Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1949)

Artikel: "Lattices" des groupes abéliens finis.
Autor: Ribeiro, Hugo
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19749

„Lattices" des groupes abéliens finis

Par HUGO RIBEIRO [1]), Zurich

Un type de problèmes que pose actuellement la théorie des lattices [2]) est celui des problèmes de représentation. En particulier, les représentations des lattices par des lattices de sous-groupes constituent une source de questions [3]) intéressant non seulement la théorie générale des lattices et la théorie des groupes, mais aussi la théorie des relations d'équivalence, car on sait que, non seulement chaque lattice de sous-groupes est isomorphe à une lattice de répartitions mais aussi que chaque lattice de répartitions est isomorphe à une lattice de sous-groupes [4]).

L'object du présent travail est d'apporter une contribution à de telles recherches par l'étude systématique des lattices de sous-groupes des groupes abéliens finis. Nous nous demandons donc tout d'abord, quelles sont les lattices qui peuvent être réalisées par tous les sous-groupes d'un groupe abélien fini, les opérations de lattice étant la formation de l'intersection (meet) et la formation du groupe-réunion (join). Nous dirons toujours „lattice du groupe G" pour désigner la lattice de tous les sous-groupes de G.

Notre méthode consistera à réduire le problème à l'étude des lattices des composantes primaires (§ 1), et, ensuite, à analyser, parmi elles, tout d'abord les lattices dans lesquelles chaque élément a un complément, et que nous appellerons, suivant l'usage, „lattices complémentées".

Une propriété très étudiée des lattices des groupes abéliens a été découverte déjà par Dedekind [5]). Il s'agit de la loi modulaire, qui a le caractère d'une loi distributive affaiblie. Nous travaillerons presque tou-

---

[1]) Boursier à Zurich de l'Instituto para a Alta Cultura, Lisboa.

[2]) Nous employons partout le mot anglais „lattices" au lieu de „structures".

[3]) Ces problèmes sont déjà suggérés dans l'ouvrage de *G. Birkhoff*, Lattice Theory, American Math. Soc. Coll. Publ. Vol. 25, New York 1940, auquel nous renvoyons le lecteur quant aux résultats et notions utilisés dans notre travail.

[4]) v. *G. Birkhoff*, On the structure of abstract algebra, Proc. Cambridge Phil. Soc. 31, 1935, p. 433—454.

[5]) Gesammelte mathematische Werke, 2. Bd., Braunschweig 1931, p. 115.

jours avec ces lattices modulaires et leurs propriétés caractéristiques. Notre principal objectif est précisément de savoir ce que l'on doit exiger d'une lattice modulaire finie pour qu'elle soit isomorphe à la lattice d'un groupe abélien fini. Nous serons ainsi amenés à considérer parmi les lattices finies une classe de lattices que nous appelons uniformes dont les lattices distributives forment une sous-classe. Les seules lattices uniformes complémentées sont les algèbres de Boole et les géométries projectives. Plusieurs conséquences intéressant aussi la théorie générale des lattices découlent, plus ou moins directement, de notre analyse.

Nous n'avons connaissance d'aucune étude systématique du problème de représentation que nous nous sommes posé pour le cas, le plus simple et fondamental, des groupes abéliens finis. Cependant on connaît beaucoup de propriétés des lattices de groupes et lorsque nous avons eu la possibilité d'en donner des applications nous l'avons fait remarquer. En particulier nous croyons avoir reconnu, après la rédaction de notre travail, qu'il serait possible d'obtenir, de cette façon, quelques-uns de nos résultats sur les lattices de produits directs. Dans cette direction on doit citer ici, surtout, les travaux de *O. Ore*, „On the foundation of abstract algebra", Annals of Math., vol. 36 (1935), 37 (1936) et „Structures and group theory", Duke Math. J., vol. 3 (1937), 4 (1938).

§ 1. Lattices de produits directs. Lattices de groupes cycliques.

1. Ici nous ne supposons pas encore que les lattices considérées soient modulaires ni que les groupes soient abéliens. Soit tout d'abord L une lattice produit-join (plus simplement: „produit") de ses $m > 1$ sous-lattices $L_1, L_2, \ldots, L_m$, donc chaque élément de L est le join de m éléments appartenant respectivement à $L_1, L_2, \ldots, L_m$ et cela d'une seule façon. On peut, très facilement, démontrer que:

1) L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, a un infimum E, celui-ci est le même pour toutes les L_i et c'est aussi l'infimum de L.

2) L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, est un idéal de L, c'est-à-dire que L_i est une sous-lattice de L pour laquelle $H_i \frown X$ est un élément de L_i, quels que soient les éléments H_i de L_i et X de L.

3) Si $G, G_1, G_2, \ldots, G_m$ sont des suprema de $L, L_1, L_2, \ldots, L_m$ respectivement, on a $G = G_1 \smile G_2 \smile \ldots \smile G_m$ et aussi $(G_1 \smile G_2 \smile \ldots \smile G_{r-1} \smile G_{r+1} \smile \ldots \smile G_m) \frown G_r = E$, $r = 1, 2, \ldots, m$.

Indiquons brièvement les démonstrations :

1) Soit H_i un élément de L_i. Il y a alors m éléments $A_1, A_2, \ldots, A_m$ avec $A_j \in L_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ et tels que $H_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_m$. Mais $A_i = H_i$ car on a aussi $H_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup H_i \cup \ldots \cup A_m$. Maintenant si pour $j \neq i$ on pouvait trouver $B_j \in L_j$ avec $B_j < A_j$ on aurait $H_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup H_i \cup \ldots \cup B_j \cup \ldots \cup A_m$ donc une autre décomposition de H_i comme un join ce qui est impossible. A_j, pour $j \neq i$, est par conséquent l'infimum de L_j. En prenant H_k avec $k \neq i$ on voit de même que L_i a un infimum. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ces infima. $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m$ est certainement l'infimum de L et cette égalité nous montre que $E_i = E$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

2) Cela résulte de ce que l'on a $H_i = (H_i \cap X) \cup H_i$, donc si $H_i \cap X$ avait des composantes différentes de E, d'indices k avec $k \neq i$, H_i aurait deux décompositions distinctes comme join ; $H_i \cap X$ est donc sa propre composante d'indice i, et il est ainsi un élément de L_i.

