

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 23 (1949)  
  
**Artikel:** Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie.  
**Autor:** Toeplitz, Otto  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19761>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie

Von OTTO TOEPLITZ †, Jerusalem <sup>1)</sup>

## Einleitung

Faßt man die Koeffizienten einer ganzen Funktion  $x(w) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p w^{p-1}$  zu einem Vektor  $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$  zusammen, so bildet die Menge dieser Vektoren einen vollkommenen Raum  $\pi_{\infty}$  im Sinne von K. T. <sup>2)</sup>, der dazu duale Raum ist  $\varrho_0$ , der Raum der Potenzreihen mit einem von Null verschiedenen Konvergenzradius. Ebenso ist der Raum  $\pi_r$  der Potenzreihen mit einem Konvergenzradius  $\geq r$  dual zum Raum  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  der Potenzreihen vom Radius  $> \frac{1}{r}$ .

Die Untersuchung beginnt mit der Bestimmung der beschränkten Mengen in diesen Räumen (§ 1) und der Konvergenz (§ 2). In allen diesen Räumen fallen die schwache und die starke Konvergenz zusammen. Beschränktheit und Konvergenz in  $\pi_r$  sind Begriffe aus der allgemeinen Theorie der vollkommenen Räume, sie erweisen sich jedoch in § 3 identisch mit der gleichmäßigen Beschränktheit bzw. der gleichmäßigen Konvergenz im Inneren von  $|w| < r$ , den aus der Funktionentheorie bekannten Begriffen. Der Vitalische Satz der Funktionentheorie erscheint so als Spezialfall eines Satzes, der in allen vollkommenen Räumen gilt, in denen jede beschränkte Menge eine schwach konvergente Teilfolge enthält.

In § 4 werden die linearen Transformationen der Räume  $\pi_r$  und  $\varrho_r$

---

<sup>1)</sup> Aus dem Nachlaß des am 15. Februar 1940 in Jerusalem verstorbenen Verfassers, herausgegeben von Gottfried Köthe in Mainz. Die vorliegende Studie über die funktionentheoretischen Räume  $\varrho_r$  und  $\pi_r$  stammt aus dem Jahre 1937. Der Herausgeber hat sie aus mehreren Niederschriften und Notizen zusammengestellt, trägt also für den Text im einzelnen die Verantwortung.

<sup>2)</sup> Auf folgende Arbeiten wird gelegentlich verwiesen: K. T., *G. Köthe* und *O. Toeplitz*, Journ. f. reine angew. Math. 171 (1934), S. 193—226, K. *G. Köthe*, Math. Annalen 114 (1937), S. 91—125.

in sich bestimmt, sie lassen sich sowohl durch unendliche Matrizen, wie durch komplexe Integrale der Gestalt

$$y(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint B\left(w, \frac{1}{t}\right) x(t) \frac{dt}{t}$$

darstellen,  $B(w, z)$  eine in einem geeigneten Bereich um 0 analytische Funktion zweier Variablen.

§ 5 beginnt mit dem Studium zweier einfacher Typen von solchen linearen Transformationen, die ihrer funktionentheoretischen Bedeutung halber von Interesse sind.

Der Verfasser erhoffte sich von der Fortführung dieser Untersuchungen einen neuen Zugang zur Wachstumstheorie der ganzen Funktionen, überhaupt eine gegenseitige Befruchtung der Funktionentheorie und der Theorie der linearen Räume in Fragestellung und Methode.

Eine Verallgemeinerung einiger hier gegebener Sätze auf allgemeinere lineare Räume gab kürzlich der Herausgeber<sup>3)</sup>, Verwandtschaft besteht ferner mit den Untersuchungen von *L. Fantappiè* über analytische Funktionale<sup>4)</sup>.

## § 1. Die Grundlagen

Es soll bedeuten:

$\pi_\infty$  den Raum der ganzen transzendenten Funktionen  $x(w) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w^{n-1}$ ,

$\pi_r$  den Raum der Potenzreihen  $x(w)$ , deren Konvergenzradius  $\geq r > 0$ ,

$\varrho_r$  den Raum der Potenzreihen  $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{n-1}$ , deren Konvergenzradius  $> r > 0$ ,

$\varrho_0$  den Raum der Potenzreihen  $u(z)$ , deren Konvergenzradius  $> 0$  ist.

Als Koordinatenräume mit den Stellen

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \dots\} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{u} = \{u_1, u_2, \dots\}$$

sind diese Räume also charakterisiert

$$\pi_\infty \text{ durch } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0, \quad \pi_r \text{ durch } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r},$$

---

<sup>3)</sup> Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, Math. Z. 51 (1948), S. 317—345.

<sup>4)</sup> Vgl. etwa Jahresbericht DMV 43 (1934), S. 1—25.

$$\varrho_r \text{ durch } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < \frac{1}{r}, \quad \varrho_0 \text{ durch } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < \infty.$$

Wir setzen  $|x| = \sup_n \sqrt[n]{|x_n|}$  und  $|u| = \sup_n \sqrt[n]{|u_n|}$ .

**Satz 1.**  $\pi_r$  und  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  ( $r \leq \infty$ ) sind zueinander dual, also vollkommen.

1. Ist  $x$  eine Stelle aus  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ), so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon$ , so daß  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon$  ist für  $n \geq n_\varepsilon$ ; ist  $u$  eine Stelle von  $\varrho_s$  ( $s \geq 0$ ), so gibt es ein  $\eta > 0$  und dazu ein  $n_\eta$ , so daß  $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{s + \eta}$  ist für  $n \geq n_\eta$ . Ist  $n_0$  die größere der beiden Zahlen  $n_\varepsilon, n_\eta$ , so ist für  $n \geq n_0$

$$|u_n x_n| \leq \left( \frac{\frac{1}{r} + \varepsilon}{s + \eta} \right)^n.$$

Ist nun  $\frac{1}{r} \leq s$ , so folgt

$$|u_n x_n| \leq \left( \frac{s + \varepsilon}{s + \eta} \right)^n \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon, \eta).$$

Es sei  $\eta > 0$  festgelegt. Wählt man dann  $\varepsilon < \eta$  und bestimmt danach  $n_\varepsilon, n_\eta, n_0$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$  konvergent, d. h.

1. wenn  $x$  in  $\pi_r$  und wenn  $s \geq \frac{1}{r}$ , so ist jede Stelle von  $\varrho_s$  im dualen Raum  $\pi_r^*$  gelegen, d. h. es ist  $\varrho_{\frac{1}{r}} \leq \pi_r^*, \varrho_0 \leq \pi_\infty^*$ ;
2. wenn  $u$  in  $\varrho_s$  und wenn  $r \geq \frac{1}{s}$ , so ist jede Stelle von  $\pi_r$  in  $\varrho_s^*$  gelegen, d. h. es ist  $\pi_{\frac{1}{s}} \leq \varrho_s^*, \pi_\infty \leq \varrho_0^*$ .

