

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 24 (1950)

**Artikel:** Cartesisches und Alexandersches Produkt in der Cohomologietheorie.  
**Autor:** Brändli, E.R. / Eckmann, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20300>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Cartesisches und Alexandersches Produkt in der Cohomologietheorie

Von E. R. BRÄNDLI und B. ECKMANN (Zürich)

Das Produkt von Cohomologieklassen eines Polyeders  $R$  (oder eines allgemeinern topologischen Raumes), wie es von Alexander [1]<sup>1)</sup> u. a. definiert wurde, steht in engem Zusammenhang mit dem Cartesischen Produkt  $R \times R$ , in welchem es anschaulich interpretiert werden kann. Ein solcher Zusammenhang ist bei Mannigfaltigkeiten schon vor der Einführung des Alexanderschen Produktes von Lefschetz [5] für das Schnittprodukt, von de Rham [8] für das äußere Produkt von Differentialformen formuliert worden; in allgemeinerer Form läßt er sich verschiedenen neuern Ausführungen von Lefschetz [6] und von Leray [7] entnehmen. In den folgenden Zeilen wird diese Beziehung zwischen dem Cartesischen und dem Alexanderschen Produkt für beliebige simpliziale Komplexe in direkter Weise hergeleitet, mit einer Methode, die uns besonders einfach und übersichtlich scheint und die die Rolle der willkürlichen Eckpunkt-Numerierung, wie sie in der Alexanderschen Definition auftritt, in neuer Weise klärt.<sup>2)</sup>

## 1. Cartesisches Produkt

$K$  sei ein simplizialer Komplex; das ihm vermöge einer Euklidischen Realisation entsprechende Polyeder sei ebenfalls mit  $K$  bezeichnet. Wir betrachten das Cartesische Produkt<sup>3)</sup>  $K \times \overline{K}$  von  $K$ , „mit sich“, d. h. mit einer Kopie  $\overline{K}$  von  $K$ . Der Übergang von Punkten, Simplexen, Ketten usw. von  $K$  zu den entsprechenden von  $\overline{K}$  werde durch Überstreichen angedeutet. Die Randbildung sei stets mit  $\partial$ , die Corandbildung mit  $\delta$  bezeichnet.  $K \times \overline{K}$  ist ein Zellenkomplex, dessen orientierte  $n$ -Zellen von

<sup>1)</sup> Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

<sup>2)</sup> Die vorliegende Note ist eine Umarbeitung eines Teiles der Dissertation von E. R. Brändli [3].

<sup>3)</sup> Bezüglich der Eigenschaften des Cartesischen Produktes vgl. [2], Kap. VII.

der Gestalt  $\sigma_r \times \bar{\tau}_s$  sind, wo  $\sigma_r$  ein beliebiges orientiertes  $r$ -Simplex von  $K$ ,  $\bar{\tau}_s$  ein  $s$ -Simplex von  $\bar{K}$  ist, mit  $r + s = n$ . Ist  $f^p$  eine Cokette <sup>4)</sup> in  $K$ ,  $\bar{g}^q$  in  $\bar{K}$ , so sei  $f^p \times \bar{g}^q$  die Cokette in  $K \times \bar{K}$ , die definiert ist, für alle  $\sigma_r$  und  $\bar{\tau}_s$  mit  $r + s = p + q$ , durch  $f^p \times \bar{g}^q(\sigma_r \times \bar{\tau}_s) = f^p(\sigma_r) \cdot \bar{g}^q(\bar{\tau}_s)$  falls  $r = p$  ( $s = q$ ) und  $= 0$  falls  $r \neq p$ ; wenn  $f^p$  und  $\bar{g}^q$  Cozyklen sind, so ist auch  $f^p \times \bar{g}^q$  ein Cozyklus.

