Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1949)

Artikel: Über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen.
Autor: Nagy, Gyula v. S v.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19765

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen

Von Gyula v. Sz. NAGY, Szeged (Ungarn)

1. Die nicht reduzierbare rationale Funktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \tag{1}$$

ist vom n-ten Grad, wenn $|a_0| + |b_0| \neq 0$ ist. Der Punkt z_0 ist eine Z-Stelle bzw. ein Pol der Funktion $F(z)$, je nachdem $F(z_0) = Z$ bzw. $F(z_0) = \infty$ ist.

Diese Arbeit beschäftigt sich um die Lage der Z-Stellen der Funktion (1) bezüglich ihrer Nullstellen und Pole und verallgemeinert einige Sätze von mir über Polynome[1]). So beweise ich die Sätze:

I. *Bezeichnet α bzw. β eine (endliche) Nullstelle bzw. einen (endlichen) Pol der rationalen Funktion $F(z)$ n-ten Grades*

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

und sind

$$C = \frac{f(\beta)}{g(\alpha)} \quad \textit{und} \quad |Z| < |C| \,, \tag{2}$$

so besitzt die Funktion $F(z)$ mindestens eine Z-Stelle im Innern des Kreises

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| \doteq \left|\frac{Z}{C}\right|^{\frac{1}{n}} = t\,(<1) \tag{3}$$

oder sämtliche Z-Stellen auf diesem Kreis.

---

[1]) *Gy. Sz. Nagy*, Über die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, Acta Scientiarum Math. Szeged 11 (1947), S. 147—151.

Andere Ergebnisse über Wertverteilung gebrochener rationaler Funktionen befinden sich in den Arbeiten:

M. Fekete, Über Wertverteilung bei rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Acta Scient. Math. Szeged 4 (1929), S. 234—243.

Gy. Sz. Nagy, Über den Wertvorrat gebrochener rationaler Funktionen in Kreisbereichen, Hungarica Acta Math. 1, Nr. 3 (1948), S. 1—13.

Dasselbe gilt im Falle $|Z| > |C|$ *für die Z-Stellen von* $F(z)$ *im Kreise*

$$\left|\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right| \leqq \left|\frac{C}{Z}\right|^{\frac{1}{n}} .$$

II. *Ist*

$$0 < \omega = \left|\operatorname{arc}\frac{-Z}{C}\right| = \left|\operatorname{arc}\frac{-Z\cdot g(\alpha)}{f(\beta)}\right| \leqq \pi , \tag{4}$$

so enthält das Kreiszweieck $K\left(\alpha, \beta; \frac{\omega}{n}\right)$, *von dessen Punkten aus die Strecke* (α, β) *unter je einem Winkel* $\geqq \frac{\omega}{n}$ *erscheint, mindestens eine Z-Stelle der Funktion* $F(z)$ *im Innern oder jede Z-Stelle von* $F(z)$ *am Rande.*

Die Z-Stellen der rationalen Funktion $F(z)$ sind Nullstellen des Polynoms

$$\varphi(z) = f(z) - Zg(z) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - Zb_k)z^{n-k} = (a_0 - Zb_0)\prod_{k=1}^{n}(z - z_k) . \tag{5}$$

Im Falle $a_0 - Zb_0 = 0$ hat das Polynom $\varphi(z)$ die Form

$$\varphi(z) = (a_p - Zb_p)\prod_{k=1}^{n-p}(z - z_k) , \quad a_p - Zb_p \neq 0 ,$$

$$a_k - Zb_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1; p < n) .$$

Dann ist $z_n = z_{n-1} = \cdots = z_{n-p+1} = \infty$ eine (p-fache) Z-Stelle von $F(z)$. Daraus folgt die Gleichung

$$-\frac{Z}{C} = \prod_{k=1}^{n}\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta} , \tag{6}$$

weil

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \frac{-Zg(\alpha)}{f(\beta)} = -\frac{Z}{C} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha - z_k}{\beta - z_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}$$

ist und weil im Falle $p > 0$, also im Falle $z_n = z_{n-1} = \cdots = z_{n-p+1} = \infty$,

$$\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta} = 1 , \quad (k = n, n-1, \ldots, n-p+1)$$

sind.

Liegt keine Z-Stelle von $F(z)$ im Innern des Kreises (3), so sind

$$\left|\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \geqq t \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| = \left|\frac{Z}{C}\right| = t^n ,$$

Diese Relationen bestehen zugleich nur dann, wenn die Ungleichungen mit lauter Gleichungszeichen gelten. Damit ist der Satz I bewiesen, weil sein zweiter Absatz aus dem ersten folgt, wenn man die Funktion $F(z)$ durch ihre Reziproke ersetzt.