3) La première égalité est évidente. Quant à la deuxième égalité, on voit que $(G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{r-1} \cup G_{r+1} \cup \ldots \cup G_m) \cap G_r$ est, en vertu de 2), un élément H_r de L_r, et l'on a alors, $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{r-1} \cup E \cup G_{r+1} \cup$ $\cup \ldots \cup G_m = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{r-1} \cup H_r \cup G_{r+1} \cup \ldots \cup G_m$, donc $H_r = E$.

De ce qui précède on tire immédiatement, en utilisant une définition bien connue du groupe produit direct de sous-groupes, que : *Si la lattice L d'un groupe G est un produit de m sous-lattices $L_1, L_2, \ldots, L_m$ dont les éléments suprema $G_1, G_2, \ldots, G_m$, sont invariants dans G, alors G est le produit direct de $G_1, G_2, \ldots, G_m$, et L_i est la lattice de G_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.*

Lorsqu'on cherche une réciproque de cette proposition on trouve le théorème :

Si G est le produit direct de m sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_m$ et si $L, L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les lattices respectives, alors tous les joins, dans L, de m éléments appartenant respectivement à $L_1, L_2, \ldots, L_m$ constituent une sous-lattice L', de L (qui est le produit de $L_1, L_2, \ldots, L_m$).

Démonstration. Soient $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$ et $K = K_1 \cup K_2 \cup$ $\cup \ldots \cup K_m$ avec $H_i \in L_i$ et $K_i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ deux tels joins. Il est tout d'abord évident que $H \cup K$ est aussi un tel join, car $H \cup K =$ $(H_1 \cup K_1) \cup (H_2 \cup K_2) \cup \ldots \cup (H_m \cup K_m)$. Il nous suffira de démontrer que l'on a, de même, $H \cap K = (H_1 \cap K_1) \cup (H_2 \cap K_2) \cup \ldots \cup (H_m \cap K_m)$. Or, la relation $(H_1 \cap K_1) \cup (H_2 \cap K_2) \cup \ldots \cup (H_m \cap K_m) \leq H \cap K$ est évidente. Pour montrer que $H \cap K \leq (H_1 \cap K_1) \cup (H_2 \cap K_2) \cup \ldots \cup$ $(H_m \cap K_m)$ nous allons vérifier que si g est un élément du groupe $H \cap K$, la représentation (univoque) de g comme un produit d'éléments $g_i \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, est telle que $g_i \in H_i \cap K_i$. Nous montrons que si $g \in H$ alors $g_i \in H_i$; et on ferait de même pour K et K_i. Il suffit de remarquer que deux éléments l'un de H_i, l'autre de H_j $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, $i \neq j$, étant toujours permutables, $g \in H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$ a une représentation comme produit de m éléments, de $H_1, H_2, \ldots, H_m$ respectivement, et cette représentation ne peut être autre que la représentation ci-dessus; donc $g_i \in H_i$. On voit par là que H_i est déjà déterminé par H: c'est le groupe des éléments de G_i figurant dans la représentation d'un élément, au moins, de H[6]). On a donc $H_i = H \cap G_i$ (sous-groupe invariant dans H), et ces produits directs $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m$ constituent, en effet, la lattice L' produit des lattices $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Le théorème est ainsi démontré.

2. Si l'on veut poursuivre cette étude des produits de lattices de groupes il est naturel de se demander, tout d'abord, quels sont les cas où L' est égale à L. A défaut de toute autre indication on supposera dans la suite que les groupes pris en considération sont toujours finis. Le théorème précédent peut alors être complété de la façon suivante:

Si G est le produit direct de m sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_m$, la lattice L de G est le produit des lattices $L_1, L_2, \ldots, L_m$, respectivement de $G_1, G_2, \ldots, G_m$, si, et seulement si, les ordres de deux quelconques des groupes $G_1, G_2, \ldots, G_m$ sont premiers entre eux.

Démonstration. Il nous suffit, maintenant, de vérifier que l'on a $H = (H \cap G_1) \cup (H \cap G_2) \cup \ldots \cup (H \cap G_m)$ pour *chaque* élément H de L si, et seulement si, les ordres de deux quelconques des groupes $G_1, G_2, \ldots, G_m$ sont premiers entre eux. Montrons, tout d'abord, que cette dernière condition est suffisante: Soient $g \in H$ et $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_m$ avec $g_i \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Si $\Pi\alpha_j$ est le produit des ordres α_j des $m - 1$ G_j, avec $j \neq i$, on aura $g^{\Pi\alpha_j} = g_i^{\Pi\alpha_j}$; $\Pi\alpha_j$ et l'ordre α_i de G_i sont premiers entre eux donc g_i est un élément de H et aussi de $H \cap G_i$. Cela étant vrai pour chaque élément g de H, on en conclut que $H = (H \cap G_1) \cup (H \cap G_2) \cup \ldots \cup (H \cap G_m)$ [7]).

---

[6]) Pour cette remarque ainsi que pour les questions qui nous occupent dans cette section et la suivante voir *G. Birkhoff*, Lattice theory, 1940, p. 52.

[7]) *V. Remak*, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 163, p. 7, 1930. Dans ce travail on déduit, sous les mêmes hypothèses, tout en utilisant un théorème de *Klein-Fricke*, que H est le produit direct de sous-groupes de $G_1, G_2, \ldots, G_m$.

Pour voir que la condition est nécessaire, remarquons que, si le nombre premier $p \neq 1$ divise les ordres de G_i et G_j, $i \neq j$, il y a au moins deux groupes A_i et A_j, chacun d'ordre p (engendrés respectivement par des éléments a_i et a_j de G), qui sont des sous-groupes respectivement de G_i et de $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \ldots \cup G_m$. Le produit $A_i \times A_j$ contiendra un troisième groupe H du même ordre p (engendré par $a_i\, a_j$). H n'étant pas un join d'autres groupes et ne pouvant pas être un sous-groupe, ni de G_i ni de $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \ldots \cup G_m$, vérifiera $H \cap G_i = E$, $i = 1, 2, \ldots, m$. L possède donc un élément H tel que $H \neq (H \cap G_1) \cup (H \cap G_2) \cup \ldots \cup (H \cap G_m)$, ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons ici qu'on appelle „irréductible" toute lattice qui n'est pas un produit, et qu'aucune lattice ne peut être de deux façons différentes produit de lattices irréductibles.

