

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1949)

Artikel: Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre.
Autor: Le-Van, Thiem
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19751>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre¹⁾

Von L E -V A N, Thiem, Viet-Nam

§ 1. Problemstellung

1. Es sei $w = w(z)$ eine in der endlichen z -Ebene meromorphe Funktion. Man definiert in der Wertverteilungslehre folgende zu $w(z)$ gehörigen Größen

$$N(r, a) = \int^r \frac{n(t, a)}{t} dt, \quad N_1(r, a) = \int^r \frac{n_1(t, a)}{t} dt, \\ T(r) = \underset{a}{\text{Max}} N(r, a), \quad (1)$$

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{N(r, a)}{T(r)}, \quad \varepsilon(a) = \underline{\lim} \frac{N_1(r, a)}{T(r)}. \quad (2)$$

Dabei bezeichnet $n(r, a)$ die Anzahl der a -Stellen von $w(z)$ im Kreise $|z| \leq r$ und $n_1(r, a)$ die Anzahl der mehrfachen a -Stellen, indem jede k -fache Stelle $(k - 1)$ -fach gezählt wird. $\delta(a)$ und $\varepsilon(a)$ heißen Defekt bzw. Index von a . Es gilt $\delta(a) + \varepsilon(a) \leq 1$.

2. Zwischen diesen Größen besteht eine fundamentale Beziehung, welche den Kernpunkt der modernen Wertverteilungslehre darstellt, die sogenannte

Defektrelation. *Es gilt für eine beliebige Anzahl q von a -Stellen a_1, a_2, \dots, a_q*

$$\sum_{\nu=1}^q \delta(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon(a_\nu) \leq 2. \quad (3)$$

Dies bedeutet topologisch, daß die durch $w(z)$ erzeugte Überlagerungsfläche (parabolischer Typus) nicht zu stark verzweigt sein kann.

¹⁾ Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Dr. R. Nevanlinna für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie Herrn Prof. Dr. A. Pfluger für die Erteilung wertvoller Ratschläge und die Durchsicht des Manuskriptes meinen innigsten und verbindlichsten Dank auszusprechen.

Das Zustandekommen der Abhandlung verdanke ich weiter einem vom Schweizerischen Schulrat der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich erteilten Stipendium.

Aus dieser Relation ergibt sich das

Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. *Jedem Punkt a_ν einer gegebenen Folge a_1, a_2, \dots, a_q seien zwei Zahlen*

$$\delta_\nu = \delta(a_\nu), \quad \varepsilon_\nu = \varepsilon(a_\nu)$$

zugeordnet, die zugleich mit ihrer Summe $\delta_\nu + \varepsilon_\nu$ dem abgeschlossenen Intervall $\langle 0,1 \rangle$ angehören und die Relation $\sum \delta_\nu + \sum \varepsilon_\nu = 2$ erfüllen. Es soll eine meromorphe Funktion hergestellt werden, deren Wertverteilung diesen Vorschriften entspricht.

3. Mit den zusätzlichen Voraussetzungen $\varepsilon_\nu = 0$, δ_ν rational, hat Herr R. Nevanlinna dieses Problem mit Hilfe von Flächen mit endlich vielen logarithmischen Enden gelöst²⁾.

Später hat Herr E. Ullrich³⁾ auf die Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden hingewiesen, denen nichtverschwindende rationale ε_ν entsprechen und die Vermutung ausgesprochen, daß obiges Umkehrproblem für rationale δ_ν und ε_ν mit Hilfe jener Klasse Riemannscher Flächen gelöst werden könnte. Wir werden im folgenden zeigen, daß diese Vermutung im wesentlichen richtig ist. Dabei ist die quasikonforme Abbildung ein fundamentales Hilfsmittel.

§ 2. Quasikonforme Abbildung

4. Es werde ein Gebiet der z -Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf ein Gebiet der w -Ebene abgebildet. Diese Abbildung sei überdies bis auf isolierte Punkte und Linien stetig differenzierbar. Man setzt

$$z = x + iy, \quad w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ein unendlich kleiner z -Kreis geht in eine unendlich kleine w -Ellipse über, deren Achsenverhältnis gleich

$$D = D_{w/z} = \operatorname{Max} \left| \frac{dw}{dz} \right| : \operatorname{Min} \left| \frac{dw}{dz} \right| = K + \sqrt{K^2 - 1} \quad (4)$$

ist, mit

$$2K = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|u_x v_y - u_y v_x|}.$$

²⁾ R. Nevanlinna (1), L. Ahlfors (1).

³⁾ E. Ullrich (1).

Man nennt D den Dilatationsquotienten⁴⁾ der Abbildung im Punkt z . Bezeichnen wir das Flächenelement der z -Ebene mit df_z , so ist

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{df_w}{df_z} \leq \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \leq D \frac{df_w}{df_z}. \quad (5)$$

Es gilt ferner

$$D_{w/z} \geq 1 \quad (\equiv 1 \text{ nur für konforme Abbildung}), \quad (6)$$

$$D_{w/z} = D_{z/w}, \quad (7)$$

$$D_{w/z} \leq D_{w/\zeta} D_{\zeta/z} \quad (= D_{\zeta/z}, \text{ wenn } w \leftrightarrow \zeta \text{ konform ist}). \quad (8)$$

Der Dilatationsquotient ist also gegenüber konformen Abbildungen invariant.

5. Bleibt der Dilatationsquotient unterhalb einer festen Schranke, so heißt die Abbildung quasikonform. Ihre Bedeutung im Typenproblem geht aus dem folgenden Satz hervor⁵⁾.

Satz 1. *Wird der Einheitskreis $|z| < 1$ schlicht auf die punktierte Ebene $w \neq \infty$ abgebildet, so ist*

$$\int_{|z| < 1} D_{w/z} df_z = \infty.$$

Insbesondere kann $D_{w/z}$ in $|z| < 1$ nicht beschränkt sein. Daraus folgt in Verbindung mit (8), daß der Typus einfachzusammenhängender Riemannscher Flächen bei quasikonformer Abbildung invariant ist.

Zur Untersuchung der Wertverteilung der erzeugenden Funktion im parabolischen Fall wird wiederum mit Vorteil eine besondere Klasse quasikonformer Abbildungen herangezogen.

Definition. *Die endliche z -Ebene werde auf die endliche w -Ebene quasikonform abgebildet. Wir nennen die Abbildung fast-konform, wenn*

$$\int (D_{w/z} - 1) \frac{df_z}{|z|^2} < \infty$$

ist, wobei das Integral sich mit möglicher Ausnahme eines beschränkten Gebietes über die ganze z -Ebene erstreckt.

Satz 2. *Wird die endliche z -Ebene fast-konform auf die endliche w -Ebene abgebildet, so gibt es eine Konstante γ mit*

$$|w(z)| = \gamma |z| (1 + \varepsilon(z)), \quad (9)$$

wobei $\varepsilon(z)$ mit $|z| \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 strebt⁶⁾.

⁴⁾ O. Teichmüller (1).

⁵⁾ O. Teichmüller (1), T. Le-Van (1).

⁶⁾ O. Teichmüller (1), S. 670.

6. Wird nun eine Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus einerseits konform auf die ζ -Ebene ($\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$), andererseits fast-konform auf die z -Ebene ($z = r e^{i\varphi}$) abgebildet, so ergibt sich daraus eine fast-konforme Abbildung der z -Ebene auf die ζ -Ebene. Ein Kreis $|z| = r$ geht also in eine kreisförmige Kurve C über :

$$C) \quad \varrho = \gamma r (1 + \varepsilon(r, \vartheta)) ,$$

oder nach Normierung :

$$\varrho = r (1 + \varepsilon(r, \vartheta)) ; \quad \varepsilon(r, \vartheta) < \varepsilon(r) \rightarrow 0 \text{ glm. für } r \rightarrow \infty . \quad (10)$$

Markieren wir die Bilder eines bestimmten Punktes der Fläche in der z -Ebene sowie in der ζ -Ebene, so wird die Anzahl der Bildpunkte im Kreise $|z| < r$ und im Kreise $|\zeta| < r$ gemäß (10) asymptotisch gleich sein. Dies bedeutet, daß wir die Vergleichsgrößen $N(r, a)$, $N_1(r, a)$ und $T(r)$ der erzeugenden Funktion $w(z)$ ebensogut auf der z -Ebene als auf der ζ -Ebene abschätzen können.