$D$  bezeichne die Abbildung von  $K$  in  $K \times \bar{K}$ , die durch  $D(P) = P \times \bar{P}$  für alle Punkte  $P$  von  $K$  gegeben ist; offenbar ist  $D$  eine topologische Abbildung von  $K$  in  $K \times \bar{K}$ , und man nennt das Bild  $D(K)$  die *Diagonale des Cartesischen Produktes von  $K$  mit sich*.  $D$  induziert einen Homomorphismus  $D_0$  der Homologiegruppen von  $K$  in diejenigen von  $K \times \bar{K}$ , und für einen Zyklus  $z_n$  von  $K$  bedeute  $D_0 z_n$  die Homologieklasse in  $K \times \bar{K}$ , die hierbei Bild derjenigen von  $z_n$  ist. Das Ziel dieser Note ist der Beweis des folgenden Satzes ( $\cup$  bezeichnet das Alexandersche Produkt [1], in üblicher Weise mit Hilfe einer Eckpunkt-Numerierung in  $K$  definiert).

(1). *Für zwei Cozyklen  $f^p$  und  $g^q$  und einen Zyklus  $z_n$  von  $K$  ( $n = p + q$ ) gilt*

$$f^p \cup g^q(z_n) = f^p \times \bar{g}^q(D_0 z_n) . \quad (1)$$

Wir beweisen diesen Satz in Nr. 4; die Abschnitte 2 und 3 dienen zur Vorbereitung des Beweises.

*Bemerkung.*  $K$  sei endlich, und man verwende für die Ketten den zu  $J$  dualen Koeffizientenbereich  $J_1$  <sup>4)</sup>.  $f^p \times \bar{g}^q(D_0 z_n)$  als Funktion von  $z_n$  aufgefaßt definiert einen Homomorphismus der Zyklengruppe  $Z_n$  von  $K$  in die Gruppe der reellen Zahlen mod. 1, der auf den Rändern  $= 0$  ist; er läßt sich zu einem Homomorphismus der ganzen Kettengruppe  $C_n$  erweitern, definiert also eine Cokette  $h^n$  (mit Koeffizienten aus  $J$ ).  $h^n$  ist ein Cozyklus, und aus (1) und aus bekannten Dualitätssätzen folgt, daß er derselben Cohomologieklasse von  $K$  angehört wie  $f^p \cup g^q$ . Man erhält also, indem man für alle Zyklen  $z_n$  von  $K$

$$h^n(z_n) = f^p \times \bar{g}^q(D_0 z_n) \quad (2)$$

setzt, eine der Alexanderschen äquivalente Produktdefinition für Cohomologieklassen, der eine gewisse Anschaulichkeit zukommt und in der keine Eckpunkt-Numerierung auftritt. — In unendlichen Komplexen ist diese Überlegung in naheliegender Weise zu vervollständigen.

<sup>4)</sup> Die Coketten werden als Funktionen der Simplexe oder Zellen aufgefaßt, mit Werten in einem Ring  $J$ ; sie lassen sich in üblicher Weise zu linearen Funktionen der Ketten erweitern, wenn für diese ein geeigneter Koeffizientenbereich  $J_1$  verwendet wird. Ist z. B.  $J_1$  die Gruppe der ganzen Zahlen, so sind die Werte dieser linearen Funktionen Elemente von  $J$ ; ist  $J_1$  die zur additiven Gruppe von  $J$  duale Abelsche Gruppe, so sind die Werte reelle Zahlen mod. 1.

## 2. Die Homologie-Abbildung $Q$

Wir führen eine Ketten-Abbildung  $Q$  des simplizialen Komplexes  $K$  in den Zellenkomplex  $K \times \bar{K}$  ein, die im Sinne der Homologie die stetige Abbildung  $D$  des Polyeders  $K$  in  $K \times \bar{K}$  ersetzen wird und für unsern Zweck geeigneter ist als diese.  $Q$  hängt aber von einer willkürlichen *Eckpunkt-Numerierung* in  $K$  ab, während dies natürlich für  $D$  nicht der Fall ist.