Soient, enfin, G un groupe abélien et $G_1, G_2, \ldots, G_m$ ses composantes primaires, c'est-à-dire les m sous-groupes de G formés par les éléments dont l'ordre est une puissance d'un même nombre premier diviseur de l'ordre de G. G étant toujours le produit direct de ses composantes primaires on a le corollaire suivant du dernier théorème:

I. *La lattice d'un groupe abélien fini est le produit des lattices de ses composantes primaires. Celles-ci sont toujours irréductibles, et, par conséquent, dans toute autre représentation de la lattice donnée comme un produit il y a au moins un facteur réductible.*

Ce théorème nous permet de limiter notre étude à celle des groupes abéliens finis dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier. La question de réductibilité ne se posant plus pour les lattices de ces groupes nous devrons trouver un nouveau point de vue dans notre analyse. L'examen direct, que nous allons maintenant faire, des lattices des groupes cycliques [8]) nous permettra non seulement de faire une application immédiate des résultats précédents mais aussi de mieux saisir le caractère de notre problème.

3. Nous ne considérons dans la suite que des groupes abéliens, sauf mention expresse du contraire.

Il est évident que la lattice d'un groupe cyclique d'ordre p^δ est, quel que soit le nombre premier p, une chaîne, c'est-à-dire un ensemble or-

---

[8]) Rappelons dès maintenant le théorème dû à *Ore* selon lequel les seuls groupes finis dont la lattice est distributive sont les groupes cycliques. V. Structures and group theory, II, Duke Math. J. 4 (1938), p. 267—268.

donné, et que de tels groupes cycliques sont les seuls groupes dont la lattice est une chaîne à δ dimensions. Cette remarque nous permet, d'après le théorème I, de dire :

La lattice d'un groupe cyclique fini est le produit de m chaînes; celles-ci ont respectivement $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ *dimensions si* $p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\delta_m}$ *est la décomposition en facteurs premiers de l'ordre n du groupe.*

Mais on a aussi : *Si la lattice d'un groupe (abélien) G est le produit de m chaînes à dimensions* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ *respectivement, G est cyclique d'ordre* $p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\delta_m}$; $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *étant des nombres premiers tous différents.* En effet, G est le produit direct des suprema des m chaînes et les ordres de ceux-ci sont donc des nombres premiers entre eux. Mais, chaque chaîne étant la lattice d'un groupe cyclique dont l'ordre est la puissance d'un nombre premier d'exposant égal à la dimension, G est le produit direct des groupes cycliques d'ordres $p_1^{\delta_1}, p_2^{\delta_2}, \ldots, p_m^{\delta_m}$, avec $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Or, comme on sait, un tel groupe est cyclique d'ordre $n = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\delta_m}$.

Nous faisons encore remarquer que : 1) la lattice d'un groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à celle des diviseurs de n ; 2) chaque lattice qui est le produit de m chaînes de dimensions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ est isomorphe à la lattice du groupe cyclique d'ordre $n = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\delta_m}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ étant des nombres premiers tous différents, d'ailleurs quelconques.

Nous voulons étudier de plus près les lattices produits de chaînes finies. Supposons une lattice L produit de m chaînes $L_1, L_2, \ldots, L_m$ de dimensions respectives $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$; et soient $A_i^{\alpha_i}, A_i^{\beta_i}, \ldots$ les éléments de dimensions $\alpha_i, \beta_i, \ldots$ de la chaîne L_i $(0 \leq \alpha_i, \beta_i, \ldots \leq \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m)$. L aura donc $(\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \ldots (\delta_m + 1)$ éléments et la dimension $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$; et l'on a $A_1^{\alpha_1} \cup A_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup A_m^{\alpha_m} \leq A_1^{\beta_1} \cup A_2^{\beta_2} \cup \ldots \cup A_m^{\beta_m}$ si, et seulement si, $\alpha_i \leq \beta_i$ pour chaque i. La loi distributive est vérifiée dans L et elle se traduit par l'égalité numérique $\min[\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i)] = \max[\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i)]$. Pour qu'un élément $A_1^{\alpha_1} \cup A_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup A_m^{\alpha_m}$ de L ait un complément $A_1^{\beta_1} \cup A_2^{\beta_2} \cup \ldots \cup A_m^{\beta_m}$ (lequel est alors unique, car L est distributive) il faut et il suffit que, pour tout i, $\max(\alpha_i, \beta_i) = \delta_i$ et $\min(\alpha_i, \beta_i) = 0$, c'est-à-dire que les seuls éléments possédant un complément, sont ceux pour lesquels on a $\alpha_i = 0$ ou $= \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ainsi, il y a dans L exactement 2^m éléments complémentés: ils forment une algèbre de Boole, ayant m atomes, c'est-à-dire m éléments suivant immédiatement l'infimum. Remarquons encore que les éléments suivant immédiatement un élément donné de L

s'obtiennent en augmentant d'une unité l'indice supérieur d'une, et d'une seule, des composantes $A_i^{\alpha_i}$, il y en a donc au plus m. Ainsi le nombre des éléments suivant immédiatement un élément de L ne dépasse pas celui des atomes de l'algèbre de Boole des éléments complémentés de L.

L'intérêt des observations presque évidentes que nous venons de faire réside dans le fait qu'elles nous permettent de caractériser les lattices qui sont le produit de chaînes finies. Ainsi, au schéma géométrique (dans l'espace à m dimensions, m étant le nombre des chaînes considérées) on peut faire correspondre une très simple caractérisation algébrique dans le cadre des lattices. Nous démontrons :

Pour qu'une lattice finie L soit un produit de chaînes il faut et il suffit qu'elle soit distributive et qu'aucun élément ne soit immédiatement suivi par des éléments dont le nombre dépasse celui des atomes de l'algèbre de Boole des éléments complémentés de L. (Si l'on remarque qu'un élément V suit immédiatement un élément U dans une lattice L si, et seulement si, le système $U = U \frown X$, $V = V \smile X$ a exactement deux solutions X dans L, on peut exprimer algébriquement la dernière condition du théorème en disant que, quel que soit U, le nombre des V pour lesquels le système $U = U \frown X$, $V = V \smile X$ a exactement deux solutions, est au plus celui des atomes de l'algèbre de Boole des éléments complémentés).