§ 3. Riemannsche Flächen mit endlich vielen periodischen Enden

7. Wir gehen von einer in u rationalen Funktion $R(u)$ aus und bilden die meromorphe Funktion

$$f(z) = R(e^z) .$$

Diese Funktion hat *zwei* logarithmische Windungspunkte⁷⁾ über den Stellen $R(0)$ und $R(\infty)$. Schneiden wir die erzeugte Fläche Φ_R längs einer Kurve auf, welche diese beiden Windungspunkte verbindet, so zerfällt die Fläche in zwei Halbflächen Φ^* , die wir nach *Ullrich*⁸⁾ periodische Enden nennen.

Definition. *Die Fläche W mit endlich vielen periodischen Enden sind solche, die sich, abgesehen von einem abgeschlossenen Teil oder Kern, aus endlich vielen periodischen Enden zusammensetzen.*

Zu dieser Klasse gehören insbesondere die Flächen $R(e^z)$.

8. Wie die Flächen $R(e^z)$, sind auch alle Flächen W nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt und können durch den von *Speiser* und *Nevanlinna*⁹⁾ eingeführten Streckenkomplex dargestellt werden. Die Flächen W lassen sich dann auch folgendermaßen charakterisieren :

⁷⁾ Es kann $R(0) = R(\infty)$ sein; dann liegen die beiden logarithmischen Windungspunkte über dem gleichen Grundpunkt.

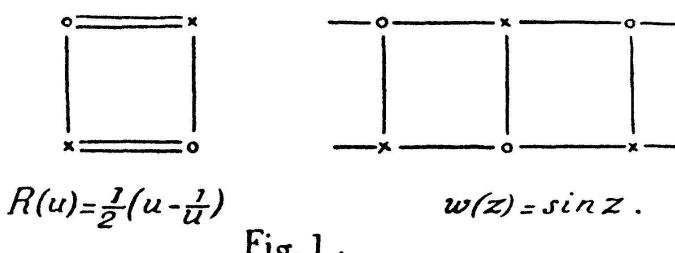
⁸⁾ E. Ullrich (1).

⁹⁾ R. Nevanlinna (2).

Der Streckenkomplex von W muß, abgesehen von einem endlichen Kern, endlich viele logarithmische Gebiete aufweisen, die durch ebenso viele periodische Enden ganz beliebiger Art getrennt sind.

Wie sich herausstellen wird, ist der Kern, welcher aus endlich vielen Knoten besteht, un wesentlich für das asymptotische Verhalten der erzeugenden Funktion. Jedes periodische Ende ist die Hälfte einer (periodischen) Funktion der Form $R(e^z)$. Dieser Komplex läßt sich nach Ullrich folgendermaßen beschreiben:

Wir denken den Komplex von $R(u)$ auf der u -Kugel gezeichnet. Sofern $R(0)$ und $R(\infty)$ nicht schon unter den Grundpunkten der (algebraischen) Windungspunkte von $R(u)$ vorkommen, markieren wir auch noch — mit Zweiecken — die über $R(0)$ und $R(\infty)$ liegenden schlichten Stellen. Durch Abwickeln der universellen Überlagerungsfläche der in 0 und ∞ punktierten u -Kugel auf die z -Ebene bekommen wir den Komplex von $R(e^z)$ als Abwicklung des Komplexes von $R(u)$.



So entstehen z. B. die Komplexe von e^z und $\sin z$ aus den Komplexen von

$$R(u) = u \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)$$

9. Es sei nun W eine Fläche mit m periodischen Enden. Wir bezeichnen ihren Komplex auch mit W . Die periodischen Enden von W trennen m logarithmische Elementargebiete voneinander. Wir legen um den Kern einen Umlaufsinn fest und numerieren die periodischen Enden und die logarithmischen Gebiete von 1 bis m derart, daß das v -te log. Gebiet

von dem $(v+1)$ -ten durch das v -te periodische Ende getrennt wird. Die Knoten des v -ten Endes, welche am Rande des v -ten bzw. $(v+1)$ -ten log. Gebietes liegen, nennen wir positive bzw. negative Randknoten

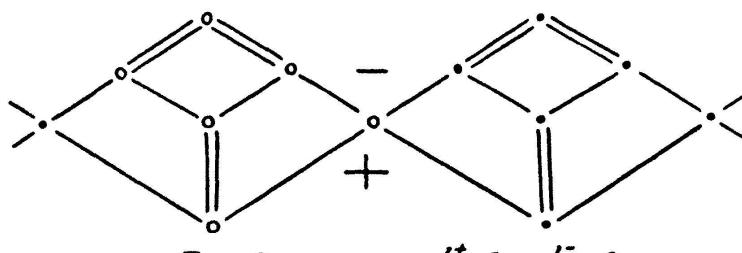


Fig. 2: $n=3$, $d^+=1$, $d^-=2$.

des betreffenden Endes. Es ist zu bemerken, daß ein Randknoten zugleich positiv und negativ sein kann (Fig. 2).

Jede Periode des Endes hat gleichviele Knoten wie der Komplex der zugehörigen rationalen Funktion $R_v(u)$, d. h. $2n_v$, wenn der Grad von R_v , n_v , ist. Darunter seien $2d_v^+$ bzw. $2d_v^-$ positive bzw. negative Rand-

knoten. Die Zahlen d_ν^+ und d_ν^- bezeichnen nichts anderes als die Ordnungen von $R_\nu(u)$ an den Stellen $u = \infty$ und $u = 0$.

Unter der Charakteristik von W verstehen wir die Größe¹⁰⁾

$$\Delta = \left| \log \frac{(d_1 d_2 \dots d_m)^+}{(d_1 d_2 \dots d_m)^-} \right|. \quad (11)$$

Die Charakteristik Δ ist offenbar unabhängig von der Numerierung der Enden.

10. Bei den Nevanlinnaschen Flächen mit m logarithmischen Enden ist die Ordnung der erzeugenden Funktion¹¹⁾ gleich $\frac{m}{2}$. H. Wittich hat an einem Beispiele gezeigt, daß dies bei den Flächen mit m periodischen Enden nicht immer zutrifft¹²⁾. Wir werden zunächst in § 5 diese Behauptung durch den folgenden Satz verallgemeinern.

Satz A. *Die erzeugende Funktion einer Fläche W mit m periodischen Enden und der Charakteristik Δ ist vom Mitteltypus der Ordnung*

$$\lambda = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right).$$

Im Falle $\Delta = 0$ sind die Defekte und Indizes rational.

Wir wenden diese Resultate auf das Ullrichsche Umkehrproblem an und beweisen in § 7 den

Satz B. *Unter den Voraussetzungen*

- 1) $\sum_{\nu=1}^q \delta_\nu + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon_\nu = 2$,
- 2) $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ rational,
- 3) $\sum_{\nu=1}^q \delta_\nu \neq 0$,
- 4) $\delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1$, < 1 falls $\varepsilon_\nu \neq 0$ ist,

kann man das Umkehrproblem mit Hilfe von Flächen W der Charakteristik $\Delta = 0$ stets lösen.

Es muß betont werden, daß die Einschränkung 4) an der Periodizität im Flächenbau und nicht an der Bedingung $\Delta = 0$ liegt¹³⁾.

¹⁰⁾ Wir schreiben $(d_1 d_2 \dots d_r)^\pm$ an Stelle von $d_1^\pm d_2^\pm \dots d_r^\pm$, $r \leq m$.

¹¹⁾ R. Nevanlinna (1).

¹²⁾ H. Wittich (2).

¹³⁾ E. Ullrich (2).

Im Falle $\Sigma \delta_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu < 1$ lässt sich das Umkehrproblem mit Hilfe von doppelt-periodischen Funktionen lösen.

Wir ergänzen Satz B noch durch

Satz C. Die in Satz B benutzten periodischen Enden können so gewählt werden, daß jedes einzelne höchstens über drei Grundpunkten verzweigt ist.

§ 4. Fast-konforme, schlichte Abbildung der Flächen W .

11. Es sei W eine der w -Ebene überlagerte Fläche mit m periodischen Enden.

Wir fangen an, ein einzelnes Ende Φ_ν^* von der Fläche W abzutrennen, indem wir die beiden zugehörigen Windungspunkte durch eine einfache

Jordan-Kurve C verbinden. Diese Schnittkurve wird so gewählt, daß sie in diesen Windungspunkten als geradlinige Strecke endet¹⁴⁾ (Fig. 3).