2. Gäbe es ein  $u$  in  $\pi_r^*$  ( $r \leq \infty$ ), das nicht in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  liegt, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $n_1, n_2, \dots$ , so daß

$$\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \geq r - \frac{1}{k} \quad \text{für} \quad r < \infty \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \geq k \quad \text{für} \quad r = \infty$$

ist. Sei dann  $x_{n_k} = \frac{1}{|u_{n_k}|}$ , aber  $x_n = 0$  für  $n \neq n_k$ , so ist

$$\sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} \leq \frac{1}{r - \frac{1}{k}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} \leq \frac{1}{k}, \quad \text{also} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r},$$



d. h.  $\mathfrak{x}$  in  $\pi_r$  und trotzdem wäre  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$  divergent, da es unendlich viele Summanden 1 enthält, das widerspricht der Annahme, daß  $u$  in  $\pi_r^*$ . Also  $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$ .

3. Gäbe es ein  $\mathfrak{x}$  in  $\varrho_{\frac{1}{r}}^*$  ( $r \leq \infty$ ), das nicht in  $\pi_r$  liegt, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $n_1, n_2, \dots$ , so daß  $\sqrt[n_i]{|x_{n_i}|} \geq \frac{1}{r} + \varepsilon$ . Sei dann

$$u_{n_i} = \frac{1}{|x_{n_i}|}, \quad u_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq n_i,$$

so wäre  $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon}$  für jedes  $n$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < r$ , d. h.  $u$

in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  gelegen; aber  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$  divergiert. Also ist  $\varrho_{\frac{1}{r}}^* = \pi_r$ ,  $\varrho_0^* = \pi_{\infty}$ .

**Satz 2<sub>q</sub>.** Eine Menge  $U$  von Stellen  $u$  aus  $\varrho_0$  ist dann und nur dann beschränkt, wenn  $|u|$  für alle  $u$  aus  $U$  beschränkt ist.

Eine Menge  $U$  von Stellen  $u$  aus  $\varrho_r$  ( $r > 0$ ) ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie

1. koordinatenweise beschränkt ist und wenn es

2. ein  $\delta > 0$  und dazu ein  $n_0(\delta)$  gibt, so daß  $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{r + \delta}$  für alle  $u$  aus  $U$  und  $n \geq n_0(\delta)$  gilt.

1. Ist in  $\varrho_0$  der Betrag  $|u|$  für alle  $u$  aus  $U$  beschränkt,  $\leq M$ , so ist  $|u_n| \leq M^n$  für alle  $n$  und daher

$$|u \mathfrak{x}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| M^n,$$

d. h. für jedes  $\mathfrak{x}$  aus  $\pi_{\infty}$  unter einer vom einzelnen  $u$  aus  $U$  unabhängigen Grenze gelegen.

2. Ist in  $\varrho_r$  die zweite Bedingung erfüllt, so gibt es ein  $\delta > 0$  und dazu ein  $n_0(\delta)$ , so daß  $|u_n| \leq \frac{1}{(r + \delta)^n}$  für  $n \geq n_0(\delta)$  und alle  $u$  aus  $U$  gilt. Ist also  $\mathfrak{x}$  irgendeine Stelle aus  $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$ , mithin für  $\varepsilon > 0$   $\sqrt[n]{|x_n|} \leq r + \varepsilon$ , wenn  $n > n_1(\varepsilon)$ , so folgt  $|u_n x_n| \leq \left(\frac{r + \varepsilon}{r + \delta}\right)^n$  für  $n \geq n_2$ , wo  $n_2$  die größere der beiden Zahlen  $n_0, n_1$  ist. Wählt man das frei vorgegebene  $\varepsilon < \delta$ , so ist  $\frac{r + \varepsilon}{r + \delta} < 1$  und  $\sum_{n=n_2}^{\infty} |u_n x_n|$  kon-

vergent und  $\leq M(\delta, \varepsilon, n_1(\varepsilon))$ , also unter einer vom einzelnen  $u$  aus  $U$  unabhängigen Schranke. Wegen der ersten Bedingung ist aber auch  $\sum_{n=1}^{n_2=1} |u_n x_n|$  unter einer vom einzelnen  $u$  unabhängigen Schranke gelegen, also auch  $|u x|$ , d. h.  $U$  ist beschränkt.

3. Ist in  $\varrho_r (r \geq 0)$  die Menge  $U$  beschränkt, so ist die 1. Bedingung erfüllt und es handelt sich nur um den Beweis der 2. Bedingung. Ist  $u$  irgendeine Stelle aus  $\varrho_r$ , so gilt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < \frac{1}{r},$$

d. h. es gibt ein  $\delta > 0$  und ein  $n_0(\delta)$ , so daß  $\sqrt[n]{|u_n|} < \frac{1}{r + \delta}$  für  $n \geq n_0(\delta, u)$ . Gäbe es nun nicht ein  $\delta$  für alle  $u \in U$  und dazu ein  $n_0(\delta)$ , so gäbe es eine Folge  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$  in  $U$  und dazu eine Folge  $n_1 < n_2 < \dots$ , so daß

$$\sqrt[n_1]{|u_{n_1}^{(1)}|} \geq \frac{1}{r + 1}, \quad \sqrt[n_2]{|u_{n_2}^{(2)}|} \geq \frac{1}{r + \frac{1}{2}}, \dots, \quad \sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|} \geq \frac{1}{r + \frac{1}{\alpha}}, \dots$$

Sei dann

$$x_{n_\alpha} = \frac{n_\alpha}{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}, \quad x_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq n_\alpha,$$

so ist

$$\sqrt[n_\alpha]{|x_{n_\alpha}|} = \frac{\sqrt[n_\alpha]{n_\alpha}}{\sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}} \leq \sqrt[n_\alpha]{n_\alpha} \left( r + \frac{1}{\alpha} \right),$$

also  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq r$ , d. h.  $x$  in  $\pi_{\frac{1}{r}}$  gelegen. Andererseits ist, wenn  $\tilde{u} = \{|u_1|, |u_2|, \dots\}$  gesetzt wird,  $\tilde{u}^{(\alpha)} x \geq |u_{n_\alpha}^{(\alpha)}| x_{n_\alpha} = n_\alpha \rightarrow \infty$ , also  $\tilde{u}^{(\alpha)} x \rightarrow \infty$ , d. h. die normale Hülle  $\tilde{U}$  von  $U$  unbeschränkt, nach K. T. § 5, Satz 2 also  $U$  selbst unbeschränkt gegen die Voraussetzung.