Démonstration. Après ce qui a été dit ci-dessus il nous suffira maintenant de montrer que, si L est finie et vérifie les conditions énoncées, L est un produit de chaînes. Soient $G_1, G_2, \ldots, G_m$ les atomes de l'algèbre de Boole des éléments complémentés de L, G le supremum et H un élément quelconque de L. Du fait que G appartient à l'algèbre de Boole et de la propriété distributive, il résulte que $H = H \frown G = H \frown (G_1 \smile G_2 \smile \ldots \smile G_m) = (H \frown G_1) \smile (H \frown G_2) \smile \ldots \smile (H \frown G_m)$. Donc, L_1, $L_2, \ldots, L_m$ étant les idéaux de L formés des éléments qui précèdent ou égalent respectivement $G_1, G_2, \ldots, G_m$, nous pouvons dire que chaque élément H de L est, d'une seule façon, le join de m éléments appartenant respectivement à $L_1, L_2, \ldots, L_m$ et nous en concluons que L est le produit de ces m sous-lattices. Mais, d'autre part, il est facile de voir que chacune des lattices L_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ est une chaîne : en effet, H_i étant un élément quelconque de L_i et L étant modulaire, les éléments suivant immédiatement H_i *dans* L sont ceux qui suivent immédiatement H_i dans L_i et encore les joins (tous différents !) de H_i avec un atome *de* L appartenant à une lattice L_j où $j \neq i$; en tenant compte de notre dernière hypothèse sur L, on voit tout d'abord que chaque L_i a un seul atome et ensuite, que le nombre des éléments suivant immédiatement H_i

dans L_i ne dépasse pas $m - (m - 1)$. Chacune des lattices L_i est donc une chaîne, et notre théorème est démontré [9]).

Ce sera seulement plus loin que nous nous occuperons d'autres propriétés des lattices de groupes cycliques lorsque nous chercherons à les rapprocher des lattices de composantes primaires. Soulignons cependant, ici encore, qu'un produit de chaînes est toujours une lattice autoduale et que les deux propriétés au moyen desquelles il peut être défini sont indépendantes.

§ 2. Lattices complémentées. Lattices de composantes primaires.

1. Revenons à la fin du no. 2, § 1, et reprenons l'analyse générale que nous avions développée jusque là. Tout d'abord il fut question de construire des lattices réductibles de groupes au moyen de sous-lattices qui n'étaient plus réductibles. Maintenant il s'agira de comprendre comment, dans ces lattices irréductibles, les éléments qui ne sont plus des joins d'autres engendrent leurs joins, donc de savoir de quelle manière les sous-groupes d'un groupe abélien d'ordre puissance d'un nombre premier sont formés à partir des sous-groupes cycliques qu'ils contiennent.

Pour étudier ces lattices des composantes primaires les plus générales, il est naturel d'envisager tout d'abord celles des groupes abéliens élémentaires (c'est-à-dire les groupes pour lesquels tous les sous-groupes cycliques à l'exception du groupe identité ont un même ordre premier). Cela, d'une part, parce que, pour toutes ces lattices et leurs produits il nous suffira de spécialiser des résultats bien connus ; et d'autre part parce que telles lattices interviennent, de façon décisive, dans l'analyse du cas général.

Nous envisagerons toujours, dans la suite, des lattices finies, et nous commencerons par la remarque suivante : *Dans chaque lattice modulaire finie L les éléments qui sont des joins d'atomes constituent, avec l'infimum, un idéal (principal) L^* de L. Si L est le produit de m lattices $L_1, L_2, \ldots, L_m$ alors L^* est le produit des idéaux $L_1^*, L_2^*, \ldots, L_m^*$ respectivement de L_1, $L_2, \ldots, L_m$; par conséquent, si L^* est irréductible L l'est aussi.* En effet, rappelons que si le supremum G^* d'une lattice modulaire finie L^* est un join d'atomes, chaque élément de L^*, l'infimum excepté, est aussi un join d'atomes. Maintenant, soient G^* le join de tous les atomes

[9]) Nous avons pu connaître, grâce à l'amabilité de M. le Prof. *P. Bernays*, une étude de *Th. Skolem* où les produits de chaînes sont aussi caractérisés de plusieurs façons différentes de la nôtre. Voir „Über gewisse ‚Verbände' oder ‚Lattices'", Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi, Oslo, I. Mat.-Naturv. Klasse, 1936, Nr. 7.

de notre lattice L, et L^* l'idéal engendré par G^*, c'est-à-dire la sous-lattice de L formée de tous les éléments X pour lesquels $X \frown G^* = X$. Alors, non seulement chaque join d'atomes de L appartient à L^*, mais aussi chaque élément de L^*, qui n'est pas l'infimum est un join d'atomes de L, car il est un join d'atomes de L^*. Quant à la deuxième partie de l'énoncé il suffit de remarquer que chaque atome de L appartient à une seule lattice L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ et y est un atome.

La remarque précédent s'applique aux lattices des groupes abéliens finis ; lorsque L est la lattice d'un groupe abélien fini nous appellerons l'idéal L^* le „noyau" de L. Nous soulignons les conséquences suivantes :

Les noyaux sont les lattices des groupes abéliens finis dont tous les éléments ont des ordres non divisibles par des carrés. Car les atomes d'une lattice L de groupe abélien fini G sont les sous-groupes cycliques d'ordre premier de G. G^* contient donc précisément les éléments de G dont l'ordre n'est pas divisible par un carré, et L^* est, évidemment, la lattice de G^*.

Le noyau de la lattice L d'un groupe G est le produit des noyaux des lattices des composantes primaires de G.

Les noyaux irréductibles sont les lattices des groupes abéliens élémentaires, l'irréductibilité du noyau de L étant équivalente à celle de L.