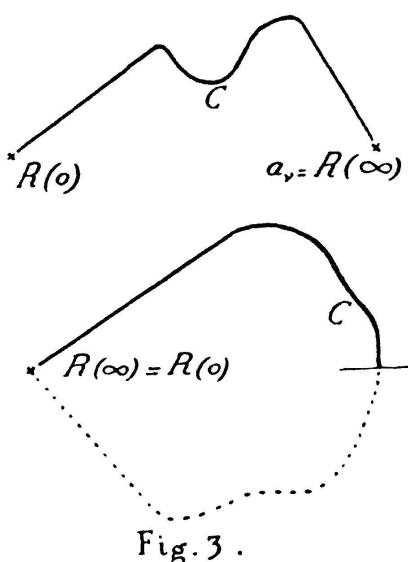


Fig. 3.

Wir ergänzen die so ausgeschnittene Halbfläche Φ_ν^* zu einer Fläche $\Phi_R(w(z_\nu) = R(e^{z_\nu}))$ und bilden Φ_R auf die z_ν -Ebene konform ab ($z_\nu = x_\nu + i y_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$). Die Kurve C geht dabei in einen Querschnitt Γ der endlichen z_ν -Ebene über, der sich auf beiden Seiten¹⁵⁾ in Richtung der positiven bzw. negativen x_ν -Achse erstreckt (Fig. 4). Das Bild der Halbfläche Φ_ν^* sei dasjenige Gebiet G , welches oberhalb Γ liegt. G wird durch die y_ν -Achse in zwei Teile G_1 und G_2 getrennt. Die entsprechenden Teile von Γ seien Γ_1 und Γ_2 .

12. Es soll zunächst G_1 durch eine spezielle quasikonforme Transformation auf den Quadranten $\xi_\nu \geq 0$, $\eta_\nu \geq 0$ abgebildet werden ($\zeta_\nu = \xi_\nu + i \eta_\nu$).

Γ_1 ist das Bild eines Bogens des Schnittes C , welcher in einen log. Windungspunkt a_ν mündet.

Durch eine lineare Transformation auf der w -Ebene verlegen wir diesen Windungspunkt ins Unendliche derart, daß das zugehörige Ende von C in das Ende der positiven reellen Achse übergeht. Es besteht dann zwischen w und z_ν die Relation¹⁶⁾

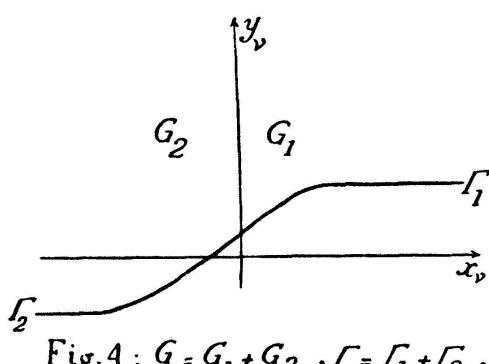


Fig. 4 : $G = G_1 + G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

¹⁴⁾ Diese Wahl hat keine prinzipielle Bedeutung und dient nur zur Vereinfachung der Rechnung.

¹⁵⁾ Gemäß (12) und (13), mit horizontalen Asymptoten.

¹⁶⁾ Die auftretende Zahl d^+ bestimmt, wie in Nr. 9 erklärt, die Ordnung von $R_\nu(u)$ an der Stelle $u = \infty$.

$$w(z) = R(e^{z_\nu}) = \frac{a_n e^{nz_\nu} + \dots + a_0}{b_{n-d^+} e^{(n-d^+)z_\nu} + \dots + b_0}; \quad (a_n, b_{n-d^+} \neq 0). \quad (12)$$

Nach passender Festlegung eines Zweiges ist Γ_1 — abgesehen von einem endlichen Stück — definiert durch die Gleichung

$$\operatorname{Arg} w(z_\nu) = 0. \quad (13)$$

Auf der Kurve Γ_1 ist dann das Argument φ_ν von z_ν , für r_ν hinreichend groß, eine umkehrbar eindeutige Funktion von r_ν

$$\varphi_\nu = \varphi^*(r_\nu) \rightarrow 0.$$

Setzen wir nun

$$\varrho = \frac{1}{d^+} \log |w(z_\nu)|, \quad (14)$$

so wird für r_ν hinreichend groß jedem Punkte von Γ_1 ein Wert ϱ ein-eindeutig zugeordnet¹⁷⁾:

$$\varrho = \varrho(r_\nu, \varphi_\nu) = \varrho^*(r_\nu) \sim r_\nu.$$

Wir definieren dann die gewünschte quasikonforme Abbildung durch

$$\left. \begin{aligned} \varrho_\nu &= r_\nu - \frac{r_\nu - \varrho^*(r_\nu)}{\varphi^*(r_\nu) - \frac{\pi}{2}} \left(\varphi_\nu - \frac{\pi}{2} \right), \\ \vartheta_\nu &= \varphi_\nu - \frac{\varphi^*(r_\nu)}{\varphi^*(r_\nu) - \frac{\pi}{2}} \left(\varphi_\nu - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

An Hand der Formeln (12) und (13) ist leicht zu verifizieren, daß

$$\iint (D_{z_\nu/\xi_\nu} - 1) \frac{d\xi_\nu d\eta_\nu}{|\xi_\nu|^2} < \infty \quad (16)$$

ist¹⁸⁾, wobei das Integral sich über den Quadranten $\xi_\nu, \eta_\nu \geq 0$ erstreckt.

Durch (15) geht das Gebiet G_1 in den Quadranten $\xi_\nu \geq 0, \eta_\nu \geq 0$ über. Ein Punkt $y_\nu = y$ der positiven y_ν -Achse geht über in den Punkt $\eta_\nu = y$

¹⁷⁾ d_ϱ^+ ist nichts anderes als der logarithmische Abstand des auf C liegenden Bildpunktes von dem zugehörigen Windungspunkt. Diese geometrische Deutung von ϱ ist wichtig für die späteren Verheftungen.

¹⁸⁾ Diese Tatsache findet ihre natürliche Erklärung darin, daß die Abbildung (15) im Unendlichen sehr wenig von der Identität abweicht. Es ist

$$D_{z_\nu/\xi_\nu} - 1 = D(\varrho_\nu, \vartheta_\nu) - 1 < \text{Konst. } \frac{1}{\varrho_\nu}.$$

der positiven η_ν -Achse und ein Punkt ϱ (Gl. 14) auf Γ_1 in den Punkt $\xi_\nu = \varrho$ der positiven ξ_ν -Achse.

Auf die gleiche Weise bilden wir das Gebiet G_2 quasikonform auf den Quadranten $\xi_\nu \leq 0$, $\eta_\nu \geq 0$ ab und heften die beiden längs der positiven η_ν -Achse zu einer Halbebene H_ν zusammen. Auf der negativen ξ_ν -Achse haben wir statt (14) die Beziehung

$$\varrho = \frac{1}{d^-} \log |w(z_\nu)| . \quad (17)$$

Dabei bezieht sich d^- und w auf den anderen log. Windungspunkt.

13. Wir haben damit jedes periodische Ende Φ_ν^* ($\nu = 1, \dots, m$) auf eine Halbebene H_ν quasikonform abgebildet. Die Schnitte C wurden so gewählt, daß die Φ_ν^* allein die Fläche W bis auf einen endlichen Kern zusammensetzen (Fig. 5).

Wir bilden nun die Halbebenen H_ν vermöge

$$r' = \left(\frac{d_1^+ d_2^+ \dots d_\nu^+}{d_1^- d_2^- \dots d_{\nu-1}^-} \right)^{\frac{2}{m}} \varrho_\nu^{\frac{2}{m}}, \quad \nu = 1, \dots, m , \quad (18)$$

$$\varphi' = \frac{2}{m} \vartheta_\nu + (\nu - 1) \frac{2\pi}{m} , \quad \zeta_\nu = \varrho_\nu e^{i\vartheta_\nu} , \quad z' = r' e^{i\varphi'} ,$$

konform auf die z' -Winkelgebiete H'_ν mit der Öffnung $\frac{2\pi}{m}$ ab. Die gesamte Abbildung von W auf die z' -Ebene ist gemäß (14) und (17) in der längs des Strahles $\varphi' = 0$ aufgeschlitzten z' -Ebene stetig. Dem Punkt $x^+ = r'$ des oberen Ufers des Schlitzes entspricht der Punkt

$$x^- = \left(\frac{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-} \right)^{\frac{2}{m}} r' = e^{\frac{\pm 2\Delta}{m}} r' \quad (19)$$

des unteren Ufers.