**Satz 2<sub>r</sub>.** Eine Menge  $X$  in  $\pi_r (r \leq \infty)$  ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie

1. koordinatenweise beschränkt ist und wenn es

2. zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$  gibt, so daß  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon$  ist für  $n \geq n_0(\varepsilon)$  und alle  $x$  aus  $X$ .

1. Ist  $x$  irgendeine Stelle aus  $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < r$ , also für ein passendes  $\delta > 0$  gibt es ein  $n_1(\delta)$ , so daß

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}$$

gilt, wenn  $n \geq n_1(\delta)$ . Ist nun die 2. Bedingung erfüllt, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$ , so daß

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon)$$

und alle  $x$  aus  $X$ , also

$$|u_n x_n| \leq \left[ \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta} \left( \frac{1}{r} + \varepsilon \right) \right]^n.$$

Wählt man speziell  $\varepsilon < \delta$ , so wird  $\sum_{n=n_2}^{\infty} |u_n x_n|$ , wo  $n_2$  die größere der beiden Zahlen  $n_0, n_1$  bedeutet, konvergieren und unter einer vom einzelnen  $x$  unabhängigen Schranke liegen. Ebenso  $\sum_{n=1}^{n_2-1} |u_n x_n|$  wegen der 1. Bedingung. Also ist  $X$  beschränkt.

2. Ist umgekehrt  $X$  beschränkt, so ist zuerst die 1. Bedingung erfüllt. Wäre die 2. Bedingung *nicht* erfüllt, so wäre für ein  $\varepsilon$  das  $n_0(\varepsilon)$ , das es zu jedem  $x$  aus  $\pi_r$  gibt und für das

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon)$$

gilt, nicht für alle  $x$  aus  $X$  gleichmäßig dasselbe, sondern es gäbe eine Folge  $x^{(n_\alpha)}, n_1 < n_2 < \dots$  aus  $X$ , so daß

$$\sqrt[n_1]{|x_{n_1}^{(1)}|} \geq \frac{1}{r} + \varepsilon, \quad \sqrt[n_2]{|x_{n_2}^{(2)}|} \geq \frac{1}{r} + \varepsilon, \dots$$

Dann wäre

$$|x_{n_\alpha}^{(\alpha)}| \geq \left( \frac{1}{r} + \varepsilon \right)^{n_\alpha}.$$

Sei dann

$$u_{n_\alpha} = \frac{n_\alpha}{|x_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}, \quad u_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq n_\alpha,$$

so wäre

$$\sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}|} \leq \sqrt[n_\alpha]{n_\alpha} \frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon},$$

also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon},$$

d. h.  $u$  in  $\varrho_{\frac{1}{r}} = \pi_r^*$ . Andererseits wäre  $|u_{n_\alpha} x_{n_\alpha}^{(\alpha)}| \geq n_\alpha \rightarrow \infty$ , also  $|u \tilde{x}^{(\alpha)}| \rightarrow \infty$ , d. h. die normale Hülle  $\tilde{X}$  unbeschränkt, mithin wegen K. T. § 5, Satz 2, auch  $X$  unbeschränkt gegen die Voraussetzung.

**Satz 3.** In  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) gibt es zu jeder beschränkten Menge  $X$  eine majorisierende Stelle  $\eta$  mit lauter reellen, nichtnegativen Koordinaten, so daß für jedes  $x$  aus  $X$  gilt  $|x_n| \leq y_n$ . Dasselbe gilt für  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ).

1. Zuerst ist  $X$  als beschränkte Menge koordinatenweise beschränkt. Sei  $m_k = \sup |x_k|$  für alle  $x$  aus  $X$ . Gemäß Satz 2 <sub>$\pi$</sub>  ist für alle  $x$  aus  $X$  und  $k \geq n_0(\varepsilon)$  gleichmäßig  $\sqrt[k]{|x_k|} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon$ , daher gilt auch für das supremum  $\sqrt[k]{m_k} \leq \frac{1}{r} + \varepsilon$ . Diese Tatsache drückt man einfach aus durch  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{m_k} \leq \frac{1}{r}$  und sie besagt, daß die Stelle  $m = \{m_1, m_2, \dots\}$  eine Stelle aus  $\pi_r$  ist. Sie hat offenbar die gewünschte Majoranteneigenschaft.

2. Für  $\varrho_r$  schließt man analog aus Satz 2 <sub>$\varrho$</sub> . Hier erhält man ein  $\delta$ , für das  $\sqrt[k]{m_k} \leq \frac{1}{r + \delta}$  wird bei  $k \geq n_0(\delta)$  und dies besagt, daß die Stelle  $m$  in  $\varrho_r$  liegt.

## § 2. Grenzstellen und Häufungsstellen in $\pi_r$ und $\varrho_r$

Aus § 1, Satz 3, können wir jetzt leicht folgern, daß sowohl in den  $\pi_r$  wie auch in den  $\varrho_r$  (schwache) Konvergenz und starke Konvergenz identisch sind (zu ihrer Definition vergleiche K. T. § 3 und § 5).

**Satz 1.** In  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) ist jede konvergente Folge stark konvergent.

Da die  $\pi_r$  nach § 1, Satz 1, vollkommen, nach K. T. § 3 also vollständig sind, genügt es, die Behauptung für Folgen  $x^{(p)}$  zu beweisen, die gegen  $0$  konvergieren.

Die Menge  $X$  aller  $x^{(p)}$  ist beschränkt,  $\eta$  sei eine nach § 1, Satz 3, existierende majorisierende Stelle. Ist nun eine beliebige beschränkte Menge  $U$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  gegeben,  $w$  eine majorisierende Stelle von  $U$ , so ist  $|w \eta| = \sum_{n=1}^{\infty} v_n y_n < \infty$ . Es läßt sich also zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$

so bestimmen, daß  $\sum_{n_0}^{\infty} v_n y_n < \frac{\varepsilon}{2}$  ist. Wegen der koordinatenweisen Konvergenz von  $\mathfrak{x}^{(p)}$  gegen  $\mathfrak{o}$  läßt sich ferner ein  $p_0(\varepsilon)$  so bestimmen, daß auch  $\sum_{n=1}^{n_0-1} v_n |x_n^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{2}$  für jedes  $p \geq p_0(\varepsilon)$ . Daraus ergibt sich für  $p \geq p_0$

$$\sup_{u \in U} |u \mathfrak{x}^{(p)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n |x_n^{(p)}| \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} v_n |x_n^{(p)}| + \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n y_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also die starke Konvergenz von  $\mathfrak{x}^{(p)}$  gegen  $\mathfrak{o}$ .