Les noyaux sont les seules lattices de groupes abéliens finis qui sont complémentées. Car l'existence d'un complément pour chaque élément et le fait que chaque élément est un join d'atomes constituent, comme l'on sait, des conditions équivalentes dans toute lattice modulaire finie.

Le théorème général sur la représentation de chaque lattice modulaire complémentée à dimension finie comme un produit de lattices irréductibles[10]), nous permet maintenant de dire qu'un noyau L^* est, et cela d'une seule façon, un produit de géométries projectives. Et il résulte de ce qui précède que ces géométries projectives sont précisément les lattices des composantes primaires du groupe G^*, dont la lattice est L^* ; donc elles sont des lattices de groupes abéliens élémentaires. Si l'ordre n de G^* a la décomposition $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ en facteurs premiers il y a m géométries projectives facteurs $L_1^*, L_2^*, \ldots, L_m^*$. La composante primaire d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ n'ayant que des éléments d'ordre p_i (l'identité exceptée) leurs éléments forment, évidemment, un espace vectoriel de dimension α_i sur le corps premier d'ordre p_i, les sous-espaces s'identifiant aux sous-groupes. La géométrie projective L_i^* est, alors, la géométrie projec-

---

[10]) *G. Birkhoff*, Combinatorial relations in projective geometries, Annals of Math. vol. 36, 1935, p. 743.

tive sur le corps d'ordre p_i et de α_i dimensions, selon le point de vue adopté ici de la théorie des lattices. On peut, donc, énoncer le corollaire suivant du théorème général cité ci-dessus :

Une lattice est un noyau si, et seulement si, elle est le produit de géométries projectives sur des corps premiers, ceux-ci étant différents lorsque les dimensions des géométries projectives auxquelles ils se rapportent sont >1. *Si* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ *est l'ordre d'un groupe dont la lattice est un noyau, il y a m géométries projectives facteurs, de dimensions* α_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *les corps étant respectivement d'ordres* p_i *toutes les fois que* $\alpha_i > 1$.

Deux noyaux sont isomorphes si, et seulement si, les décompositions en facteurs premiers des ordres des groupes dont ils sont les lattices ne diffèrent au plus que par les facteurs ayant l'exposant 1. Par conséquent, *pour qu'un produit direct de groupes abéliens élémentaires soit bien déterminé par sa lattice il faut et il suffit que les ordres des groupes facteurs ne soient pas des nombres premiers.*

Remarquons ici que les lattices modulaires finies pour lesquelles le supremum est un join d'atomes sont autoduales et, par conséquent, peuvent se définir comme étant les lattices modulaires finies pour lesquelles l'infimum est un meet d'éléments précédant immédiatement le supremum. En effet, les lattices modulaires finies pour lesquelles le supremum est un join d'atomes sont complémentées, donc elles sont le produit de géométries projectives, évidemment autoduales ; et, d'autre part, chaque produit de lattices autoduales est autodual. Nous utiliserons cette remarque plus tard. En particulier, les noyaux sont des lattices autoduales.

2. Dans cette section nous indiquons tout d'abord quelques propriétés simples qui sont des conséquences du théorème général de décomposition de lattices modulaires complémentées à dimensions finies. Ces propriétés définissent les noyaux des lattices de groupes cycliques (donc des algèbres de Boole) et les noyaux irréductibles (donc les géométries projectives sur des corps d'ordre premier). Cela nous amènera à une propriété générale des lattices de composantes primaires et des lattices distributives.

Nous supposons les lattices finies, bien que cela ne soit pas toujours nécessaire. Les algèbres de Boole et les géométries projectives jouissent, comme l'on sait, de la propriété que *deux sous-lattices „convexes", ou „quotients"* (c'est-à-dire des sous-lattices L' telles que si $A, B \in L'$ et $A \leq X \leq B$ alors $X \in L'$), *y sont isomorphes si elles ont les mêmes dimen-*

sions. Le théorème général de décomposition des lattices modulaires complémentées nous montre, d'autre part, qu'*une lattice modulaire complémentée L qui n'est pas une algèbre de Boole ni une géométrie projective ne jouit pas de la propriété ci-dessus*[11]*: car elle est, alors, un produit de géométries qui ne sont pas toutes de dimension* 1, *donc il y a des sous-lattices convexes de* L, *et même de telles sous-lattices de dimension* 2, *qui ne sont pas isomorphes.* Ainsi, la propriété que nous considérons est, pour les lattices modulaires complémentées, presque équivalente à celle de l'irréductibilité, les seules lattices non irréductibles possédant cette propriété étant les algèbres de Boole à plus de 2 éléments. De plus, pour qu'une lattice modulaire complémentée jouisse d'une telle propriété, il suffit déjà que l'isomorphisme ait lieu pour les sous-lattices convexes à 2 dimensions ; mais cèla est aussi valable pour une classe beaucoup plus étendue de lattices modulaires. Plus précisément : L étant une lattice modulaire, L' et L'' deux sous-lattices de L, complémentées, convexes et de mêmes dimensions, si toutes les sous-lattices complémentées, convexes et à 2 dimensions de L sont isomorphes, alors celles qui sont des sous-lattices de L' sont aussi isomorphes entre elles, donc L' est une algèbre de Boole ou une géométrie projective. De même pour L''. Maintenant, si l'on écarte le cas des géométries projectives (à trois dimensions) qui ne sont pas sur des corps, l'isomorphisme supposé dans L et le fait que L' et L'' ont même dimension entraînent l'isomorphisme de L' et L''.

Nous sommes conduits, de cette façon, à fixer notre attention sur le nombre des éléments des sous-lattices convexes de dimension 2 dans les lattices modulaires, „*non exceptionnelles*", où toute sous-lattice convexe qui est une géométrie projective l'est sur un corps. D'ailleurs, les lattices qui nous occupent étant toujours modulaires mais pas toujours distributives, il était naturel d'avoir le souci de chercher une propriété convenable des lattices modulaires impliquée par la distributivité, et de partir, pour cela, de la caractérisation des lattices modulaires se rapportant aux sous-lattices convexes de dimension 2[12]).

