

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	23 (1949)
<b>Artikel:</b>	Automorfismi e struttura topologica di un certo complesso regolare.
<b>Autor:</b>	Vaccaro, Michelangelo
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-19750">https://doi.org/10.5169/seals-19750</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Automorfismi e struttura topologica di un certo complesso regolare

Di MICHELANGELO VACCARO, Roma

Il complesso, oggetto del presente lavoro, è la generalizzazione di un complesso trovato euristicamente durante alcune ricerche sulla classificazione delle varietà tridimensionali.

Di esso studieremo tutti i possibili automorfismi e la struttura topologica la quale risulterà di due tipi diversi a seconda dei casi.

Il primo tipo è il prodotto topologico di una sfera per una circonferenza, il secondo invece è la varietà che si ottiene facendo il prodotto di una sfera per un segmento e poi suturando fra loro le sfere terminali in modo che la varietà risultante sia non orientabile : insomma l'analogia dell'otre di Klein.

1. Fissiamo un numero intero positivo  $k$  qualsiasi e successivamente un altro intero  $n$  indipendente da  $k$  ma non inferiore al valore  $2k + 1$ .

Assumiamo come campo di vertici un gruppo di  $n$  punti, a due a due distinti e costituenti i vertici di un poligono, che denoteremo per semplicità con le cifre da 1 a  $n$  (o anche, se necessario, con cifre ad esse equivalenti modulo  $n$ ).

Consideriamo le  $k - 1$  seguenti  $k$ -celle :

$$1, \dots, k - 1, k + 1; \dots; 1, 3, \dots, k + 1$$

ottenute sopprimendo uno qualsiasi dei  $k - 1$  punti centrali della  $(k + 1)$ -pla :

$$1, \dots, k + 1 .$$

Se si applica ora ai vertici di queste  $k - 1$  celle la sostituzione ciclica

$$(1, \dots, n)$$

e le sue potenze, compresa l'identità, si ottiene un sistema di  $n(k - 1)$   $k$ -celle distinte che individuano il complesso  $C$  che vogliamo considerare.

Queste  $n(k - 1)$  celle si suddividono sia in  $n$  sistemi di  $k - 1$  celle dedotte dalla stessa  $(k + 1)$ -pla, o sistemi A, sia in  $k - 1$  sistemi di

$n$  celle fra loro equivalenti rispetto al gruppo generato dalla sostituzione data, o sistemi B.

Se si applica invece ai vertici del complesso C introdotto una qualsiasi altra sostituzione  $S$  che muti in sè il poligono  $1 \dots n$ , ma con inversione della orientazione, il complesso C si muta ancora in se stesso e precisamente gli  $n$  sistemi  $A_1 \dots A_n$  di celle di C si scambiano fra loro secondo la stessa sostituzione mentre i  $k - 1$  sistemi  $B_1 \dots B_{k-1}$  si scambiano fra loro secondo la sostituzione fissa

$$(k - 1, \dots, 1) .$$

Riassumendo : un qualsiasi automorfismo del poligono  $1 \dots n$  provoca un corrispondente automorfismo del complesso  $C$  perfettamente determinabile dal fatto che i sistemi  $A_i$  si mutano fra loro secondo la stessa sostituzione dell'automorfismo del poligono, mentre i sistemi  $B_i$  restano fermi o si scambiano fra loro secondo la sostituzione fissa  $(k - 1, \dots, 1)$ , secondochè il poligono conserva oppure no la propria orientazione.

Abbiamo con ciò determinato un gruppo di automorfismi di  $C$  isomorfo coll'automorfo del poligono di partenza.

Ora, per  $k \geq 4$ , non esistono altri automorfismi del complesso  $C$  ossia il gruppo trovato coincide col suo automorfo, in altre parole *gli automorfi di C e del poligono sono isomorfi fra loro*.

Per far vedere ciò basterà mostrare che i lati del poligono, come appartenenti a  $C$ , devono di necessità scambiarsi fra loro in qualsiasi automorfismo di  $C$ . Ciò segue dal fatto che tutti e soltanto essi sono i lati di  $C$  contenuti nel massimo numero possibile di  $k$ -celle di  $C$  stesso. Un semplice computo ci convincerà di ciò. Si prenda infatti un lato qualsiasi  $\varrho, \varrho + \sigma$  (ove  $\sigma$  si può assumere, senza che ci sia limitazione, non superiore a  $\left[ \frac{n}{2} \right]$ ) di  $C$  e valutiamo in quante  $k$ -celle di  $C$  esso è contenuto.

