} + d_1\,\dot{y}) \;{}^{7)} \,. \tag{22}$$

---

7) Vgl. [4].

Der Fall 1. Wählen wir für Parameterlinien $x = $ konst., $y = $ konst. die Nullinien von f und g. Es muß angenommen werden, daß einer der Faktoren von g von denjenigen des f verschieden ist, widrigenfalls bekommt man eine Riemannsche Geometrie (z. B. Gl. (12)).

Es reduziert sich also L wegen der Wahl der Parameterlinien auf:

$$L = \frac{f}{g} = \frac{a_0 \dot{x}^3}{2 b_1 \dot{x} \dot{y} + b_2 \dot{y}^2} \ . \tag{23}$$

Nach (19) und (23) bekommt man

$$A = 8 a_0 b_1^2 \dot{x}^3 + 12 a_0 b_1 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + 6 a_0 b_2^2 \dot{x} \dot{y}^2 \tag{24}$$

und

$$A^{\frac{3}{2}} = a_0 f^{\frac{1}{2}} (8 b_1^2 \dot{x}^2 + 12 b_1 b_2 \dot{x} \dot{y} + 6 b_2^2 \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \ . \tag{24 a}$$

Der Hauptskalar ist in diesem Falle nach (6)

$$J = -3 \frac{(b_1 \dot{x} + b_2 \dot{y})(8 b_1^2 \dot{x}^2 + 10 b_1 b_2 \dot{x} \dot{y} + 5 b_2^2 \dot{y}^2)}{(8 b_1^2 \dot{x}^2 + 12 b_1 b_2 \dot{x} \dot{y} + 6 b_2^2 \dot{y}^2)^{3/2}} \ .$$

Es ist $J = $ konst. für $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$. $b_1 = 0$ gibt für J den Wert

$$J = - \frac{5}{2^{3/2} 3^{1/2}} \ . \tag{24 b}$$

Der Fall $b_2 = 0$ ist nach (23) von demselben Typ wie (17). J hat den in der Gleichung (18) gegebenen Wert.

Der Fall 2. In diesem Falle wählen wir für Parameterlinien $x = $ konst. $y = $ konst. die Nullinien von f (Gleichung 21). Dann wird $a_0 = a_3 = 0$. Wegen $R = 0$ bekommt man $a_2 = 0$, also für die Grundfunktion die Gleichung

$$L = \frac{3 a_1 \dot{x}^2 \dot{y}}{b_0 \dot{x}^2 + 2 b_1 \dot{x} \dot{y} + b_2 \dot{y}^2} \ . \tag{25}$$

(Aus $R = 0$ könnte man auch auf $a_1 = 0$ schließen, aber das gibt denselben Typ wie $a_2 = 0$.) Es ist nach (19):

$$A = -12 a_1 b_0 b_1 \dot{x}^3 - 18 a_1 b_0 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + 6 a_1 b_2^2 \dot{y}^3 \ .$$

Der Hauptskalar wird

$$J = \frac{3}{2\sqrt{2}} \dot{y}^{-\frac{1}{2}} (-2 b_0 b_1 \dot{x}^3 - 3 b_0 b_2 \dot{x}^2 \dot{y} + b_2^2 \dot{y}^3)^{-\frac{3}{2}} \{ -b_0^2 b_1 \dot{x}^5 +$$

$$+ (2 b_0 b_1^2 - 4 b_0^2 b_2) \dot{x}^4 \dot{y} + 3 b_0 b_1 b_2 \dot{x}^3 \dot{y}^2 + 5 b_0 b_2^2 \dot{x}^2 \dot{y}^3 - b_2^3 \dot{y}^5 \} \ . \tag{26}$$

Ist $b_0 = b_1 = 0$, dann ist (25) identisch mit (17) und (26) geht in (18) über. In diesem Falle ist also $J =$ konst.

In anderen Fällen ist J eine veränderliche.

Es sei noch bemerkt: wenn die Grundfunktion die Form:

$$L = \frac{a\,\dot{x}^n}{b\,\dot{y}^{n-1}} \tag{27}$$

hat, oder auf diese Form transformierbar ist, dann ist der Hauptskalar eine Konstante. Es ist

$$J = -\frac{2n-1}{2\sqrt{n(n-1)}}\,. \tag{28}$$

((28) gibt natürlich für $n = 2, 3$ für J die in (18) und (24b) gegebenen Werte.)

§ 3. Der Krümmungsskalar

Den Krümmungsskalar [8]) werden wir nur für die Grundfunktion (27) berechnen. Es ist ganz allgemein:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{L^2}\Bigg\{ &\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\dot{y}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial\dot{x}}\right)\dot{y} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\dot{y}} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial\dot{x}}\right)\dot{x} + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}}\right)\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}\,\partial\dot{y}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{y}^2}\right)\psi - \\ &- \tfrac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right)^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{y}}\right)^2\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{29}$$

wo

$$\varphi = \frac{1}{LF_1}\left\{\dot{x}F_1\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\,\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{y}\,\partial x}\right)\right\} \tag{30 a}$$

$$\psi = \frac{1}{LF_1}\left\{\dot{y}F_1\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial y}\right) - \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\,\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{y}\,\partial x}\right)\right\}. \tag{30 b}$$

Hat die Grundfunktion die Form (27), so bekommt man nach den Gleichungen (30a) und (30b)

$$\varphi = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{a}{b}\dot{x}^2\,, \qquad \psi = -\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{a}{b}\dot{y}^2\,.$$

---

[8]) Vgl. [1].

Der Krümmungsskalar wird nach (29)

$$\mathfrak{K}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{n(n-1)} \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{a}{\mathrm{b}} \cdot \frac{\dot{y}^{2n-1}}{\dot{x}^{2n-1}} .$$

Hat die Funktion $\log \frac{a}{b}$ die Form:

$$\log \frac{a}{b} = \alpha(x) + \beta(y) ,$$

so wird $\mathfrak{K} = 0$ und (27) bestimmt (wegen $J =$ konst.) eine Minkowskische Geometrie [9]).

(Eingegangen den 3. April 1949.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *L. Berwald*, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles Journal 156 (1927) 191—222.

[2] *L. Berwald*, Über Finslersche und Cartansche Geometrie I, Mathematica 17 (1941) 34—58.

[3] *L. Berwald*, On Finsler and Cartan Geometries III, Annals Mathematics 42 (1941) 84—112.

[4] *A. Clebsch*, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, Verlag B. G. Teubner.

[5] *J. M. Wegener*, Untersuchungen über Finslersche Räume, Wetensch. Amsterdam Proc. 38 (1935) 949—955.

[9]) Vgl. [3].