Vertauschung von  $\pi_r$  und  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  in dieser Überlegung führt zu

**Satz 2.** In  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ) ist jede konvergente Folge stark konvergent.

Aus K 1, § 1, Satz 3, ergibt sich sofort die

**Folgerung.** In allen  $\pi_r$  und  $\varrho_r$  gilt der Grenzstellensatz, d. h. jede beschränkte unendliche Teilmenge enthält eine konvergente Teilfolge.

Nach K. T. § 5, Satz 6, ist ferner eine Folge aus  $\pi_r$  oder  $\varrho_r$  dann und nur dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und koordinatenweise konvergiert.

**Satz 3.** Die Folge  $\mathfrak{x}^{(n)}$  aus  $\pi_{\infty}$  konvergiert dann und nur dann gegen  $\mathfrak{x}$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(n)}| = 0$  ist.

1. Ist  $\mathfrak{x}^{(n)}$  konvergent — es kann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{o}$  angenommen werden — so ist es zunächst eine beschränkte Folge. Nach § 1, Satz 2 <sub>$\pi$</sub> , kann man daher, falls  $\varepsilon > 0$  vorgegeben ist,  $n_0(\varepsilon)$  so bestimmen, daß  $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leq \varepsilon$  ist für alle  $p$  und  $n \geq n_0(\varepsilon)$ . Sodann folgt aus der Konvergenz von  $\mathfrak{x}^{(p)}$  die koordinatenweise Konvergenz; man kann also  $p_0$  so wählen, daß

$$\sqrt[1]{|x_1^{(p)}|}, \sqrt[2]{|x_2^{(p)}|}, \dots, \sqrt[n_0-1]{|x_{n_0-1}^{(p)}|} \leq \varepsilon \quad \text{für } p \geq p_0(\varepsilon).$$

Alsdann ist  $\sup_n \sqrt[n]{|x_{(n)}^{(p)}|} = |\mathfrak{x}^{(p)}| \leq \varepsilon$  für  $p \geq p_0(\varepsilon)$ .

2. Ist  $\lim_{p \rightarrow \infty} |\mathfrak{x}^{(p)}| = 0$ , so ist  $\mathfrak{x}^{(p)}$  koordinatenweise beschränkt. Ferner gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $p_0$ , so daß  $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leq \varepsilon$  für alle  $n$  und  $p \geq p_0$ . Aber für  $p = 1, \dots, p_0 - 1$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} = 0$  für

jedes einzelne  $p$ , da  $\mathfrak{x}^{(p)}$  in  $\pi_\infty$  liegt; also gibt es ein  $n_0(\varepsilon)$ , so daß  $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leq \varepsilon$  für  $n \geq n_0(\varepsilon)$  und alle  $p$ . Also ist  $\mathfrak{x}^{(p)}$  nach § 1, Satz 2 $_{\pi}$ , beschränkt. Da  $\mathfrak{x}^{(p)}$  überdies koordinatenweise konvergiert, ist sie nach der Bemerkung vor Satz 3 konvergent.

In allen anderen  $\pi_r$  und  $\varrho_r$  ist die Bedingung von Satz 3 offenbar hinreichend, aber nicht notwendig.

Zur (schwachen) Konvergenz im vollkommenen Raum  $\lambda$  gehört die Topologie, die durch die Umgebungen  $U_{u^{(1)}, \dots, u^{(n)}; \varepsilon}(\mathfrak{x}^{(0)})$  aller  $\mathfrak{x}$  mit

$$|u^{(1)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon, \dots, |u^{(n)}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon, u^{(i)} \in \lambda^*$$

gegeben wird. Entsprechend wird die starke Topologie durch die Umgebungen  $U_{V; \varepsilon}(\mathfrak{x}^{(0)})$  aller  $\mathfrak{x}$  mit  $\sup_{u \in V} |u(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon$ ,  $V$  eine beschränkte Menge aus  $\lambda^*$  gegeben (vgl. K. T. Anm. 11 und 15 und K. 1, § 5).

Zu diesen beiden Topologien gehören Häufungsstellenbegriffe, die wir als (schwache) Häufungsstelle und starke Häufungsstelle auseinanderhalten.

**Satz 4.** *In allen  $\pi_r$  und  $\varrho_r$  gibt es Mengen, die  $\mathfrak{o}$  zur Häufungsstelle haben, aber nicht zur Grenzstelle und nicht zur starken Häufungsstelle.*

1.  $X$  sei die Menge aller Stellen aus  $\pi_r$  mit  $[u \mathfrak{x}] = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \geq 1$ , wo  $u$  irgendeine gegebene Stelle aus  $\pi_r^*$  ist. Dann schließt man wie in K 1, § 5, daß  $\mathfrak{o}$  (schwache) Häufungsstelle von  $X$  ist. Da die normale Hülle der Stelle  $u$  (vgl. K. T. § 5, Satz 2) in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  eine beschränkte Menge ist, bilden alle  $\mathfrak{x}$  aus  $\pi_r$  mit  $[u \mathfrak{x}] < \varepsilon$  eine starke Umgebung von  $\mathfrak{o}$ . Sie enthält für  $\varepsilon < 1$  keine Stelle aus  $X$ , also ist  $\mathfrak{o}$  nicht starke Häufungsstelle von  $X$ .  $\mathfrak{o}$  ist aber auch nicht Grenzstelle, denn nach Satz 1 wäre sie dann starke Grenzstelle.

Dieselbe Überlegung gilt auch für die Menge  $U$  aller  $u$  aus  $\varrho_r$  mit  $[u \mathfrak{x}] \geq 1$ ,  $\mathfrak{x}$  irgendeine Stelle aus  $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$ .

**Satz 5<sub>a</sub>.** *In  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) ist jede starke Häufungsstelle Grenzstelle, also auch jede Grenzstelle von Grenzstellen.*

Sei  $X$  eine Menge aus  $\pi_r$ , die  $\mathfrak{o}$  zur starken Grenzstelle hat, und sei  $U(\delta)$  die Menge aller Stellen aus  $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$  mit

$$|u| \leq \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}, \quad \delta > 0,$$

so ist  $U(\delta)$  gemäß § 1, Satz 2<sub>o</sub>, beschränkt. Für jedes  $x$  aus  $X$ , für das  $\sup_{u \in U(\delta)} |ux| < 1$  ist, gilt  $|x| \leq \frac{1}{r} + \delta$ . Denn wäre  $|x| > \frac{1}{r} + \delta$ , so gäbe es ein  $\alpha$ , so daß  $\sqrt[\alpha]{|x_\alpha|} > \frac{1}{r} + \delta$  wäre; wäre dann  $u$  diejenige Stelle aus  $U(\delta)$ , bei der

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}$$

und die arcus der  $u_n$  denen der  $x_n$  entgegengesetzt sind, so wäre

$$ux \geq u_\alpha x_\alpha > \frac{\left(\frac{1}{r} + \delta\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{r} + \delta\right)^\alpha} = 1$$

im Widerspruch zu  $\sup_{u \in U(\delta)} |ux| < 1$ .