Innanzi tutto le celle che contengono questo lato possono appartenere soltanto a  $k - \sigma + 1$  sistemi  $A_i$  consecutivi. Nel primo e nell'ultimo di questi ci sono, per  $\sigma = k$ ,  $k - 1$  celle siffatte e, per  $\sigma < k$ ,  $k - 2$ . Quanto ai sistemi intermedi ognuno di questi ne contiene  $k - 3$ . Pertanto il numero delle  $k$ -celle di  $C$  contenenti il lato  $\varrho, \varrho + \sigma$  è ,

$$\text{per } \sigma = k : \quad k - 1 ,$$

$$\text{per } \sigma = k - 1 : \quad 2(k - 2) ,$$

$$\text{per } \sigma \leq k - 2 : \quad 2(k - 2) + (k - \sigma - 1)(k - 3) .$$

Se si osserva che la terza espressione contiene come casi particolari le due precedenti si conclude che il numero cercato è

$$k^2 - 2k - 1 - \sigma(k - 3) .$$

Questo numero, ove si supponga  $k \geq 4$ , decresce al crescere di  $\sigma$ ; il suo massimo si ottiene pertanto per  $\sigma = 1$  ossia per i lati del poligono e ciò prova appunto quanto abbiamo asserito.

Per  $k \leq 3$  invece questa conclusione non si può trarre in quanto per  $k = 3$  tutti i lati di  $C$  stanno sempre nello stesso numero di triangoli, per  $k = 2$  i lati del poligono  $1 \dots n$  non appartengono più a  $C$  e per  $k \leq 1$  il complesso  $C$  svanisce<sup>1)</sup>.

**2.** Facciamo ora vedere che *il complesso  $C$  è una varietà*. All'uopo basterà far vedere che l'intorno di ogni suo punto è una  $(k - 1)$ -varietà del tipo sfera giacchè ciò porta di conseguenza che l'intorno di ogni sua cella è una varietà sempre del tipo sfera (di dimensione complementare).

Consideriamo il punto  $i$ . Le  $k$ -celle che lo contengono possono appartenere soltanto a uno dei  $k + 1$  sistemi

$$A_{i-k}, \dots, A_i .$$

Le celle del primo e dell'ultimo di questi sistemi contengono tutte quante il vertice  $i$ , quanto a quelle dei sistemi intermedi, tutte quante lo contengono ad esclusione di quella di posto  $j$  se ci si riferisce al sistema  $A_{i-j}$ .

Si hanno con ciò  $k + 1$  sistemi  $S_{i-k} \dots S_i$  di  $(k - 1)$ -celle costituenti l'intorno di  $i$ , i quali comprendono rispettivamente

$$k - 1, k - 2, \dots, k - 2, k - 1$$

celle.

Consideriamo in principio il complesso individuato da queste

$$(k + 1)(k - 1) - (k - 1) = k(k - 1)$$

$(k - 1)$ -celle scisso nei singoli simplessi individuati da ciascuna sua cella e poi suturiamo tra loro i simplessi relativi a celle di uno stesso sistema  $S$ . Otteniamo con ciò altrettanti complessi in numero di  $k + 1$ .

<sup>1)</sup> Si vede però facilmente che il teorema vale anche per  $k = 3$  e  $n \geq 9$ , e per  $k = 2$  e  $n$  dispari; mentre per  $k = 2$  e  $n$  pari  $C$  si spezza in due poligoni e l'automorfo è quindi più ampio. Questa eccezione si presenta anche nei casi particolari  $k = 3$  e  $n = 7, 8$ .

Il primo e l'ultimo sono rispettivamente individuati dalla proiezione del contorno delle celle

$$E_{i-k} \equiv i - k + 1, \dots, i - 1$$

$$E_i \equiv i + 1, \dots, i + k - 1$$

rispettivamente dai vertici

$$i - k \quad \text{e} \quad i + k$$

ossia non sono altro che del tipo sfera piena di contorno coincidente rispettivamente col contorno di  $E_{i-k}$  e  $E_i$ .