In jedem Simplex  $\sigma_n$  von  $K$  seien also die Eckpunkte fest numeriert, mit der einzigen Bedingung, daß im Durchschnitt zweier Simplexe die Reihenfolge übereinstimmen soll. Wir bezeichnen ein orientiertes Simplex  $\sigma_n$  auch durch das Symbol  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ , in welchem seine  $n+1$  Eckpunkte  $e_i$  in der gewählten Reihenfolge auftreten. Es sei

$$Q(e_0, e_1, \dots, e_n) = \sum_{k=0}^n (e_0, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n)$$

gesetzt. Wir behaupten, daß für die dadurch definierte Ketten-Abbildung  $Q$  von  $K$  in  $K \times \bar{K}$  gilt:

(3).  $Q$  ist eine Homologie-Abbildung (d. h. mit  $\partial$  vertauschbar).

(4). Für zwei Coketten  $f^p$  und  $g^q$  und ein Simplex  $\sigma_n$  ( $n = p + q$ ) von  $K$  ist

$$f^p \times \bar{g}^q (Q \sigma_n) = f^p \cup g^q (\sigma_n) . \quad (4)$$

Beweis von (3). Der Rand einer Zelle  $\sigma_r \times \bar{\tau}_s$  von  $K \times \bar{K}$  ist gegeben durch  $\partial(\sigma_r \times \bar{\tau}_s) = \partial\sigma_r \times \bar{\tau}_s + (-1)^r \sigma_r \times \partial\bar{\tau}_s$  (wobei das Cartesische Produkt eines Simplexes mit einer Kette in naheliegender Weise zu interpretieren ist). Man erhält also<sup>5)</sup>

$$\begin{aligned} & \partial Q(e_0, e_1, \dots, e_n) = \\ & = \sum_{k=0}^n [\partial(e_0, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n) + (-1)^k (e_0, \dots, e_k) \times \partial(\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n)] \\ & = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^i (e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n) + \\ & \quad + \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n (-1)^k (-1)^{i-k} (e_0, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \hat{\bar{e}}_i, \dots, \bar{e}_n) . \end{aligned}$$

---

<sup>5)</sup>  $\hat{e}_i$  bedeutet, daß  $e_i$  aus dem betreffenden Symbol weggelassen werden soll.

Das Glied  $k = i = l$  der ersten und das Glied  $k = i = l - 1$  der zweiten Summe ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) heben sich weg; die Glieder  $k = i = 0$  der ersten und  $k = i = n$  der zweiten Summe sind = 0. Es bleibt also übrig:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[ \sum_{k=0}^{i-1} (e_0, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \hat{\bar{e}}_i, \dots, \bar{e}_n) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^n (e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) \times (\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n) \right] = \\
 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i Q(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) = Q \partial(e_0, e_1, \dots, e_n).
 \end{aligned}$$

Beweis von (4). Die der Abbildung  $Q$  zugrunde liegende Eckpunkt-Numerierung soll auch für das  $\cup$ -Produkt verwendet werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f^p \times \bar{g}^q (Q(e_0, e_1, \dots, e_n)) &= f^p \times \bar{g}^q \left( \sum_{k=0}^n (e_0, \dots, e_k) \times (\bar{e}_k, \dots, \bar{e}_n) \right) = \\
 &= f^p(e_0, \dots, e_p) \cdot \bar{g}^q(\bar{e}_p, \dots, \bar{e}_n) = f^p \cup g^q(e_0, e_1, \dots, e_n).
 \end{aligned}$$

### 3. Vergleich der Abbildungen $D$ und $Q$

Die Abbildung  $D$  überträgt die Simplizialzerlegung von  $K$  isomorph auf die Diagonale  $D(K)$ . Es gibt eine simpliziale Unterteilung  $(K \times \bar{K})'$  von  $K \times \bar{K}$ , welche diese Simplizialzerlegung der Diagonalen enthält (z. B. die von Freudenthal [4] angegebene).  $U$  sei die Ketten-Abbildung von  $K \times \bar{K}$  in  $(K \times \bar{K})'$ , welche jeder Zelle ihre Unterteilung zuordnet.  $D$  ist eine simpliziale,  $UQ$  eine Ketten-Abbildung von  $K$  in  $(K \times \bar{K})'$ .