Sei jetzt  $U_n$  die Menge aller  $u$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$ , die aus  $U\left(\frac{1}{n}\right)$  und den endlich vielen Einheitstellen  $e_1, \dots, e_n$  besteht. Dann kann man, da  $U_n$  beschränkt ist, nach Voraussetzung in  $X$  ein  $x^{(n)}$  finden, für das  $\sup_{u \in U_n} |ux^{(n)}| < \frac{1}{n}$  ist. Es ist dann a fortiori  $\sup_{u \in U\left(\frac{1}{n}\right)} |ux^{(n)}| < 1$  also, wie bewiesen,  $|x^{(n)}| \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{n}$ , und außerdem ist  $|x_i^{(n)}| < \frac{1}{n}$  für  $i = 1, \dots, n$ , die Folge  $x^{(n)}$  also koordinatenweise konvergent. Nach § 1, Satz 2<sub>π</sub>, ist sie auch beschränkt, also konvergent gegen  $o$ , also ist  $o$  Grenzstelle von  $X$ .

**Satz 5<sub>b</sub>.** In  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ) gibt es Grenzstellen von Grenzstellen, die nicht selbst Grenzstellen sind, und daher Häufungsstellen, die zugleich starke Häufungsstellen sind, aber nicht Grenzstellen.

Sei nämlich

$$u^{(p,q)} = \frac{1}{(r+\delta)^p} e_p + \frac{1}{\left(r + \frac{1}{p}\right)^{p+q}} e_{p+q}$$

und sei  $U$  die Menge aller dieser  $u^{(p,q)}$ , so gilt:

$$1. \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r+\delta}\right)^p e_p = o,$$

denn für

$$u^{(p)} = \left(\frac{1}{r+\delta}\right)^p e_p$$

ist

$$\sqrt[p]{|u_p^{(p)}|} = \frac{1}{r + \delta}, \quad \sqrt[n]{|u_n^{(p)}|} = 0$$

sonst, also ist die Folge nach § 1, Satz 2<sub>e</sub> beschränkt und koordinatenweise gegen  $\mathfrak{o}$  konvergent.

2. Ist eine Teilfolge  $u^{(p_1, q_1)}, u^{(p_2, q_2)} \dots$  von  $U$  konvergent, so müssen die  $p_i$  beschränkt sein. Wäre nämlich  $p_i \rightarrow \infty$ , so wäre bei der Stelle  $u^{(p_i, q_i)}$

$$\sqrt[p_i + q_i]{|u_{p_i + q_i}^{(p_i, q_i)}|} = \frac{1}{r + \frac{1}{p_i}} \rightarrow \frac{1}{r}.$$

Es gäbe also kein solches  $\delta$ , wie es § 1, Satz 2<sub>e</sub> fordert.

3. Jede konvergente Teilfolge von  $U$  zerfällt also in höchstens endlich viele Unterfolgen mit festem  $p$ . Für jede derselben gilt aber gemäß Satz 2<sub>e</sub>  $\lim_{q \rightarrow \infty} u^{(p, q)} = u^{(p)}$ .

4. Daher kann  $\mathfrak{o}$  nicht Grenzstelle von  $U$  sein, sondern nur die Stellen  $u^{(p)} = \frac{1}{(r + \delta)^p} e_p$ . Diese ihrerseits haben nach 1.  $\mathfrak{o}$  zur Grenzstelle.  $\mathfrak{o}$  ist also Grenzstelle von Grenzstellen, aber nicht selbst Grenzstelle.

### § 3. Der Vitalische Satz

Das skalare Produkt  $u x$  gestattet eine einfache funktionentheoretische Deutung.

**Satz 1.** Ist  $x$  eine Stelle aus  $\pi_r$ ,  $u$  aus  $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$  ( $r \leq \infty$ ), so ist

$$u x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r-\varepsilon} x(t) u\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} \quad (1)$$

(ist  $r = \infty$ , so werde  $r - \varepsilon$  gleich  $R > 0$  gesetzt), wo

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^{n-1}, \quad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^{n-1}.$$

Ebenso ist für  $u$  aus  $\varrho_r$ ,  $x$  aus  $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$  ( $r \geq 0$ )

$$u x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r+\varepsilon} u(t) x\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}. \quad (1')$$

Die Integrale sind über die Kreise vom Radius  $r - \varepsilon$  bzw.  $r + \varepsilon$  um 0 zu erstrecken, die so zu bestimmen sind, daß auf ihnen die Reihen für  $u\left(\frac{1}{t}\right)$  bzw.  $u(t)$  noch absolut konvergieren.



Ist  $u$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$ , so hat  $u(t)$  einen Konvergenzradius  $\frac{1}{r - \delta}$ ,  $\delta > 0$ , also ist

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{1}{t^{n-1}}$$

außerhalb des Kreises vom Radius  $r - \delta$  konvergent.  $x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m t^{m-1}$  konvergiert im Kreis vom Radius  $r$ . Ist  $\varepsilon < \delta$ , so erhält man also auf dem Kreis vom Radius  $r - \varepsilon$  die Laurententwicklung von  $x(t) u\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t}$  durch gliedweises Ausmultiplizieren, der Koeffizient von  $\frac{1}{t}$  ist dann gerade  $u\mathfrak{x}$ . Ebenso beweist man (1'). Man kann es auch durch Übergang zur neuen Variablen  $\frac{1}{t}$  aus (1) für  $\frac{1}{r}$  statt  $r$  erhalten.

Damit ergibt sich leicht auch für die in den §§ 1 und 2 betrachteten Begriffe der Beschränktheit und Konvergenz, die aus der allgemeinen Theorie der linearen Räume stammen, ihre funktionentheoretische Deutung:

**Satz 2<sub>π</sub>.** Ist  $\mathfrak{x}^{(p)}$  eine konvergente Folge aus  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ), so ist die Funktionenfolge  $x^{(p)}(w)$  gleichmäßig konvergent in jedem Kreis  $|w| \leq s < r$  und umgekehrt.