Passiamo a un complesso intermedio, relativo cioè a un sistema  $S_{i-j}$ , con  $0 < j < k$ . Le sue celle fondamentali si ottengono proiettando le facce della cella

$$E_{i-j} \equiv i - j + 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, i - j + k - 1$$

dalla cella fissa

$$i - j, i - j + k$$

e quindi è anch'esso del tipo sfera piena il cui contorno è dato da due semisfere congiunte lungo il contorno della  $E_{i-j}$ , e costituite dalle proiezioni di questo contorno rispettivamente dai punti  $i - j$  e  $i - j + k$ .

Se si immagina ora di suturare il secondo complesso al primo, il terzo al complesso così ottenuto e così via, si vede che dopo la prima sutura si è ancora in presenza di un complesso del tipo sfera piena il cui contorno è però dato dalle facce della cella

$$i - k + 2, \dots, i - 1, i + 1$$

e quando si è giunti al complesso  $(i - j)$ -simo la situazione è sempre la stessa salvo che la cella che fornisce il contorno è ora

$$i - j + 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, i - j + k .$$

Dopo aver suturato l'ultimo complesso intermedio ai complessi precedenti questa cella sarà

$$i + 1, \dots, i + k - 1 ;$$

ma, ricordando quanto si è detto, il contorno di questa cella è altresì il contorno dell'ultimo complesso ossia essa è la  $E_i$ .

L'ultima sutura consiste pertanto nel riunire due complessi entrambi del tipo sfera piena lungo tutto il loro contorno e il risultato non è altro che una sfera (cava) secondo l'asserto.

Il complesso  $C$  è dunque in ogni caso una varietà.

**3.** Preoccupiamoci ora di indagare *la struttura topologica di questa varietà*. Il metodo che seguiremo consisterà nella riduzione della varietà in questione, mediante opportuni tagli, a una sfera piena con una equivalenza fra le sue facce.

Immaginiamo, come nel caso precedente, il complesso  $C$  tagliato lungo tutte le sue  $(k - 1)$ -celle ossia scisso in  $n(k - 1)$  sfere piene.

Consideriamo a parte i complessi  $C_1 \dots C_n$  individuati rispettivamente dai sistemi  $A_1 \dots A_n$ , complessi che si possono anche considerare come ottenuti suturando fra loro tutte le celle di uno stesso sistema  $A_i$ . Essi sono del tipo sfera piena giacchè ciascuno è proiezione del contorno della cella

$$i + 1, \dots, i + k - 1$$

dalla bicella  $i, i + k$ .

Per il seguito ci occorre sapere quante  $(k - 1)$ -celle hanno in comune due siffatti complessi  $C_i$  e  $C_{i+\rho}$  distinti. Se i loro indici  $i$  e  $i + \rho$  (con  $\rho \leq \left[ \frac{n}{2} \right]$ ) differiscono per un numero  $\rho$  maggiore di 2 essi non hanno alcuna  $(k - 1)$ -cella in comune; per  $\rho = 2$  essi hanno in comune una sola, e precisamente la  $i + 2, \dots, i + k$ ; per  $\rho = 1$  invece ne hanno in comune  $k - 2$ , tra le quali non figura la precedente, ottenibili sopprimendo uno qualsiasi dei vertici intermedi della  $k$ -pla  $i + 1, \dots, i + k$ .

Queste  $k - 2$  celle individuano un complesso del tipo sfera piena giacchè proiezione del contorno della cella  $i + 2, \dots, i + k - 1$  dalla bicella  $i + 1, i + k$ .

Se vogliamo inoltre conoscere le celle che un complesso  $C_i$  ha in comune con tutti quelli precedenti, basta mettere insieme quelle in comune col  $C_{i-1}$  con quella in comune col  $C_{i-2}$ : si ottiene con ciò un sistema di celle ottenibili dalla  $k$ -pla di vertici

$$i, \dots, i + k - 1$$

sopprimendo in essa un vertice qualsiasi ad esclusione del primo.

Questo sistema pertanto individua un complesso proiezione del contorno della cella  $i + 1, \dots, i + k - 1$  dal vertice  $i$  e quindi del tipo sfera piena.

Procediamo ora a suturare fra loro le varie  $k$ -celle del complesso  $C$ . Cominciamo col mettere insieme le celle del primo sistema  $A_1$ . Come abbiamo visto si ottiene un complesso del tipo sfera piena: questa proprietà si manterrà costante in seguito per il raggruppamento sempre più ampio delle celle che vengono a essere fra loro suturate e perciò sarà d'ora in poi sottintesa.