Üben wir auf die aufgeschlitzte z' -Ebene die Transformation

$$z' = z^{1 \pm \frac{4i}{m}}, \quad \begin{cases} r' > 1, & 0 < \varphi' < 2\pi, \\ r > e^{\frac{\pm 2\Delta}{m}}, & \pm \frac{4 \log r}{m\pi} < \varphi < 2\pi \pm \frac{4 \log r}{m\pi}, \end{cases} \quad (20)$$

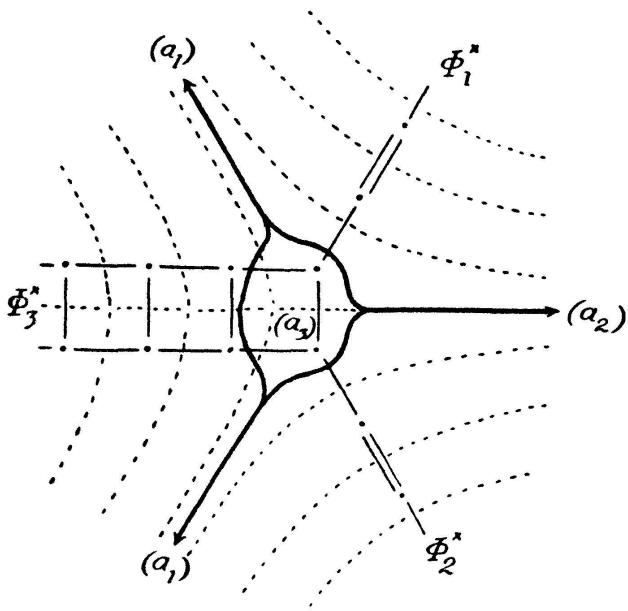


Fig. 5.

aus, so werden die sich nach (19) entsprechenden beiden Punkte $z' = r'$
und $z' = e^{\frac{\pm 2\Delta}{m}} r' e^{2\pi i}$ in ein und denselben Punkt übergeführt.

Die Abbildung (20) ist im Nullpunkt singulär, darum müssen wir den Einheitskreis ausschließen, was aber für die Anwendung der Sätze 1 und 2 (Nr. 5) keine Rolle spielt.

14. Die schlichte Abbildung von W auf die z -Ebene ist damit bis auf einen gewissen Kreis stetig. Wir wollen beweisen, daß sie fast-konform ist. Es ist nach Nr. 8

$$D_{w/z} = D_{z_\nu/\xi_\nu},$$

denn die Abbildungen $w \leftrightarrow z_\nu$, $\xi_\nu \leftrightarrow z'$, $z' \leftrightarrow z$, sind konform¹⁹⁾. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int (D_{w/z} - 1) \frac{df_z}{|z|^2} &= \int (D_{w/z} - 1) \left| \frac{d \log z}{d \log z'} \right|^2 \frac{df_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \int (D_{w/z} - 1) \frac{df_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^m \int_{H_\nu} \int (D_{z_\nu/\xi_\nu} - 1) \left| \frac{d \log z'}{d \log \xi_\nu} \right|^2 \frac{d\xi_\nu d\eta_\nu}{|\xi_\nu|^2} \\ &= \frac{4}{m^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^m \int_{H_\nu} \int (D_{z_\nu/\xi_\nu} - 1) \frac{d\xi_\nu d\eta_\nu}{|\xi_\nu|^2} < \infty. \end{aligned}$$

Die letzten Integrale sind in der Tat gemäß (16) endlich. Nach Satz 1 und 2 (Nr. 5) können wir auf den parabolischen Typus von W schließen und die Vergleichsgrößen $N(r, a)$, $N_1(r, a)$, $T(r)$ der erzeugenden Funktion $w(z)$ auf der z -Ebene abschätzen.

§ 5. Wachstumsordnung von $w(z)$ und Beweis des Satzes A.

15. Die Wachstumsordnung von $w(z)$ ist definiert durch

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log r}. \quad (21)$$

Einem Kreis $|z| = r$ der z -Ebene entspricht nach (20) eine Kurve der z' -Ebene, welche zwischen den Kreisen

$$|z'| = r' = r^\alpha \quad \text{und} \quad |z'| = r' = e^{\frac{\pm \Delta}{m \pi}} r^\alpha \quad (22)$$

liegt. Dabei ist $\alpha = 1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2}$.

¹⁹⁾ Hier können wir nicht von Zusammensetzung fast-konformer Abbildungen sprechen, denn die Abbildung $w \leftrightarrow z'$ ist nicht stetig (außer im Fall $\Delta = 0$).

Einem Kreise $|z'| = r'$ entsprechen wiederum, gemäß (18) m Halbkreise in den m Halbebenen H_ν ($\nu = 1, \dots, m$) mit den Radien (Nr. 19)

$$|\zeta_\nu| = \varrho_\nu = \frac{(d_1 d_2 \dots d_{\nu-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_\nu)^+} r'^{\frac{m}{2}}. \quad (23)$$

Da die Funktionen $R_\nu(e^z)$ die Periode 2π haben, so ist die Anzahl der Periodenstreifen, welche Punkte des Halbkreises ϱ_ν enthalten, asymptotisch gleich $\frac{\varrho_\nu}{2\pi}$. Jede Periode vertritt eine endliche Anzahl n_ν (Grad von $R_\nu(u)$) von Blättern der w -Ebene, somit gilt für die a -Stellen einer gewissen w -Umgebung

$$B r^{\frac{m}{2}\alpha} < n(r, a) < A r^{\frac{m}{2}\alpha}, \quad (24)$$

wobei die Konstanten A und B nur von den Größen n_ν , d_ν^+ , d_ν^- , m und Δ abhängen. Integration ergibt

$$\frac{2}{m\alpha} B r^{\frac{m}{2}\alpha} < N(r, a) < \frac{2}{m\alpha} A r^{\frac{m}{2}\alpha}. \quad (25)$$

Wegen der Defektrelation ist also auch

$$\frac{2}{m\alpha} B r^{\frac{m}{2}\alpha} < T(r) < \frac{2}{m\alpha} A r^{\frac{m}{2}\alpha} \quad (26)$$

und daraus folgt

Satz A. Die erzeugende Funktion $w(z)$ einer Fläche W mit m periodischen Enden und der Charakteristik Δ gehört zum Mitteltypus der Ordnung

$$\lambda = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right). \quad (27)$$

Wir werden später beweisen, daß im Fall $\Delta = 0$ Defekte und Indizes rational sind.



Fig. 6: $d'_1 = 1$, $d'_2 = 2$, $n = 2$.

16. Die periodischen Flächen $R(e^z)$ sind besondere Flächen W mit

$$m = 2, \quad d_1^+ = d_2^- = d_1, \\ d_1^- = d_2^+ = d_2,$$

so daß $\Delta = 0$, $\lambda = 1$ ist (Fig. 6).

Ersetzen wir nun eine Hälfte des Komplexes von $R(e^z)$ durch ihre symmetrische²⁰⁾ (Fig. 7), so wird

$$d_1^+ = d_2^+ = d_1, \quad d_1^- = d_2^- = d_2$$

²⁰⁾ Vgl. H. Wittich (2). Wir wollen eine solche Operation *Antisymmetrisierung* nennen.

und darum

$$\Delta = \left| \log \frac{d_1^2}{d_2^2} \right|, \quad \lambda = 1 + \left(\frac{\log d_1 - \log d_2}{\pi} \right)^2.$$

Die Größe Δ mißt hier sozusagen die Asymmetrie der Fläche W' (Fig. 7). Im allgemeinen Falle können wir sagen: die Erhöhung der Ordnung über den Wert $\frac{m}{2}$ hinaus wird durch die Asymmetrie im Flächenbau verursacht.