1. Ist  $\lim_{p \rightarrow \infty} \mathfrak{x}^{(p)} = \mathfrak{x}$ , so ist  $\lim_{p \rightarrow \infty} u \mathfrak{x}^{(p)} = u \mathfrak{x}$  für jedes  $u$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$ , speziell für  $u = w_0 = \{1, w_0, w_0^2, \dots\}$  mit  $|w_0| < r$ . Daher ist  $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)}(w) = x(w)$  für jedes  $|w| < r$  und diese Konvergenz ist gleichmäßig für  $|w| \leq s < r$ , da alle die zugehörigen  $w$  eine beschränkte Menge in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  bilden, also nach § 2, Satz 1  $\sup_{|w| \leq s} |x^{(p)}(w) - x(w)|$  den Limes 0 hat.

2. Ist umgekehrt  $x^{(p)}(w)$  gleichmäßig gegen  $x(w)$  konvergent für jedes  $s < r$ ,  $|w| \leq s$ , und ist  $u$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$ , so wird nach (1)

$$\begin{aligned} |u(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{r-\varepsilon} |x^{(p)}(t) - x(t)| \left| u\left(\frac{1}{t}\right) \right| \frac{dt}{|t|} \\ &\leq K \text{Max} |x^{(p)}(t) - x(t)|. \end{aligned}$$

Wählt man  $s = r - \varepsilon$ , so erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $x^{(p)}(t)$  gegen  $x(t)$  auf dem Kreise vom Radius  $r - \varepsilon$  für  $p \geq p_0(\varepsilon)$

$$|u(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| < \varepsilon,$$

also  $\lim_{p \rightarrow \infty} u \mathfrak{x}^{(p)} = u \mathfrak{x}$  für alle  $u$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$ .

**Satz 2<sub>ρ</sub>.** Ist  $u^{(p)}$  eine konvergente Folge in  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ), so gibt es einen Kreis  $|z| \leq s$ ,  $s > r$ , in dem die Funktionenfolge  $u^{(p)}(z)$  gleichmäßig konvergiert und umgekehrt.

1. Ist  $u^{(p)}$  konvergent, so konvergiert es koordinatenweise gegen ein  $u$  aus  $\varrho_r$  und es gibt nach § 1, Satz 2<sub>ρ</sub>, ein  $\delta > 0$  und dazu ein  $n_0(\delta)$ , so daß

$$\sqrt[n]{|u_n^{(p)}|} \leq \frac{1}{r + \delta}$$

und

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq \frac{1}{r + \delta}$$

für  $n \geq n_0(\delta)$  und alle  $p$  ist. Also wird für  $|z| \leq s$ ,  $r < s < r + \delta$

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n^{(p)} z^{n-1} \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left( \frac{s}{r + \delta} \right) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

wenn nur  $m$  genügend groß ist.

Aus der koordinatenweisen Konvergenz von  $u^{(p)}$  gegen  $u$  folgt schließlich  $\left| \sum_{n=1}^m (u_n^{(p)} - u_n) z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$  für genügend großes  $p \geq p_0(\varepsilon)$ , insgesamt also  $|u^{(p)}(z) - u(z)| < \varepsilon$  für alle  $|z| \leq s$ .

2. Die Umkehrung beweist man wie oben mit Hilfe von (1') statt (1).

**Satz 3<sub>π</sub>.** Ist  $X$  eine beschränkte Menge in  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ), so ist die Menge der zu den  $x$  aus  $X$  gehörigen Funktionen  $x(w)$  gleichmäßig beschränkt in jedem Kreise  $|w| \leq s < r$ , und umgekehrt.

**Satz 3<sub>ρ</sub>.** Ist  $U$  eine beschränkte Menge in  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ), so ist die Menge der zu den  $x$  aus  $X$  gehörigen Funktionen  $u(z)$  gleichmäßig beschränkt in einem Kreise  $|z| \leq s$ ,  $s > r$ , und umgekehrt.

Die Beweise verlaufen analog.

**Satz 4.** (Der Vitalische Satz.)  $\lambda$  sei ein vollkommener Raum, in dem der Grenzstellensatz gilt,  $u^{(n)}$  sei eine Folge von Stellen aus  $\lambda^*$  von der Art, daß aus  $u^{(n)} x = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) folgt  $x = 0$ . Ist nun  $x^{(p)}$  eine beschränkte Folge von Stellen aus  $\lambda$ , für die  $\lim_{p \rightarrow \infty} u^{(n)} x^{(p)}$  für alle  $n$  existiert, so ist die Folge  $x^{(p)}$  konvergent.

Die Behauptung besagt, daß für jedes  $u$  aus  $\lambda^*$  der  $\lim_{p \rightarrow \infty} u x^{(p)}$  existiert. Gesetzt für irgendein  $u$  aus  $\lambda^*$  wäre dies nicht der Fall. Dann

hätten die Werte  $u \mathfrak{x}^{(p)}$ , die beschränkt sind, mindestens zwei Häufungsstellen  $a, b$ . Aus einer Teilfolge  $\mathfrak{x}^{(q)}$  der  $\mathfrak{x}^{(p)}$ , für die  $\lim_{q \rightarrow \infty} u \mathfrak{x}^{(q)} = a$  ist, kann man, da sie beschränkt ist, eine konvergente Teilfolge herausgreifen, gemäß dem Grenzstellensatz; sei  $\eta$  der Limes dieser konvergenten Teilfolge; ebenso kann man eine Teilfolge  $\mathfrak{x}^{(r)}$  der  $\mathfrak{x}^{(p)}$  finden, für die  $\lim_{r \rightarrow \infty} u \mathfrak{x}^{(r)} = b$  ist; sei  $\zeta$  ihr Limes. Dann wäre  $u(\eta - \zeta) = a - b \neq 0$ , aber  $u^{(n)}(\eta - \zeta) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), also nach Voraussetzung  $\eta = \zeta$ , was ein Widerspruch ist.

Der Satz erscheint hier als Verallgemeinerung des Satzes, daß in einem vollkommenen Raum, in dem der Grenzstellensatz gilt, eine beschränkte und koordinatenweise konvergente Folge konvergiert: an die Stelle der  $e_p$  sind hier die  $u^{(n)}$  getreten.