Nous posons la définition :

Une lattice modulaire, non exceptionnelle, L est appelée „uniforme-u" si, et seulement si, quels que soient $A, B, C \in L$, *avec* $\dim B - \dim A = 2$

---

[11]) Chaque sous-lattice convexe, L', d'une lattice modulaire complémentée L est aussi complémentée: si A et B sont respectivement l'infimum et le supremum de L', $X \in L'$ et X' est complément de X dans L, alors $(X' \cap B) \cup A$ est, comme l'on sait, un complément de X relatif à A et B. Mais, L' étant convexe, on a $(X' \cap B) \cup A \in L'$, donc cet élément est un complément de X dans L'.

[12]) On sait qu'une telle caractérisation peut être ainsi formulée: si deux éléments suivent immédiatement leur meet ils précèdent immédiatement leur join, et dualement.

et $A \neq C \neq B$ *le système* $A = C \frown X$, $B = C \smile X$ *a, ou* 0, *ou u solutions*. Ceci veut dire que toute sous-lattice de L complémentée, convexe, de dimension 2 a $u + 3$ éléments. On dit simplement que L est *uniforme* lorsqu'on ne veut pas spécialiser le nombre u. Pour désigner une lattice uniforme-u on écrira $L_{(u)}$.

On peut maintenant énoncer et préciser quelques-uns des résultats précédents :

Une lattice modulaire, non exceptionnelle, est uniforme si, et seulement si, toutes ses sous-lattices complémentées, convexes et d'égale dimension sont isomorphes. Les algèbres de Boole et les géométries projectives sur des corps sont les seules lattices uniformes complémentées (les unes déjà déterminées par le nombre des dimensions, et les autres par ce nombre et celui des „points sur une droite"). Les algèbres de Boole et les noyaux irréductibles peuvent se définir comme étant des lattices complémentées et uniformes-u, u étant un nombre indécomposable (égal à 1 *pour le cas des algèbres de Boole et à un nombre premier s'il s'agit d'une géométrie projective).*

Nous soulignerons plus tard le fait que les lattices de composantes primaires sont toujours uniformes, les u étant des nombres indécomposables ($u = 1$ lorsque la lattice est une chaîne, et seulement dans ce cas). Ici, nous nous bornons à analyser les lattices distributives en général, qui sont toutes, évidemment, des lattices uniformes-1 [13]). Donc, on peut dire que *la classe des lattices uniformes est une sous-classe des lattices modulaires contenant comme sous-classe propre celle des lattices distributives.* Et nous pouvons énoncer encore :

*Les lattices uniformes-*1 *sont précisément les lattices distributives.*

Ceci résulte maintenant de la proposition suivante :

Une lattice modulaire L est distributive si toutes ses sous-lattices convexes à 2 *dimensions sont distributives.*

Démonstration. L étant une lattice modulaire, les sous-lattices non distributives de L ont, toutes, une dimension > 1 (s'il y en a). Soit L' une sous-lattice de L, non distributive et telle que toute sous-lattice de L ayant une dimension plus petite que celle de L' soit distributive. Il y a

---

[13]) En voici une démonstration directe: Si L est distributive et $A, B \in L$ ou bien $A \not\leq B$ et alors, quel que soit $C \in L$, $A = C \frown X$, $B = C \smile X$ n'a aucune solution; ou bien $A \leq B$ et, X_1 et X_2 étant des solutions, on a $X_2 = (C \smile X_2) \frown X_2 = B \frown X_2 = (C \smile X_1) \frown X_2 = A \smile (X_1 \frown X_2) = (A \smile X_1) \frown (A \smile X_2) = [(C \frown X_1) \smile X_1] \frown [(C \frown X_2) \smile X_2] = X_1 \frown X_2$, donc $X_2 \leq X_1$, et de même on verrait que $X_1 \leq X_2$; donc $X_1 = X_2$.

donc, dans L', trois éléments, distincts, U, V, W tels que $U \cap V = U \cap W = V \cap W = A$ et $U \cup V = U \cup W = V \cup W = B$, A et B étant respectivement l'infimum et le supremum de L', car autrement il viendrait $dim\, B - dim\, A < dim\, L'$, contrairement à l'hypothèse. Des égalités ci-dessus et de la modularité il résulte $dim\, U - dim\, A = dim\, V - dim\, A = dim\, W - dim\, A = \frac{dim\, L'}{2}$. Si l'on avait $dim\, L' > 2$, donc $dim\, W - dim\, A > 1$, il y aurait un élément W', tel que $A < W' < W$. La dimension de la lattice L'' des éléments X de L tels que $A \leq X \leq W' \cup V$ est, évidemment, plus petite que celle de L', donc L'' est distributive. En tenant compte des dimensions, on voit que V, $(W' \cup V) \cap U$ et $[(W' \cup V) \cap U] \cup W'$ appartiennent à L'', sont tous distincts et $(W' \cup V) \cap U < [(W' \cup V) \cap U] \cap W'$. D'autre part, on a $V \cup [(W' \cup V) \cap U] = (W' \cup V) \cap B = W' \cup V$, donc la distributivité dans L'' nous permet d'écrire non seulement $V \cap \{[(W' \cup V) \cap U] \cup W'\} = A = V \cap [(W' \cup V) \cap U]$ mais aussi $V \cup \{[(W' \cup V) \cap U] \cup W'\} = V \cup W' = V \cup [(W' \cup V) \cap U]$. La sous-lattice de 5 éléments A, V, $(W' \cup V) \cap U$, $[(W' \cup V) \cap U] \cup W'$ et $V \cup W'$ ne serait pas modulaire, ce qui est absurde. Par conséquent, on ne peut pas avoir $dim\, L' > 2$ et ainsi $dim\, L' = 2$. Donc, si L n'est pas distributive il se trouve qu'il y a déjà une sous-lattice convexe de L ayant la dimension 2 qui n'est pas distributive, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que le résultat démontré ci-dessus fournit, lorsqu'il est appliqué aux lattices finies, une simplification effective du contrôle graphique fondé sur la lattice bien connue de 5 éléments, permettant de distinguer les lattices modulaires non distributives[14]).