Enthält das Kreiszweieck $K\left(\alpha, \beta; \frac{\omega}{n}\right)$ keine Z-Stelle ($Z \neq 0, \infty$) von $F(z)$ im Innern, so bestehen die Ungleichungen

$$\left|\operatorname{arc} \frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \leqq \frac{\omega}{n} = \frac{1}{n}\left|\operatorname{arc} \frac{-Z}{C}\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{7}$$

Diese Ungleichungen und die aus (6) folgende Ungleichung

$$\omega = \left|\operatorname{arc} \frac{-Z}{C}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc} \frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left|\operatorname{arc} \frac{z_k - \alpha}{z_k - \beta}\right|$$

enthalten nur dann keinen Widerspruch, wenn jede Ungleichung (7) mit Gleichungszeichen besteht. Damit ist der Satz II bewiesen.

2. Sind die Nullstellen der Polynome $f(z)$ und $g(z)$ bekannt, so gelten die Sätze:

III. *Sind*

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k} \ , \qquad 0 < t < 1 \ , \qquad t^n = |U| = \frac{1}{|V|} \ , \tag{8}$$

so enthält die Gesamtheit der n Kreisscheiben

$$\left|\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k}\right| \leqq t \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{z - \beta_k}{z - \alpha_k}\right| \leqq t \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

jede U-Stelle bzw. jede V-Stelle der rationalen Funktion $F(z)$ *von* (8).

IV. *Ist*

$$0 < \omega = |\operatorname{arc} W| \leqq \pi \ , \tag{10}$$

so enthält die Gesamtheit der n Kreiszweiecke $K\left(\alpha_k, \beta_k; \frac{\omega}{n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *jede W-Stelle der Funktion* $F(z)$ *von* (8).

Die Annahme, daß eine U-Stelle u bzw. eine V-Stelle v der Funktion $F(z)$ außerhalb jeder Kreisscheibe der ersten bzw. zweiten Gesamtheit von (9) liegt, führt zu einem Widerspruch. Aus (8) und aus den Ungleichungen

$$\left|\frac{u - \alpha_k}{u - \beta_k}\right| > t \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{v - \alpha_k}{v - \beta_k}\right| < t^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt nämlich die falsche Ungleichung

$$t^n = |U| = |F(u)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{u-\alpha_k}{u-\beta_k} \right| > t^n$$

bzw. $$t^{-n} = |V| = |F(v)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{v-\alpha_k}{v-\beta_k} \right| < t^{-n} .$$

Ähnlicherweise führt die Annahme, daß $F(z)$ eine W-Stelle w außerhalb jedes Kreiszweieckes $K\left(\alpha_k, \beta_k; \frac{\omega}{n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ besitzt, zu einem Widerspruch. Wären nämlich

$$\left| \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| < \frac{\omega}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

so wären

$$\omega = |\operatorname{arc} F(w)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \left| \operatorname{arc} \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k} \right| < \omega .$$

Damit sind die Sätze III und IV bewiesen.

3. Bezeichnet B einen konvexen Bereich der komplexen z-Ebene und ist $0 < t < 1$ bzw. $0 < \vartheta \leqq \pi$, so hat der Bereich $B(t)$ bzw. $K(B; \vartheta)$ die Eigenschaft:

Sind α und β zwei beliebige Punkte von B, so enthält B die Kreisscheiben

$$\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| \leqq t \quad \text{und} \quad \left| \frac{z-\beta}{z-\alpha} \right| \leqq t .$$

Von einem beliebigen Punkte des Bereiches $K(B; \vartheta)$ aus erscheint der konvexe Bereich B unter einem Winkel $\geqq \vartheta$.

Bedeutet B die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leqq r$, so ist $K(B; \vartheta)$ bzw. $B(t)$ die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leqq r \operatorname{cosec} \frac{\vartheta}{2}$ bzw.

$$|z - \zeta| \leqq r(1+t)(1-t)^{-1}.$$

Die erste Behauptung ist klar, auch die zweite läßt sich leicht einsehen. Sind nämlich $|\alpha - \zeta| \leqq r$, $|\beta - \zeta| \leqq r$ und

$$\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = t_1 \leqq t , \quad \text{also} \quad \frac{z-\alpha}{z-\beta} = t_1 e^{i\psi} , \quad \text{d. h.} \quad z = \frac{\alpha - \beta t_1 e^{i\psi}}{1 - t e^{i\psi}} ,$$

so ist

$$|z - \zeta| = \left| \frac{(\alpha-\zeta) - (\beta-\zeta) t_1 e^{i\psi}}{1 - t_1 e^{i\psi}} \right| \leqq \frac{|\alpha-\zeta| + |\beta-\zeta| t_1}{1 - t_1}$$