Wendet man ihn andererseits auf  $\pi_r$  an, so erhält man vermöge der Sätze  $2_\pi$  und  $3_\pi$  den „Vitalischen Satz“ der Funktionentheorie in dem Wortlaut:

*Ist die Funktionenfolge  $f_p(z)$  in  $|z| < R$  gleichmäßig beschränkt und konvergiert sie an unendlich vielen Stellen  $z_i$ , deren Limes  $z_0$  im Innern von  $|z| \leq R$  liegt, so ist die Folge in jedem Kreis  $|z| \leq r < R$  gleichmäßig konvergent.*

## § 4. Lineare Transformationen

Wird jedem  $\mathfrak{x}$  aus  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) eine komplexe Zahl  $u(\mathfrak{x})$  zugeordnet, so daß für beliebige  $\alpha, \beta$  stets

$$u(\alpha \mathfrak{x} + \beta \eta) = \alpha u(\mathfrak{x}) + \beta u(\eta)$$

gilt, und ist die so erklärte Linearfunktion überdies stetig, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{x}^{(n)}) ,$$

so ist damit ein lineares Funktional auf  $\pi_r$  erklärt. Nach K. T., § 3, Satz 6 wird jedes lineare Funktional durch eine Stelle  $u$  aus  $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$  erzeugt,  $u(\mathfrak{x}) = u \mathfrak{x}$ . Nach § 3, Satz 1 kann  $u(\mathfrak{x})$  auch als Integral in der Form (1) geschrieben werden. Entsprechendes gilt für stetige Linearfunktionen auf den  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ).

Nach K. T., § 8, wird entsprechend jede stetige lineare Abbildung  $v = A(u)$  von  $\varrho_r$  in  $\varrho_{r'}$  durch eine Matrix  $\mathfrak{A}$  vermittelt,  $v = \mathfrak{A}u$ . Ihre Transponierte  $\mathfrak{A}'$  bildet  $\pi_{\frac{1}{r'}}$  in  $\pi_{\frac{1}{r}}$  ab.  $\mathfrak{A}$  bildet nach K. T. § 8, Satz 3 jede beschränkte Menge aus  $\varrho_r$  in eine beschränkte Menge aus

$\varrho_{r'}$  ab. Ist also  $U(s)$  die Menge aller  $u$  mit  $|u_q| \leq \frac{1}{s^{q-1}}$ ,  $s > r$ , so gibt es nach § 1, Satz 2<sub>q</sub> eine Zahl  $N(s) > r'$ , so daß von einem gewissen  $p_0$  ab

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| \frac{1}{s^{q-1}} \leq \frac{1}{N(s)^{p-1}}$$

gilt, also ist die Potenzreihe

$$A(y, u) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y^{p-1} u^{q-1}$$

absolut konvergent in jedem Bereich

$$\mathfrak{B}(s) : |u| \leq \frac{1}{s} < \frac{1}{r}, \quad |y| < N(s), \quad N(s) > r'.$$

Ist umgekehrt  $\mathfrak{U}$  eine Matrix, zu der eine solche Potenzreihe gehört, und ist  $u$  in  $\varrho_r$ ,

$$\frac{1}{s} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|},$$

so ist  $|u_q| \leq C \frac{1}{s^{q-1}}$ , also  $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq} u_q|$  für jedes  $p$  konvergent, das Produkt  $v = \mathfrak{U} u$  kann also gebildet werden. Nach Voraussetzung ist ferner

$$v(z) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p z^{p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} u_q \right) z^{p-1}$$

für alle  $|z| < N(s)$  konvergent,  $v$  also eine Stelle aus  $\varrho_{r'}$ .  $\mathfrak{U}$  stellt also nach K. T. § 8, Satz 2 eine stetige lineare Abbildung von  $\varrho_r$  in  $\varrho_{r'}$  dar.

Durch Umordnen ergibt sich

$$v(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} z^{p-1} \right) u_q = \sum_{q=1}^{\infty} x_q u_q.$$

Die  $x_q$  sind die Koeffizienten der Funktion

$$x(w) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q w^{q-1} = \sum_{q=1}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} z^{p-1} w^{q-1} \right) = A(z, w)$$

aus  $\pi_{\frac{1}{r}}$ , wir erhalten also durch Anwendung von § 3, Satz 1

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r+\varepsilon} A\left(z, \frac{1}{t}\right) u(t) \frac{dt}{t},$$

wobei das  $\varepsilon$  noch von  $u(t)$  und  $z$  abhängig ist.

**Satz 1<sub>ρ</sub>.** Jede lineare stetige Abbildung  $v = A(u)$  von  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ) in  $\varrho_{r'}$  ( $r' \geq 0$ ) wird durch eine analytische Funktion zweier Variablen  $A(y, u)$  erzeugt, die eine Potenzreihenentwicklung

$$A(y, u) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y^{p-1} u^{q-1}$$

besitzt, die für jedes  $s > r$  in einem Bereich  $\mathfrak{B}(s) : |u| \leq \frac{1}{s}, |y| < N(s), N(s) > r'$ , absolut konvergiert. Es ist mit  $\mathfrak{A} = (a_{pq})$

$$v = \mathfrak{A}u \quad \text{oder} \quad v(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r+\epsilon} A\left(z, \frac{1}{t}\right) u(t) \frac{dt}{t}. \quad (2\rho)$$

Umgekehrt wird durch eine diese Bedingung erfüllende Matrix bzw. Funktion stets eine stetige lineare Abbildung von  $\varrho_r$  in  $\varrho_{r'}$  erzeugt.

Ist  $\eta = \mathfrak{B}\mathfrak{x}$  eine lineare Abbildung von  $\pi_r$  in  $\pi_{r'}$ , so führt  $\mathfrak{B}' \varrho_{\frac{1}{r'}}$  in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  über und umgekehrt. Also gilt für die entsprechende analytische Funktion

$$B(v, x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} v^{p-1} x^{q-1},$$

daß sie für jedes  $s < r'$  in einem Bereich

$$\mathfrak{C}(s) : |v| \leq s, |x| < \frac{1}{N(s)}, N(s) < r,$$

absolut konvergiert. § 3, Satz 1 ergibt den noch fehlenden Teil von

**Satz 1<sub>π</sub>.** Jede lineare stetige Abbildung  $\eta = B(\mathfrak{x})$  von  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) in  $\pi_{r'}$  ( $r' \leq \infty$ ) wird durch eine analytische Funktion zweier Variablen  $B(v, x)$  erzeugt, die eine Potenzreihenentwicklung

$$B(v, x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} v^{p-1} x^{q-1}$$

besitzt, die für jedes  $s < r'$  in einem Bereich  $\mathfrak{C}(s) : |v| \leq s, |x| < \frac{1}{N(s)}, N(s) < r$ , absolut konvergiert. Es ist

$$\eta = \mathfrak{B}\mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad y(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r-\epsilon} B\left(w, \frac{1}{t}\right) x(t) \frac{dt}{t}. \quad (2\pi)$$

Wie oben gilt die Umkehrung.