3. Le cas général des composantes primaires n'est pas aussi simple que celui des groupes abéliens élémentaires. Chaque élément de la lattice n'est pas, nécessairement, un join d'atomes, donc la lattice n'est plus une lattice complémentée. Rappelons, tout d'abord, quelques définitions : Soit L une lattice. Les éléments de L qui ne sont pas des joins d'autres, sont appelés „irréductibles". Si tous les éléments de L sont irréductibles, L est une chaîne, et réciproquement. Un „cycle"[15]) de L est un élément

[14]) Après la rédaction de notre travail, nous avons remarqué que ce théorème est une conséquence immédiate d'un énoncé de *G. Birkhoff* dans son mémoire: Applications of lattice algebra, Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 30, 1934, p. 118, où cette simplification n'est d'ailleurs pas expressément indiquée. Les deux démonstrations sont tout à fait différentes.

[15]) Cette désignation (que nous empruntons à *Reinhold Baer:* A unified theory of projective spaces and finite abelian groups, Trans. Am. Math. Soc., vol. 52, 1942, p. 286) est commode, et se justifie lorsque L est la lattice d'un groupe. C'est parce que nous discutons ici précisément ces lattices que nous l'utilisons à défaut d'une autre plus adéquate.

irréductible différent de l'infimum et tel que tout élément qui le précède est aussi irréductible. Chaque atome de L est un cycle ; chaque élément différent de l'infimum et précédant un cycle est un cycle, „sous-cycle" du premier. Si L est modulaire, une suite d'éléments de L, $U_1, U_2, \ldots, U_m$, tous différents de E, est dite „indépendante" si, et seulement si, $(U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r) \cap U_{r+1} = E$ pour tout $r = 1, 2, \ldots, m-1$, E étant l'infimum de L. Une suite $U_1, U_2, \ldots, U_m$ est une „base de L" si elle est indépendante et telle que $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m = G$, G étant le suprémum de L.

Soit maintenant G une composante primaire que nous supposerons produit direct de m groupes cycliques tous du même ordre p^α. Dans la lattice L de G chaque élément irréductible qui n'est pas l'infimum est un cycle (un sous-groupe cyclique de G) et chaque cycle „maximal" (qui n'est pas suivi d'un autre cycle) a la dimension α. D'autre part, L est une lattice uniforme-p, p étant premier, et les dimensions des sous-lattices convexes et complémentées de L ne dépassent pas la dimension de la lattice engendrée par les atomes de L. (Remarquons, en particulier, que chacune des sous-lattices convexes de dimension 2, de L, est isomorphe à la lattice d'un groupe quotient, d'ordre p^2, ayant donc 3 ou $p+3$ éléments selon qu'il s'agit d'une chaîne ou d'une lattice complémentée.)

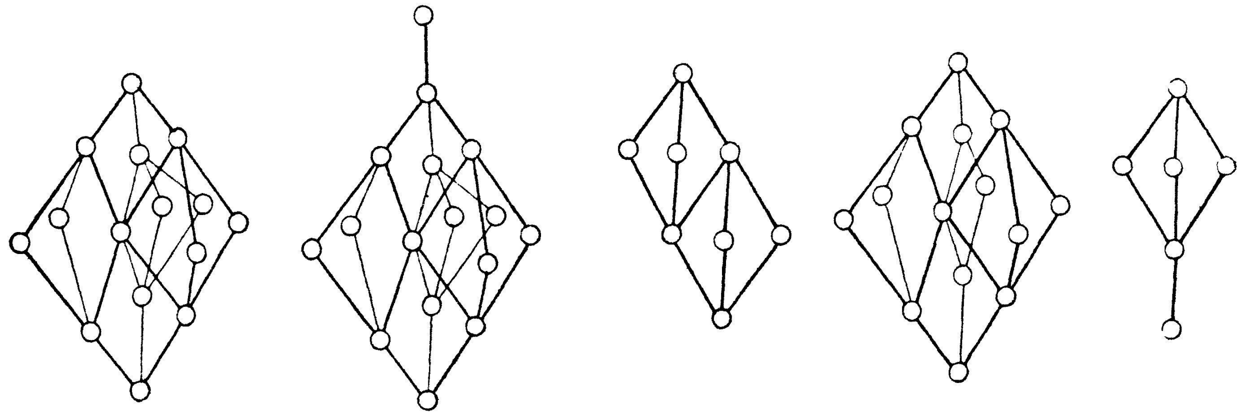
Nous démontrons maintenant que *deux lattices L_1 et L_2 possédant les propriétés qu'on vient de souligner dans la lattice L du groupe G sont nécessairement isomorphes*, et, par conséquent, que *ces propriétés caractérisent à moins d'un isomorphisme la lattice d'un groupe qui est le produit direct de m groupes cycliques d'ordres p^α.*

Pour arriver à établir l'isomorphisme liant L_1 et L_2 nous partons de l'isomorphisme, évident, des systèmes partiellement ordonnés formés des éléments de dimension ≤ 1, de L_1 et L_2, et nous montrons qu'un isomorphisme des systèmes partiellement ordonnés, formés respectivement des éléments de L_1 et L_2 de dimension $\leq \gamma - 1$, peut être étendu aux éléments de dimension $\leq \gamma$: en effet, comme les éléments irréductibles de dimension > 0 sont toujours des cycles, chaque élément de dimension γ qui n'est pas un cycle est un join de cycles et suit plus d'un élément de dimension $\gamma - 1$. Soit B_1 un tel élément de dimension γ dans L_1. Prenons tous les éléments de dimension $\gamma - 1$ précédant B_1 et leurs correspondants (par l'isomorphisme supposé) dans L_2. Soit A_1 le meet de ces éléments de dimension $\gamma - 1$ de L_1, et considérons la lattice L_1' de tous les éléments X tels que $A_1 \leq X \leq B_1$. Selon la remarque faite à la fin du no. 1, § 2, L_1' est complémentée. Les correspondants des atomes de L_1' engendrent donc, dans L_2 une lattice ayant même nombre de dimensions (isomorphe à L_1') et dont le supremum (nécessairement de dimension γ) sera le correspondant de B_1. De même, une correspondance des éléments non cycles de L_2 de dimension γ à ceux de L_1 peut être établie ; et de ces correspondances l'une est la réciproque de l'autre. Le nombre des éléments de dimension γ qui ne sont pas des cycles, dans L_1 et dans L_2 est alors le même, et d'autre part, comme chaque élément précédant B_1 dans L_1 est égal ou précède un tel élément de dimension $\gamma - 1$, l'isomorphisme initial est ainsi étendu aux éléments de dimension γ qui ne sont pas des cycles.