$$\leqq \frac{r + rt}{1-t} = r \frac{1+t}{1-t} .$$

Aus den Sätzen III und IV folgt also der Satz

V. *Enthält der konvexe Bereich B jede Nullstelle und jeden Pol der rationalen Funktion $F(z)$ n-ten Grades von der Form*

$$F(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \tag{11}$$

und sind $|U| = |V|^{-1} = t^n < 1$ *bzw.* $0 < |\operatorname{arc} W| = \omega \leqq \pi$, *so enthält der Bereich* $B(t)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ *jede U-Stelle, jede V-Stelle bzw. jede W-Stelle der Funktion* $F(z)$.

Bedeutet B die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leqq r$, *so ist* $B(t)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ *die Kreisscheibe* $|z - \zeta| \leqq r(1+t)(1-t)^{-1}$ *bzw.* $|z - \zeta| = r \operatorname{cosec} \frac{\omega}{2n}$.

Dieser Satz läßt sich auch in der Form ausdrücken:

VI. *Bezeichnet T die durch die Gleichung*

$$Z = F(z) \tag{12}$$

bestimmte konforme Abbildung der komplexen Z-Ebene auf die z-Ebene, wo die rationale Funktion $F(z)$ die Form (11) *besitzt, so hat T die Eigenschaften:*

Liegen die Nullstellen und die Pole von $F(z)$ in einem konvexen Bereich B, so enthält der Bereich $B(t)$ $(0 < t < 1)$ *bzw.* $K\left(B; \frac{\omega}{n}\right)$ $(0 < \omega \leqq \pi)$ *die Abbildung beider Kreisbereiche der Z-Ebene* $|Z| \leqq R_1 = t^n < 1$ und $|Z| \geqq R_2 = t^{-n} > 1$ *bzw. die Abbildung des Winkelraumes*

$$\pi - \omega \leqq \operatorname{arc} Z \leqq \pi + \omega.$$

4. Die äußere bzw. innere Seite eines Kegelschnittes K besteht aus den Punkten, die an K zwei verschiedene bzw. keine Tangenten senden. Mit dieser Benennung lassen sich die Sätze einer früheren Arbeit[2]) von mir in der Form ausdrücken und zusammenfassen:

VII. *Liegen die Nullstellen bzw. Pole der Funktion $F(z)$ von der Form* (11) *im Kreisbereich K_1 bzw. K_2, so kann man in folgenden Fällen einen von Kegelschnitt begrenzten Bereich B der z-Ebene angeben, der das Abbild einer Kreisscheibe* $|Z| \leqq t^n$ *in sich enthält.*

---

[2]) *Gy. de Sz. Nagy*, Generalisation of certain theorems of G. Szegö on the locations of zeros of polynomials, Bull. of the Amer. Math. Soc. **53** (1947), S. 1164—1169.

1. *Sind* K_1: $|z-\zeta| \geqq r_1$, K_2: $|z-\zeta| \leqq r_2$, $t < \frac{r_1}{r_2}$, *so ist* B: $|z-\zeta| \geqq \frac{r_1 - r_2 t}{1+t}$.

2. *Sind* K_1: $|z-\zeta_1| \geqq r_1$, K_2: $|z-\zeta_2| \leqq |r_2|$, $t<1$ *und* $|\zeta_1 - \zeta_2| < r_1 - r_2$, *so ist* B *äußere Seite der Ellipse mit der Hauptachsenlänge* $r_1 - r_2$ *und mit den Brennpunkten* ζ_1 *und* ζ_2.

3. *Sind* K_1: $|z-\zeta_1| \leqq r_1$, K_2: $|z-\zeta_2| \leqq r_2$, $t<1$ *und* $|\zeta_1 - \zeta_2| > r_1 + r_2$, *so liegt* B *außerhalb der* ζ_2 *enthaltenden inneren Seite der Hyperbel mit der Hauptachsenlänge* $r_1 + r_2$ *und mit den Brennpunkten* ζ_1 *und* ζ_2.

4. *Ist* K_1: $|z-\zeta| \leqq r$, *ist* K_2 *eine Halbebene mit der Randgeraden* g, *haben* K_1 *und* K_2 *keinen Punkt gemeinsam und ist* $t = e + r\frac{e+1}{\delta}$, *so enthält* B *die innere Seite eines Kegelschnitts mit der numerischen Exzentrität* e, *der in* ζ *einen Brennpunkt und in* g *die zugehörige Leitgerade besitzt, wenn* δ *den Abstand zwischen* ζ *und* g *bedeutet.*

(Eingegangen den 10. Juli 1948.)