(5). *Die Abbildungen  $D$  und  $UQ$  sind ketten-homotop*; d. h. es existiert für  $n = 0, 1, 2, \dots$  je ein Homomorphismus  $Y_n$  der Kettengruppe  $C_n$  von  $K$  in die Kettengruppe  $C'_{n+1}$  von  $(K \times \bar{K})'$ , derart daß für jede Kette  $a_n \in C_n$

$$D a_n - UQ a_n = \partial Y_n a_n + Y_{n-1} \partial a_n \quad (5)$$

ist (für  $n = 0$  fällt das zweite Glied rechts weg).

*Beweis.* Es ist  $D \sigma_0 - UQ \sigma_0 = 0$  für jedes 0-Simplex  $\sigma_0$ ; wir setzen  $Y_0 \sigma_0 = 0$ . Für alle  $n < m$  ( $m > 0$ ) sei  $Y_n$  schon definiert, derart, daß die behauptete Beziehung für diese  $n$  gilt, und daß ferner für jedes Simplex  $\sigma_n$  die Kette  $Y_n \sigma_n$  in  $(\sigma_n \times \bar{\sigma}_n)'$  liegt. Dann gilt für ein Simplex  $\sigma_m$

$$\partial(D \sigma_m - UQ \sigma_m) = D \partial \sigma_m - UQ \partial \sigma_m = \partial Y_{m-1} \partial \sigma_m + Y_{m-2} \partial \partial \sigma_m ,$$

also  $\partial(D\sigma_m - UQ\sigma_m - Y_{m-1}\partial\sigma_m) = 0$ ; die Klammer ist also ein Zyklus. Da dieser Zyklus in  $(\sigma_m \times \bar{\sigma}_m)'$  liegt, und da in der Unterteilung einer Zelle jeder Zyklus der Dimension  $m > 0$  ein Rand ist, gibt es dort eine Kette  $Y_m \sigma_m \in C'_{m+1}$ , derart daß

$$D\sigma_m - UQ\sigma_m - Y_{m-1}\partial\sigma_m = \partial Y_m \sigma_m$$

ist. Dadurch ist  $Y_m$  in der gewünschten Art definiert.

#### 4. Beweis des Satzes (1)

Nach (5) gilt für einen Zyklus  $z_n$  von  $K$

$$Dz_n - UQz_n = \partial Y_n z_n ,$$

d. h. die Bildzyklen  $Dz_n$  und  $UQz_n$  sind in  $(K \times \bar{K})'$  homolog.  $D_0 z_n$  ist die Homologiekasse von  $K \times \bar{K}$ , deren Unterteilung  $UD_0 z_n$  den Zyklus  $Dz_n$  enthält, also auch den Zyklus  $UQz_n$ . Da  $U$  die Homologiegruppen isomorph abbildet, gehört  $Qz_n$  der Klasse  $D_0 z_n$  an, und es ist nach (4)

$$f^p \times \bar{g}^q(D_0 z_n) = f^p \times \bar{g}^q(Qz_n) = f^p \cup g^q(z_n) .$$

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *J. W. Alexander*, Ann. Math. 37 (1936) 698—708.
- [2] *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie I (Berlin 1935).
- [3] *E. R. Brändli*, Beiträge zur Theorie des Cohomologieringes, Dissertation E. T. H. 1948.
- [4] *H. Freudenthal*, Fund. Math. 29 (1937) 138.
- [5] *S. Lefschetz*, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926) 1—49.
- [6] *S. Lefschetz*, Algebraic Topology (New York 1942), S. 173 ff.
- [7] *J. Leray*, J. Math. Pures Appl. (9) 24 (1945) 95—167.
- [8] *G. de Rham*, Comm. Math. Helv. 4 (1932) 151—157.

(Eingegangen den 3. Mai 1949.)