Suturiamo completamente fra loro le celle del sistema  $A_2$  e poi il complesso  $C_2$ , così ottenuto al complesso precedente  $C_1$  lungo la sfera piena che essi hanno in comune. Il complesso  $C_{1,2}$  che così si ottiene ha il proprio contorno che è ovunque una varietà ad esclusione della sua  $(k-2)$ -cella

$$3, \dots, k$$

la quale è situata sulle 4 sue  $(k-1)$ -celle i cui ulteriori rispettivi vertici sono

$$1, 2, k+1, k+2.$$

Non si può pertanto suturare il complesso  $C_3$  (suturato completamente) al precedente complesso  $C_{1,2}$  lungo la comune sfera piena giacchè la sudetta cella  $3, \dots, k$  risulta interna a questa sfera piena (proiezione del contorno di  $4, \dots, k+2$  dal vertice 3).

Per poter procedere supponiamo che in  $C_3$  siano state eseguite tutte le suture ad esclusione di quella lungo la  $(k-1)$ -cella  $3, \dots, k+3$ , quella cioè che contiene la  $3, \dots, k$ . La sfera piena comune a  $C_3$  e a  $C_{1,2}$  viene con ciò anch'essa tagliata lungo la corrispondente  $3, \dots, k$  ma rimane tuttora del tipo sfera piena e si può pertanto suturare lungo di essa il  $C_3$  al  $C_{1,2}$  senza inconvenienti. In tal modo si prosegue suturando questo  $C_{1, \dots, 3}$  al  $C_4$  suturando ovunque meno che lungo la  $4, \dots, k, k+3, k+4$  e così via fino ad avere suturato il  $C_{1, \dots, k-2}$  al  $C_{k-1}$  tagliato lungo la  $k+3, \dots, 2k$ .

A questo punto succede il fatto nuovo che la sfera piena comune a  $C_{1, \dots, k-1}$  e  $C_k$  (ossia la proiezione del contorno di  $k+1, \dots, 2k-1$  da  $k$ ) non è più solcata nel suo interno dal taglio lungo la  $k+3, \dots, 2k$  e pertanto si può suturare il  $C_k$  al  $C_{1, \dots, k-1}$  lungo di essa senza tagli.

Analogamente succede per il  $C_{k+1}$ . Le cose invece riprendono come prima col  $C_{k+2}$  che va tagliato lungo la  $k+4, \dots, 2k, 2k+3$  e così via ciclicamente con periodo  $k$  fino al  $C_n$ .

Riassumendo i tagli che non possiamo suturare sono quelli lungo le  $(k-1)$ -celle che si ottengono prendendo  $k-1$  vertici consecutivi dalla successione

$$3, \dots, k, k+3, \dots, 2k, 2k+3, \dots, 3k, 3k+3, \dots$$

che si ha dalla successione dei numeri interi da 1 a  $n+k$  sopprimendo quelli congrui a 1 o a 2 modulo  $k$ .

Quanto agli estremi  $C_1$  e  $C_n$  essi vengono a combaciare nei tagli fatti lungo le  $(k-1)$ -celle del contorno della cella  $1, \dots, k$ .

Il risultato di tutte queste operazioni è dunque che *la varietà in questione, tagliata lungo questi due tipi di celle, si riduce a un'unica sfera piena*.

Una sommaria analisi di questi due tagli ci convince che se suturiamo quello lungo la striscia di celle che abbiamo ottenuto, questa sfera piena si muta nella varietà prodotto topologico di un segmento per una  $(k - 1)$ -sfera (cava).

L'ulteriore sutura dell'ultimo taglio, quello cioè lungo il contorno della cella  $1, \dots, k$ , ci fornisce il tipo della varietà in questione, che è: o il prodotto di una  $(k - 1)$ -sfera per una circonferenza oppure la generalizzazione dell'otre di Klein secondoché la varietà stessa è orientabile o no.

Resta pertanto da decidere quest'ultimo carattere di  $C$ . Consideriamo all'uopo la successione dei numeri interi da 1 a  $n + k$  e in essa sopprimiamo quelli congrui a 0 modulo  $k$ .