Die a -Stellen von $w(z)$ verteilen sich in endlich viele Gruppen derart, daß die Stellen einer einzelnen Gruppe sich an eine Spirale

$$r = e^{\frac{m\pi}{4}(\varphi + \varphi_0)} \quad (\text{Fig. 8})$$

anschmiegen. Die Krümmung K im Kurvenpunkt $|z| = r$ ist um so stärker, je größer Δ ist:

$$K = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{m^2 \pi^2}{\Delta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

17. Andererseits sind Fälle bekannt, in denen die Störung gewisser Symmetrieeigenschaften einer Fläche den Übergang vom parabolischen zum hyperbolischen Typus verursacht²¹⁾. An einem Beispiele seien die beiden Tatsachen in Zusammenhang gebracht.

Der Komplex der Fläche W_n

$$R(e^z) = \left(1 + \frac{e^z}{n} \right)^n$$

besteht aus einer Kette von algebraischen Elementargebieten n -ter Ordnung, welche an den Rand eines log. Gebietes grenzen (Fig. 6: $n = 2$). Hier ist

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{n}.$$

Durch Antisymmetrisierung bekommen wir eine Fläche W'_n : $m = 2$, $\Delta = \log n^2$ (Fig. 8). Die Ordnung der erzeugenden Funktion ist gemäß (27)

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\log n}{\pi} \right)^2.$$

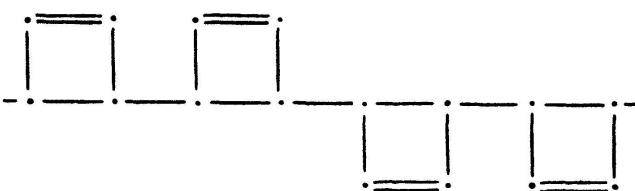


Fig. 7: Fläche W' .

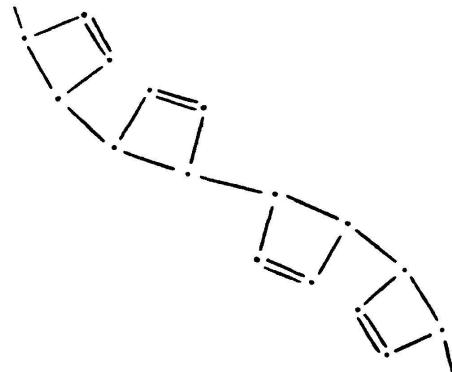


Fig. 8.

²¹⁾ Myrberg (1), C. Blanc (1).

Solange n (also die Ordnung) endlich bleibt, gehört die Fläche W'_n nach bekannten Kriterien²²⁾ zum parabolischen Typus. Im Grenzfall $n = \infty$

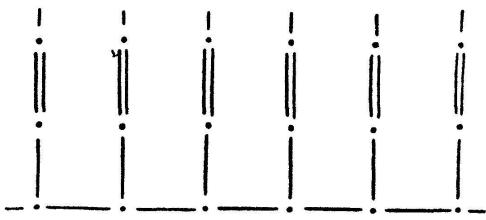


Fig. 9: Fläche W_∞ ($w = e^{e^z}$)

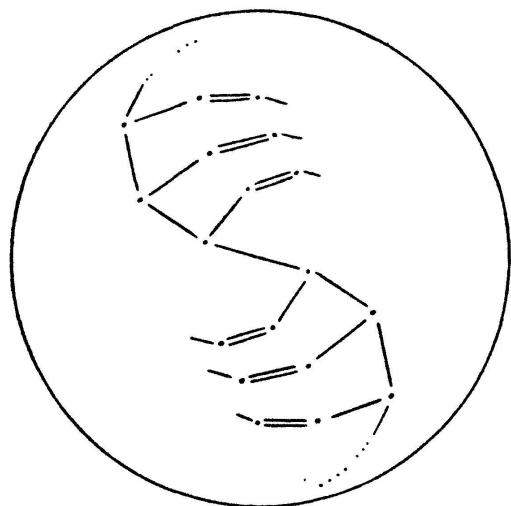


Fig. 10: Fläche W'_∞

$$\lim R(e^z) = e^{e^z}, \quad W_n \rightarrow W_\infty,$$

gehört die antisymmetrische Fläche W'_∞ dem hyperbolischen Typus an, obwohl die Fläche W_∞ parabolisch ist (Fig. 9 und 10). Der Beweis ergibt sich wie für endliche n , nur tritt hier an Stelle der Transformation (20) eine solche der Form

$$z = f(z'),$$

wobei r für $r' \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert R strebt²³⁾. Die oben betrachteten Spiralen nähern sich jetzt asymptotisch dem Rand des Kreises $|z| < R$.

Zusammenfassend: *Die Asymmetrie bewirkt bei schwacher Verzweigtheit eine Ordnungserhöhung und, bei genügend starker Verzweigtheit einen Übergang vom parabolischen zum hyperbolischen Typus.*

§ 6. Wertverteilung von $w(z)$ im Fall $\Delta = 0$.

18. Wir wollen hier einige Aussagen über Defekte und Indizes von $w(z)$ im Fall $\Delta = 0$ herleiten, die wir später für die Lösung des Umkehrproblems brauchen werden.

Nach (24) und (25) ist es erlaubt, zur Berechnung von $\delta(a)$ und $\varepsilon(a)$ die Größen $n(r, a)$ und $n_1(r, a)$ an Stelle von $N(r, a)$ und $N_1(r, a)$ zu benutzen.

Hier entsprechen nach (23) einem Kreis $|z| \leq r$ m Halbkreise

$$|\zeta_i| \leq \varrho_i = \frac{(d_1 d_2 \dots d_{i-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_i)^+} r^{\frac{m}{2}}, \quad 0 \leq \vartheta_i \leq \pi, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Sind also $\delta^i(a)$, $\varepsilon^i(a)$ Defekt und Index von a in bezug auf $R_i(e^z)$, so ist bezüglich $w(z)$

²²⁾ H. Wittich (1), R. Nevanlinna (3).

²³⁾ C. Blanc (1).

$$\delta(a) = \frac{n_1 \frac{1}{d_1^+} \delta^1(a) + \cdots + n_m \frac{(d_1 d_2 \dots d_{m-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_m)^+} \delta^m(a)}{n_1 \frac{1}{d_1^+} + \cdots + n_m \frac{(d_1 d_2 \dots d_{m-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_m)^+}} , \quad (28)$$

$$\varepsilon(a) = \frac{n_1 \frac{1}{d_1^+} \varepsilon^1(a) + \cdots + n_m \frac{(d_1 d_2 \dots d_{m-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_m)^+} \varepsilon^m(a)}{n_1 \frac{1}{d_1^+} + \cdots + n_m \frac{(d_1 d_2 \dots d_{m-1})^-}{(d_1 d_2 \dots d_m)^+}} .$$

Für die δ^i , ε^i der periodischen Funktion $R_i(e^z)$ brauchen wir nur die relativen Defekte und Indizes in den einzelnen Perioden zu berechnen. Diese lassen sich wiederum aus dem Komplex der rationalen Funktion $R_i(u)$ ablesen.

Die Anzahl der Knoten dieses Komplexes ist gleich $E = 2n_i$, wobei n_i den Grad von $R_i(u)$ bedeutet. Einem (eigentlichen oder scheinbaren²⁴⁾) Grundpunkt a_ν entsprechen eine gewisse Anzahl S_ν von algebraischen Elementargebieten. Sei $2K_\nu$ die Anzahl der Strecken, welche diese S_ν Gebiete beranden, dann gilt für die Funktion $R_i(e^z)$

$$\begin{aligned} \delta^i(a_\nu) + \varepsilon^i(a_\nu) &= \frac{K_\nu - S_\nu}{n_i} , & \delta^i(a_\nu) &= 0 , \\ && \text{für } a_\nu &\neq R_i(\infty) , \quad R_i(0) , \\ \delta^i(a_\nu) + \varepsilon^i(a_\nu) &= \frac{K_\nu - S_\nu + 1}{n_i} , & \delta^i(a_\nu) &= \frac{d_i^+}{n_i} , \\ && \text{für } a_\nu &= R_i(\infty) \neq R_i(0) , \\ \delta^i(a_\nu) + \varepsilon^i(a_\nu) &= \frac{K_\nu - S_\nu + 1}{n_i} , & \delta^i(a_\nu) &= \frac{d_i^-}{n_i} , \\ && \text{für } a_\nu &= R_i(0) \neq R_i(\infty) , \\ \delta^i(a_\nu) + \varepsilon^i(a_\nu) &= \frac{K_\nu - S_\nu + 2}{n_i} , & \delta^i(a_\nu) &= \frac{d_i^+ + d_i^-}{n_i} , \\ && \text{für } a_\nu &= R_i(\infty) = R_i(0) , \end{aligned} \quad (29)$$

Insbesondere folgt daraus, daß die δ^i , ε^i rational sind, mithin nach (28) auch δ und ε . Das ist die Ergänzung zu Satz A (Nr. 15).