Maintenant il nous reste à étendre cet isomorphisme aussi aux cycles à dimension γ. Pour cela nous partons de la correspondance biunivoque entre les cycles de dimension $\gamma - 1$ de L_1 et L_2 établie par l'isomorphisme supposé entre les éléments de dimension $\leq \gamma - 1$. Chaque cycle de dimension γ suit immédiatement un seul cycle de dimension $\gamma - 1$ et aucun autre élément. Il nous suffit donc de montrer que le nombre des cycles de dimension γ suivant un cycle de dimension $\gamma - 1$ est toujours le même dans les lattices ayant les propriétés que nous supposons. Tout d'abord, il n'y a aucun cycle à dimension γ si $\gamma > \alpha$. Si $\gamma \leq \alpha$ et C est un cycle à dimension $\gamma - 1$, considérons la sous-lattice, convexe, formée des éléments X tels que $C \leq X \leq D$, où D est le join des éléments de dimension γ suivant immédiatement C. La dimension de cette lattice, convexe et complémentée, ne dépasse pas m, donc, cette lattice étant une géométrie projective sur le corps d'ordre p (car la lattice totale que nous considérons est uniforme-p) le complément d'un atome est précédé par $\frac{p^{m-1}-1}{p-1}$ atomes, au plus. D'autre part on voit qu'il y a précisément $\frac{p^{m-1}-1}{p-1}$ éléments suivant immédiatement C, et qui sont des joins de C avec les atomes de la lattice totale. (En effet, on a $C \cup A_i = C \cup A_j$, A_i et A_j étant des atomes différents entre eux et différents de l'atome C_1 qui précède C, si et seulement si $dim\ (C \cup A_i \cup A_j) = \gamma$, donc, par la modularité, si et seulement si $(\gamma - 1) + 2 - dim\ [(A_i \cup A_j) \cap C]$ est égal à γ, c'est-à-dire $C_1 \leq A_i \cup A_j$. Le nombre de tels éléments non cycles suivant immédiatement C est, alors, égal à celui des atomes précédant le complément de C_1 dans la géométrie projective, à m dimensions sur le corps d'ordre p, formée des atomes de notre lattice totale. Ce nombre est celui des atomes d'une géométrie projective à $m - 1$ dimensions sur le corps d'ordre et p, et donc égal, à $\frac{p^{m-1}-1}{p-1}$). En outre, s'il y a un cycle au moins suivant immédiatement C, la sous-lattice convexe complémentée des éléments X tels que $C \leq X \leq D$ aura, ainsi, au moins un nouvel atome de plus et, étant une géométrie projective sur le corps premier p à dimension $\leq m$, aura m dimensions, donc $\frac{p^m - 1}{p - 1}$ atomes. Nous en concluons que chaque cycle à dimension $\gamma - 1$ est suivi d'exactement p^{m-1} cycles à dimension γ, ce qu'il fallait démontrer. Nous pouvons alors, énoncer :

Les lattices des produits directs de groupes cycliques tous d'ordre p^α sont caractérisées par les propriétés suivantes : chaque élément irréductible différent de l'infimum est un cycle, chaque cycle maximal a la dimension α, la lattice est uniforme-p et le nombre des éléments qui suivent immédiatement un élément quelconque ne dépasse pas celui des atomes.

Nous dirons, brièvement, qu'une lattice possédant ces quatre propriétés est l',,extension de degré α d'une géométrie projective sur le corps d'ordre premier p". Les schémas suivants nous donnent, d'abord, la lattice du groupe du type (p^2, p^2) (produit direct de deux groupes cycliques



d'ordres p^2) dans le cas $p = 2$, et ensuite, quatre lattices modulaires qui nous montrent l'indépendance des quatre propriétés ci-dessus ($\alpha = 2$ et $p = 2$).

Remarquons que de ce qu'on a dit au no. 2 de ce paragraphe il résulte que les produits de chaînes de dimension α peuvent se définir par les propriétés ci-dessus p y étant remplacé par 1. Nous aurons ainsi, en général, des ,,extensions de lattices complémentées et uniformes-u", u étant un nombre indécomposable quelconque.

Finalement, nous obtenons le théorème :

II. *Une lattice est isomorphe à la lattice d'une composante primaire si, et seulement si, elle est un idéal d'une extension de géométrie projective sur un corps d'ordre premier. Si une composante primaire est le produit direct de m groupes cycliques dont* $m_1, m_2, \ldots, m_l$, *avec* $m_1 + m_2 + \cdots + m_l = m$, *ont respectivement les ordres* $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots, p^{\alpha_l}$ *avec* $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_l$, *alors le corps est d'ordre* p, *la géométrie projective a la dimension* m, *l'extension a un degré* $\geq \alpha_1$ *et l'idéal a une base de cycles dont* $m_1, m_2, \ldots, m_l$ *ont respectivement les dimensions* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$.

Comme conséquence immédiate des théorèmes I et II, on a le résultat fondamental suivant :

Une lattice est isomorphe à la lattice d'un groupe abélien fini si et seulement si elle est le produit d'idéaux d'extensions de lattices complémentées et uniformes-u, les u étant tous indécomposables et différents entre eux. La représentation d'une telle lattice comme un tel produit est univoque, le facteur, $L_{(1)}$, *pour lequel* $u = 1$ *(s'il existe) étant la lattice d'un groupe cyclique.*

Et l'on peut ajouter le corollaire :

Pour que la lattice d'un groupe abélien fini détermine (à un isomorphisme près) ce groupe, il faut et il suffit que $u \neq 1$ *dans chaque facteur de la représentation ci-dessus, c'est-à-dire qu'aucun de ces facteurs ne soit distributif.*

(Reçu le 10 juin 1947.)