Prendiamo poi le celle di  $C$  costituite da tutte e sole le  $k$ -ple di vertici consecutivi di questa successione. Se si ordinano i vertici di ciascuna di queste celle secondo il loro indice crescente e poi queste celle secondo l'indice crescente del loro primo vertice, si ottiene una successione di celle consecutivamente adiacenti.

Percorriamo questa successione dalla prima all'ultima cella. Se  $k$  è pari non si ha mai inversione, se  $k$  è dispari si ha inversione di orientazione a ogni passaggio. Il numero delle celle della successione è  $n - \left[ \frac{n}{k} \right]$  e pertanto quello dei passaggi è  $n - \left[ \frac{n}{k} \right] - 1$ . Sarà pertanto tale il numero delle inversioni per  $k$  dispari.

Tra le celle del contorno di  $1, \dots, k$  figurano come facce di celle di questa successione soltanto la  $1, \dots, k - 1$  (nella prima cella) e una variabile (nell'ultima). Sarà dimostrato che si ha orientabilità o no allorché faremo vedere che una orientazione della  $1, \dots, k - 1$  si muta in una orientazione dell'altra cella (attraverso la successione) che non è congruente alla precedente, oppure lo è sul suddetto contorno.

Determiniamo la faccia terminale. L'ultima cella della successione, ossia quella che la contiene, può essere o la prima del sistema  $A_{n-1}$  o una qualsiasi del sistema  $A_n$ ; precisamente ciò succede per

$$n \equiv k, \dots, 1 \pmod{k}$$

rispettivamente e la  $(k - 1)$ -cella corrispondente che cerchiamo è la  $1, \dots, k - 1$  nel primo caso oppure la  $2, \dots, k; \dots; 1, \dots, k - 2, k$  nei casi rimanenti.

Nel primo caso essa coincide con quella di partenza, negli altri casi invece, per  $k$  pari, è alternativamente non congruente o congruente e, per  $k$  dispari, alternativamente congruente o non congruente.

*Riassumendo la discussione si trova che :*

*per  $k$  pari* si ha orientabilità o no secondochè  $n$  è pari o dispari e i due minimi valori di  $n$  per cui si hanno i due tipi rispettivi di varietà sono

$$n = 2k + 2 \quad \text{e} \quad n = 2k + 1 ;$$

*per  $k$  dispari* si ha invece sempre orientabilità e il minimo valore di  $n$  per cui si ha la varietà è

$$n = 2k + 1 .$$

4. Vediamo infine la trasformazione che subisce uno qualsiasi dei complessi  $C$  in esame allorchè si passa da esso al complesso dello stesso tipo avente un vertice di meno.

Il complesso trasformato ha un sistema  $A$  di meno che non  $C$ . Soprattutto allora in  $C$  ad esempio tutte le celle del sistema  $A_i$ . Si viene con ciò ad avere un contorno dato dal complesso proiezione del contorno della cella

$$i+1, \dots, i+k-1$$

dai vertici  $i$  e  $i+k$  rispettivamente.

Ciò fatto eseguiamo un taglio lungo la  $(k-1)$ -cella  $i+1, \dots, i+k-1$  (che appartiene alle due celle di  $C$  i cui ulteriori vertici sono rispettivamente  $i-1$  e  $i+k+1$ ).

Con ciò il contorno suddetto si spezza ulteriormente in due contorni dati rispettivamente dai contorni delle due celle

$$i, \dots, i+k-1 \quad \text{e} \quad i+1, \dots, i+k .$$

Quanto ai vertici  $i+1, \dots, i+k-1$ , ognuno di essi si sdoppia in due che indicheremo rispettivamente con

$$(i+1)_1, \dots, (i+k-1)_1 \quad \text{e} \quad (i+1)_2, \dots, (i+k-1)_2 .$$

Il vertice  $i$  appartiene solo al primo contorno e lo indicheremo perciò con  $i_1$ , il vertice  $i+k$  invece solo al secondo e sarà indicato quindi con  $(i+k)_2$ .

Poniamo ora tra i vertici del primo contorno e quelli del secondo la seguente corrispondenza biunivoca :

$$\varrho_1 = (\varrho+1)_2 \quad (\varrho = i, \dots, i+k-1)$$

e identifichiamo i vertici corrispondenti. Il complesso che così si ottiene coincide appunto col complesso avente la stessa dimensione di  $C$  ma con soli  $n-1$  vertici.

(Reçu le 13 mars 1948.)