19. Die Anzahl der Elementargebiete bzw. Strecken im Komplex $R_i(u)$ ist

$$S = \sum_{\nu=1}^q S_\nu \quad \text{bzw.} \quad K = \sum_{\nu=1}^q K_\nu ,$$

²⁴⁾ Vgl. Nr. 8.

so daß nach der Polyederformel gilt

$$\sum_{\nu=1}^q \delta^i(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon^i(a_\nu) = \sum \frac{K_\nu - S_\nu}{n_i} + \frac{2}{n_i} = \frac{2(K - S + 2)}{E} = 2 .$$

Gemäß (28) ergibt sich auch²⁵⁾ für $w(z)$

$$\sum \delta(a_\nu) + \sum \varepsilon(a_\nu) = 2 . \quad (30)$$

Ebenso folgt aus (28) und (29)

$$\sum_{\nu=1}^q \delta(a_\nu) > 0 , \quad (31)$$

$$\delta(a_\nu) + \varepsilon(a_\nu) \leq 1 , \quad < 1 \text{ falls } \varepsilon(a_\nu) > 0 \text{ ist.} \quad (32)$$

Durch Beweis des Satzes B wird gezeigt, daß für die Zahlen δ und ε keine weiteren Einschränkungen außer (30), (31) und (32) bestehen.

20. Gilt für alle periodischen Enden Φ_i^*

$$d_i^+ = d_i^- = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) , \quad (33)$$

so ist die Bedingung $\Delta = 0$ automatisch erfüllt und die Formel (28) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \delta(a) &= \frac{l_1 \delta^1(a) + \dots + l_m \delta^m(a)}{l_1 + \dots + l_m} , \\ \varepsilon(a) &= \frac{l_1 \varepsilon^1(a) + \dots + l_m \varepsilon^m(a)}{l_1 + \dots + l_m} . \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei ist

$$l_i = \frac{n_i}{d_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (35)$$

und l_i hängt nur vom betreffenden Ende ab. Wir sagen, das Ende sei von der Charakteristik Null und nennen l_i seine reduzierte Länge. Es ist nicht möglich, beim Umkehrproblem mit solchen Enden allein auszukommen. Die Formel (34) läßt sich aber mit Hilfe des Begriffes zusammengesetzter Flächen verallgemeinern.

Zusammengesetzte Flächen. Es seien zwei Flächen W_1, W_2 von der Charakteristik $\Delta = 0$, welche je einen log. Windungspunkt über demselben Punkt a_ν besitzen. In dem betreffenden log. Gebiet jedes Komplexes werde ein Schnitt angebracht. Heften wir die beiden Komplexe längs der Schnittufer zusammen, so entsteht ein Komplex W (oder

²⁵⁾ Das folgt auch direkt aus einem allgemeineren Satz von Teichmüller (2).

Fläche W), welche auch von der Charakteristik $\Delta = 0$ ist: Wir sagen, W_1 und W_2 seien vereinigbar und schreiben

$$W = W_1 + W_2 . \quad (36)$$

Für jeden Teilkomplex lässt sich analog zu (35) — durch den Nenner von (28) — eine reduzierte Länge²⁶⁾ definieren:

$$L_i = \left(n_1 \frac{1}{d_1^+} + \cdots n_m \frac{(d_1 \dots d_{m-1})^-}{(d_1 \dots d_m)^+} \right)_i \quad (i = 1, 2) , \quad (37)$$

Wegen $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ hängt L_i nicht vom Umlaufssinn bei der Numerierung der Enden ab.

Sind $\delta^1(a)$, $\varepsilon^1(a)$ bzw. $\delta^2(a)$, $\varepsilon^2(a)$ Defekt und Index von a in bezug auf W_1 bzw. W_2 , so wird — analog zu (34) — bezüglich W

$$\delta = \frac{L_1 \delta^1 + L_2 \delta^2}{L_1 + L_2} , \quad \varepsilon = \frac{L_1 \varepsilon^1 + L_2 \varepsilon^2}{L_1 + L_2} . \quad (38)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich eine Fläche W aus mehreren W_1, W_2, \dots zusammensetzen. Darunter müssen wir eine sukzessive Zusammensetzung verstehen, d. h. wir bilden zuerst $W_1 + W_2$, dann $(W_1 + W_2) + W_3$, usw. Es ist nur erforderlich, daß W_r und $(W_1 + W_2 + \cdots + W_{r-1})$ log. Windungspunkte über dem gleichen Grundpunkt besitzen. Wie man auch die Reihenfolge der W_r annimmt, gilt immer analog zu (38)

$$\delta = \frac{\sum L_i \delta^i}{\sum L_i} , \quad \varepsilon = \frac{\sum L_i \varepsilon^i}{\sum L_i} , \quad (39)$$

Als W_1, W_2, \dots werden wir die periodischen Flächen $R(e^z)$ nehmen oder solche, die sich aus periodischen Flächen zusammensetzen lassen. Alle diese Flächen sind offenbar von der Charakteristik $\Delta = 0$.

21. Problem. Gegeben seien zwei vereinigbare Flächen W_1, W_2 ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$). Es sollen zwei andere vereinigbare Flächen W'_1, W'_2 ($\Delta'_1 = \Delta'_2 = 0$) konstruiert werden mit folgenden Eigenschaften:

1) W'_1 und W'_2 haben entsprechend gleiche Defekte und Indizes wie W_1 und W_2 .

2) Die Längen L'_1 und L'_2 von W'_1 und W'_2 sollen zueinander in gegebenem rationalem Verhältnis stehen.

Lösung: Es sei

$$L_1 = \frac{N_1}{D_1} , \quad L_2 = \frac{N_2}{D_2} , \quad \frac{L'_1}{L'_2} = \frac{N'_1}{N'_2} \quad (D_i, N_i, N'_i \text{ ganze Zahlen}).$$

²⁶⁾ Die Numerierung beginnt bei dem ausgezeichneten log. Gebiet.

*Dann nehmen wir für W'_1 (bzw. W'_2) eine Fläche, welche sich aus $N'_1 N_2 D_1$ (bzw. $N'_2 N_1 D_2$) Exemplaren W_1 (bzw. W_2) zusammensetzt. Defekte und Indizes haben sich nicht geändert und die Längen sind

$$\begin{aligned} L'_1 &= N'_1 N_2 D_1 L_1 = N'_1 N_1 N_2 , \\ L'_2 &= N'_2 N_1 D_2 L_2 = N'_2 N_2 N_1 . \end{aligned} \quad (40)$$

§ 7. Das Ullrichsche Umkehrproblem. Die Sätze B und C.

22. Wir wollen eine Fläche W von der Charakteristik $\Delta = 0$ konstruieren, welche in bezug auf a_1, a_2, \dots, a_q dem folgenden Schema entspricht

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_\nu \dots a_q \\ \delta_1 \dots \delta_\nu \dots \delta_q \\ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \dots \delta_\nu \dots \delta_q \\ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_q \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, \dots, q , \quad (41)$$

wobei die rationalen Zahlen δ_ν und ε_ν den Bedingungen (30), (31), (32) genügen. Wir nennen dies ein *U-Schema*. Läßt sich die entsprechende Fläche W realisieren, so heißt das Schema lösbar.

Es ist leicht einzusehen, daß nur ein einziges U-Schema mit zwei Spalten existiert, nämlich das Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

und die Lösung ist eine lineare Funktion von e^z .

Ist aber (41) ein U-Schema mit mindestens zwei nicht verschwindenden δ_ν , so sind es auch die Schemen

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \dots \delta_\nu + \varepsilon_\nu \dots \delta_q \\ \varepsilon_1 \dots 0 \dots \varepsilon_q \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \dots 0 \dots \delta_q \\ \varepsilon_1 \dots \delta_\nu + \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_q \end{pmatrix} ; \quad \delta_1, \varepsilon_\nu \neq 0 . \quad (43)$$

23. Nun gilt das folgende

Lemma: *Sind die Schemen (42) und (43) lösbar, so ist es auch das Schema (41).*

Beweis: Wir lösen (42) und (43) durch die Komplexe W_1 bzw. W_2 . Daraus können wir nach Nr. 21 zwei Flächen W'_1 und W'_2 konstruieren, welche auch (42) und (43) lösen und deren Längen L'_1, L'_2 — in bezug auf ein gemeinsames log. Elementargebiet — sich wie $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ verhalten :

$$L'_1 : L'_2 = \delta_\nu : \varepsilon_\nu .$$

Durch Zusammensetzung von W'_1 und W'_2 erhalten wir gemäß (38) eine Fläche W , welche (41) löst, w. z. b. w.

Wir drücken diese Tatsache symbolisch aus durch

$$(\delta_\nu + \varepsilon_\nu) \begin{pmatrix} \delta_1 \dots \delta_\nu \dots \\ \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \end{pmatrix} = \delta_\nu \begin{pmatrix} \delta_1 \dots \delta_\nu + \varepsilon_\nu \dots \\ \varepsilon_1 \dots 0 \dots \end{pmatrix} + \varepsilon_\nu \begin{pmatrix} \delta_1 \dots 0 \dots \\ \varepsilon_1 \dots \delta_\nu + \varepsilon_\nu \dots \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Nach dem Lemma lässt sich das allgemeine Schema (41) schrittweise je auf die beiden folgenden Arten von Schemen zurückführen:

- a) Schemen mit nur einem nicht verschwindenden δ ,
- b) Schemen, bei welchen jede Spalte ν nur ein nicht verschwindendes Element, entweder δ_ν oder ε_ν , besitzt.

Die ersten Schemen nennen wir erste Hauptschemen (46). Die zweiten lassen sich durch die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^q \delta_\nu \varepsilon_\nu = 0 \quad (45)$$

charakterisieren und heißen darum Orthogonalschemen.

24. *Hauptschemen*: Es sind Schemen, welche den periodischen Funktionen $R(e^z)$ entsprechen:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} : \text{ erstes Hauptschema ,} \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} : \text{ zweites Hauptschema .} \quad (47)$$

Die Auflösung dieser Schemen ist ein algebraisches Problem. Ist n ein gemeinsamer Nenner der Zahlen δ_ν und ε_ν , so schreiben sich (46) und (47) in der folgenden Form

$$\begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & \frac{d_2}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \frac{e_3}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

wobei die d_ν und e_ν ganze Zahlen sind.

Nach Nr. 18 müssen wir eine rationale Funktion $R(u)$ n -ten Grades konstruieren, welche nur über a_1, a_2, \dots, a_q mehrfache Stellen hat, und zwar mit folgender Vorschrift:

1. für das erste Hauptschema:

Über a_1 liegt ein Windungspunkt $u^+ = \infty$ ($d^+ - 1$)-ter Ordnung und

²⁷⁾ Ordnung ist so zu verstehen, daß eine schlichte Stelle von nullter Ordnung ist.

ein Windungspunkt $u^- = 0$ ($d^- - 1$ -ter Ordnung ($d^+ + d^- = d_1$) ; die Gesamtordnung der anderen Windungspunkte ist gleich e_1 .

Über a_ν ($\nu = 2, 3, \dots, q$) beträgt die Gesamtordnung der Windungspunkte e_ν ;

2. für das zweite Hauptschema :

Über a_1 und a_2 liegt je ein Windungspunkt $u_1 = \infty$ ($d_1 - 1$ -ter Ordnung bzw. $u_2 = 0$ ($d_2 - 1$ -ter Ordnung ; die Gesamtordnung der anderen Windungspunkte ist gleich e_1 bzw. e_2 .

Über a_ν ($\nu = 3, 4, \dots, q$) beträgt die Gesamtordnung der Windungspunkte e_ν .

Wegen (30) und (32) sind diese beiden Probleme lösbar²⁸⁾ : (30) ist die Hurwitzsche Relation ; (32) besagt, daß die Gesamtordnung der über einem Grundpunkt a_ν liegenden Windungspunkte kleiner als der Grad von $R(u)$ ist.

Aus der so erhaltenen rationalen Funktion $R(u)$ bilden wir dann die Funktion $R(e^z)$, welche offenbar (46) bzw. (47) löst.

Sind einmal die Hauptschemen gelöst, so läßt sich die Auflösung des allgemeinen Schemas nach (38) auf ein diophantisches Gleichungssystem zurückführen. Aber die Lösungen dieses Systems müssen so komplizierte Nebenbedingungen erfüllen, daß wir den kombinatorischen Weg vorziehen.

25. *Orthogonalschema* : Ein Orthogonalschema läßt sich nach passender Numerierung der Grundpunkte a_ν in der folgenden Form schreiben :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \dots \delta_\nu 0 \dots 0 \\ 0 \dots \varepsilon_{\nu+1} \dots \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} \dots \frac{d_\nu}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} \dots \frac{e_q}{n} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Für $\nu = q$ haben wir das von R. Nevanlinna gelöste Schema²⁹⁾.

Für $\nu \leq 2$ haben wir ein Hauptschema.

Es sei also $\nu \geq 3$. Wir wählen zunächst den gemeinsamen Nenner n so, daß die Summe der d_i gerade ist und setzen

$$d_1 + d_2 + \dots + d_\nu = 2d \leq 2n.$$

²⁸⁾ Man kann auch direkt den Komplex von $R(u)$ angeben. Dazu konstruiere man zunächst den Komplex einer Funktion R , welche über a_ν ($\nu = 1, \dots, q$) genau einen Windungspunkt λ_ν -ter Ordnung — mit passend gewählten λ_ν — besitzt. Dies gelingt durch Rekurrenz in bezug auf q . (Der Fall $q = 3$ wird in Nr. 29 behandelt.) Es ist dann leicht, daraus die gewünschten Komplexe herzuleiten.

²⁹⁾ R. Nevanlinna (1).

Wir lösen dann die (zweiten) Hauptschemen

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j & a_{\nu+1} & \dots & a_q \\ \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} \quad (50)$$

für alle Kombinationen $i, j = 1, 2, \dots, \nu$.

Alle diese Hauptschemen ergeben Flächen W_{ij} gleicher reduzierter Länge

$$L_{ij} = \frac{2n}{d}.$$

Wir konstruieren nach Nr. 20 eine Fläche W mit $2d$ periodischen Enden, welche sich aus d solchen Exemplaren W_{ij} zusammensetzt derart, daß von den insgesamt $2d$ log. Windungspunkten von W genau d_i über dem vorgegebenen Grundpunkte a_i liegen ($i = 1, 2, \dots, \nu$). Jeder Windungspunkt liefert zum Defekt von a_i den Beitrag $\frac{2}{d} \cdot \frac{d}{2n} = \frac{1}{n}$, und der gesamte Defekt des Punktes a_i summiert sich also auf den vorgegebenen Wert $\frac{d_i}{n} = \delta_i$. Der Index von a_k ($k > \nu$) bezüglich W_{ij} ist immer ε_k , so daß in bezug auf W auch der gleiche Index ε_k herauskommt. Somit ist das Orthogonalschema (49) durch die Fläche W gelöst.

Es gilt also der

Satz B. Unter den Voraussetzungen

- 1) $\sum_{\nu=1}^q \delta_\nu + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon_\nu = 2,$
- 2) $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ rational,
- 3) $\sum_{\nu=1}^q \delta_\nu \neq 0,$
- 4) $\delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1, \quad < 1 \text{ falls } \varepsilon_\nu \neq 0 \text{ ist,}$

kann man das Umkehrproblem mit Hilfe von Flächen W der Charakteristik $\Delta = 0$ stets lösen.

Man kann sich noch die Frage stellen, welches die kleinste Anzahl m von periodischen Enden ist, die man zur Lösung eines gegebenen Schemas benötigt.

26. Die oben angegebene Methode ist zwar bequem für den Beweis der Lösbarkeit des Ullrichschen Umkehrproblems, das folgende Verfahren führt aber schneller zum Ziel.

Im Schema (41):

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}$$

fassen wir alle ε_ν ins Auge, für welche $\delta_\nu > 0$ ist. Diese seien nach passender Numerierung der a_ν , die r ersten:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_r & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_r & \varepsilon_{r+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}$$

mit $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r$ ($r \leq q$).

Für $r \leq 2$ haben wir ein Hauptschema.

Es sei also $r \geq 3$. Wenn für alle $\nu \leq r$ $\varepsilon_\nu + \frac{1}{2} \sum_1^r \delta_\mu < 1$ gilt, so ist die in Nr. 25 für Orthogonalschemen angegebene Auflösungsmethode noch verwendbar. Wir nennen ein solches Schema quasiorthogonal.

Gilt nun für ε_1 und nur für dieses $\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum \delta_\mu \geq 1$, so läßt sich obiges Schema sogleich auf zwei quasiorthogonale Schemen zurückführen, nämlich durch die Zerlegung³⁰⁾

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 - \varepsilon_2) \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} =$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 + \delta_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} \delta_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} .$$

Man überzeugt sich leicht auf Grund der Relationen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r , \quad \varepsilon_1 + \delta_1 < 1 , \quad \varepsilon_1 + \delta_1 + \varepsilon_2 + \delta_2 < 2 ,$$

daß die Schemen rechts quasiorthogonal sind.

Gilt aber für ε_1 und ε_2 $\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum \delta_\mu = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sum \delta_\mu = 1$, so wird $\varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_q = 0$

Es bleibt also nur noch das einfache Schema

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Hier ist die Orthogonalisierung (Nr. 25) dann notwendig.

27. Andererseits kann man sich die Frage stellen, wie einfach sich die periodischen Enden wählen lassen, um das allgemeine Schema zu lösen, wenn es nicht auf ihre Anzahl m ankommt.

Nach dem Vorigen brauchen wir diese Untersuchung nur für die folgenden Schemen auszuführen:

³⁰⁾ Vgl. Schluß von Nr. 23.

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Wir können, wie bei der Behandlung der Orthogonalschemen, auf analoge Weise die Schemen (51) — indem wir statt $\delta = \frac{1}{2} \sum_1^q \delta_\nu$ die Summe $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_2^q \varepsilon_\nu$ betrachten — auf die folgenden Schemen zurückführen:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Das letzte Schema lässt sich wiederum auf die beiden ersten zurückführen. Wir unterscheiden dabei drei Fälle:

1) $2\varepsilon < 1$. Wir setzen

$$2 \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

2) $2\varepsilon \geq 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Es ist dann $2\delta \leq 1$ oder $2\delta^2 \leq \frac{1}{2}$ und wir können setzen:

$$(2 + 2\delta) \begin{pmatrix} \delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta^2 & 1-\delta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta^2 & 1-\delta^2 \end{pmatrix} + 2\delta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $2\varepsilon \geq 1$, $\delta_1 > \delta_2$. Es gilt immer noch $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ und die Zerlegung

$$\left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1} + 2 \right) \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \begin{pmatrix} \delta_1 + \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + \frac{\delta_2}{\delta_1} \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} & \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

führt auf 2) zurück.

Somit gilt der

Satz C. Das Ullrichsche Umkehrproblem lässt sich durch Flächen W mit endlich vielen periodischen Enden lösen, deren einzelne höchstens über drei Grundpunkten verzweigt sind und den folgenden sogenannten Elementarschemen entsprechen³¹⁾:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

³¹⁾ Das einzige Ende mit zwei Grundpunkten ist das logarithmische Ende.

28. Würden wir von diesem Resultat ausgehen, so könnten wir den Beweis der Lösbarkeit des Ullrichschen Problems dadurch vereinfachen, daß wir bei der Abbildung der einzelnen Enden auf einen Quadranten zuerst ihre drei Grundpunkte auf eine Gerade verlegen. Die Kurve Γ (Fig. 4, Nr. 12) ist dann nämlich auch eine Gerade und die Gebiete G_1 bzw. G_2 sind von selbst Quadranten.

Andererseits brauchen wir, statt die allgemeinen Hauptschemen (46) und (47), nur (53) aufzulösen, und das entsprechende algebraische Problem vereinfacht sich wesentlich.

Dabei müssen wir eine algebraische Funktion konstruieren, welche höchstens fünf Windungspunkte, verteilt über drei Grundpunkten, besitzt. *Wir können aber erreichen, daß schon Funktionen $R(u)$ mit drei Windungspunkten genügen.* Dazu brauchen wir nur das erste der Schemen (53) folgendermaßen zu zerlegen:

$$(d_1 + e_1 - 1) \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = (d_1 + e_1 - 1) \begin{pmatrix} \frac{2d_1}{2n} & 0 & 0 \\ \frac{2e_1}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix} =$$

$$(d_1 - 1) \begin{pmatrix} \frac{(2d_1 + 2e_1 - 1) + 1}{2n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix} + e_1 \begin{pmatrix} \frac{1+1}{2n} & 0 & 0 \\ \frac{2d_1 + 2e_1 - 2}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix}.$$

Im letzten Schema haben wir zwar noch fünf Windungspunkte für die periodische Funktion $R(e^z)$, aber nur drei Windungspunkte für die rationale Funktion $R(u)$. Gewisse logarithmische Windungspunkte von $R(e^z)$ röhren von schlichten Stellen von $R(u)$ her.

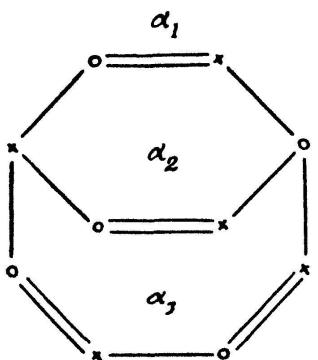


Fig. 11 :

29. Die rationalen Funktionen, die wir brauchen, sollen also nur drei Windungspunkte über drei Grundpunkten aufweisen, z. B. über a_ν einen Windungspunkt α_ν , λ_ν -ter Ordnung ($\nu = 1, 2, 3$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2n - 2$; $\lambda_\nu < n$).

Das Problem wird durch Angabe des Komplexes $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ gelöst. Wir zeichnen zunächst in der z -Ebene ein Polygon mit $2\lambda_1 + 2$ Ecken (Fig. 11). Das Äußere dieses Polygons soll das Elementargebiet α_1 sein. Wir numerieren die Ecken von 1 bis $2\lambda_1 + 2$ und verbinden die erste Ecke mit der

$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2)$ -ten³²) durch einen innerhalb des Ausgangspolygons laufenden Streckenzug, welcher $\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1$ Knoten enthält. Dadurch wird das Polygoninnere in zwei Polygone mit $2\lambda_2 + 2$ bzw. $2\lambda_3 + 2$ Ecken geteilt. Diese sollen die Elementargebiete α_2 bzw. α_3 sein. Um den gewünschten Komplex zu erhalten, haben wir nur noch die eventuell schlichten Stellen über a_1 , a_2 , a_3 mit Zweiecken zu deuten.

(Eingegangen den 27. Mai 1948.)

L I T E R A T U R

- Ahlfors, L.:* (1) Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzenter Funktionen. *Acta Math.* 58 (1932).
- Blanc, C.:* (1) Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. *Comment. Math. Helv.* 9 (1937).
- Le-Van, Thiem:* (1) Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flächen. *Comment. Math. Helv.* 20 (1947).
- Myrberg, P. J.:* (1) Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. *Ann. Acad. sc. Fenn. A* 45 (1935).
- Nevanlinna, R.:* (1) Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. *Acta Math.* 58 (1932).
 (2) Eindeutige analytische Funktion. Berlin 1936, Springer.
 (3) Ein Satz über offene Riemannsche Flächen. *Ann. Acad. sc. Fenn.* 54 (1940).
- Teichmüller, O.:* (1) Untersuchung über konforme und quasikonforme Abbildungen. *Deutsche Math.* 3 (1938).
 (2) Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes der Wertverteilungslehre. Ebenda 2 (1937).
- Ullrich, E.:* (1) Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen N. F.* 1 (1936).
 (2) Flächenbau und Wertverteilung. *9. Congr. Math. scand.* (1939).
- Wittich, H.:* (1) Über die konforme Abbildung einer Klasse von Riemannscher Flächen. *Math. Z.* 45 (1939).
 (2) Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzententen Funktion. Ebenda 51 (1947).

³²) Es ist $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2 = 2n - 2\lambda_3$ eine positive gerade Zahl.