**Folgerung.** Mit  $\mathfrak{A} = (a_{pq})$  ist stets auch  $\tilde{\mathfrak{A}} = (|a_{pq}|)$  eine stetige lineare Abbildung von  $\varrho_r$  in  $\varrho_{r'}$  bzw.  $\pi_r$  in  $\pi_{r'}$ .

Die Abbildungen von  $\pi_\infty$  bzw. in  $\varrho_0$  lassen sich auch matrizenmäßig einfach charakterisieren.

**Satz 2.** Jede lineare stetige Abbildung von  $\varrho_r$  ( $r \geq 0$ ) in  $\varrho_0$  wird durch eine Matrix  $\mathfrak{A}$  erzeugt, für die

$$M_{\mathfrak{A}}(s) = \sup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n1}|s + |a_{n2}|s^2 + |a_{n3}|s^3 + \dots} \quad (3)$$

für jedes  $0 < s < \frac{1}{r}$  endlich ist und umgekehrt.

Jede lineare stetige Abbildung von  $\pi_\infty$  in  $\pi_r$  ( $r \leq \infty$ ) wird durch eine Matrix  $\mathfrak{B}$  erzeugt, für die

$$M_{\mathfrak{B}}(s) = \sup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_{1n}|s + |b_{2n}|s^2 + |b_{3n}|s^3 + \dots} \quad (3')$$

für jedes  $0 < s < r$  endlich ist und umgekehrt.

Es genügt, die erste Hälfte zu beweisen, die zweite ergibt sich daraus durch Übergang zur transponierten Matrix.

1. Die Notwendigkeit der Bedingung (3) folgt daraus, daß jede beschränkte Menge in  $\varrho_r$ , speziell also auch die Menge der  $u$  mit  $|u_a| \leq s^a$ ,  $s < \frac{1}{r}$ , in eine beschränkte Menge in  $\varrho_0$  übergeht.

2. Ist  $u$  eine Stelle aus  $\varrho_r$ , so gibt es ein  $C > 0$  und ein  $s < \frac{1}{r}$ , so daß  $|u_p| \leq C s^p$  ist. Da  $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{np}| s^p < \infty$  ist, existiert  $\mathfrak{A}u$ . Es ist ferner

$$|a_{n1}u_1| + |a_{n2}u_2| + \dots \leq C[|a_{n1}|s + |a_{n2}|s^2 + \dots] \leq C[M_{\mathfrak{A}}(s)]^n,$$

also liegt  $\mathfrak{A}u$  in  $\varrho_0$ . Zieht man K. T. § 8, Satz 2 heran, so folgt, daß (3) hinreichend ist.

## § 5. Die Mengen $W_a$

Hat  $a(w) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p w^{p-1}$  den Konvergenzradius  $r$ , so entsteht durch Multiplikation jeder Funktion  $x(w)$  aus  $\pi_r$  mit  $a(w)$  wieder eine Funktion  $a(w)x(w)$  aus  $\pi_r$ . Diese lineare Transformation von  $\pi_r$  in sich wird durch die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{bzw. die Funktion } A(v, x) = a(v) \frac{1}{1 - vx} \quad (4)$$

erzeugt.

Hat  $a(w)$  in  $|w| < r$  die  $\alpha_1$ -fache Nullstelle  $w_1$ , die  $\alpha_2$ -fache Nullstelle  $w_2$  usf., so bilden wir die Stellen:

$$\mathfrak{w}_i = \{1, w_i, w_i^2, w_i^3, \dots\}$$

$$\mathfrak{w}'_i = \{0, 1, 2w_i, 3w_i^2, \dots\}$$

.....

$$\mathfrak{w}_i^{(p)} = \{0, \dots, 0, p! \binom{p}{p}, p! \binom{p+1}{p} w_i, p! \binom{p+2}{p} w_i^2, \dots\}, \quad p = \alpha_i - 1.$$

Die Menge aller dieser Stellen aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  werde mit  $W_a$  bezeichnet. Jede Stelle aus  $W_a$  ist Lösung der Gleichung  $\mathfrak{A}' u = 0$ .

Wir bestimmen in  $\pi_r$  den Orthogonalraum zu  $W_a$ . Ist eine Stelle  $\mathfrak{x}$  aus  $\pi_r$  zu allen Stellen  $\mathfrak{w}_i, \mathfrak{w}'_i, \dots$  orthogonal, so ist

$$x_1 + x_2 w_i + x_3 w_i^2 + \dots = 0, \quad x_2 + 2x_3 w_i + 3x_3 w_i^2 + \dots = 0, \dots, \\ i = 1, 2, \dots,$$

d. h.  $x(w) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p w^{p-1}$  ist eine Funktion, die alle Nullstellen von  $a(w)$  in mindestens derselben Vielfachheit enthält, also durch  $a(w)$  teilbar, also eine Stelle aus  $\mu = \mathfrak{A}(\pi_r)$ . Der Orthogonalraum zu  $W_a$  ist daher  $\mu = \mathfrak{A}(\pi_r)$ . Andererseits ist der Lösungsraum  $\tilde{\eta}$  von  $\mathfrak{A}' u = 0$  gleich dem Orthogonalraum  $\bar{\mu}$  (vgl. etwa die Einleitung von K), also gleich der orthogonalabgeschlossenen Hülle  $\overline{W_a}$  von  $W_a$ . Nach dem Orthogonalraumsatz (vgl. K 1, § 6, Satz 2) ist also  $\tilde{\eta}$  gleich der vollabgeschlossenen linearen Hülle von  $W_a$ , d. h.  $\tilde{\eta}$  besteht aus den endlichen linearen Verbindungen der  $\mathfrak{w}_i, \mathfrak{w}'_i, \dots$  und deren Häufungsstellen.

**Satz 1.** *Ist  $a(w)$  in  $\pi_r, \mathfrak{A}$  die zugehörige Matrix, so ist der Bildraum  $\mathfrak{A}(\pi_r)$  der Raum derjenigen Stellen aus  $\pi_r$ , deren zugehörige Funktionen durch  $a(w)$  teilbar sind. Der Raum  $\tilde{\eta}$  der Lösungen von  $\mathfrak{A}' u = 0$  in  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  ist die vollabgeschlossene lineare Hülle der Menge  $W_a$ .*

Bisher sind wir von  $a(z)$  ausgegangen und haben seine Nullstellen  $w_i$  und die zugehörige Menge  $W_a$  behandelt. Wir wollen jetzt umgekehrt von einer solchen Menge  $W$  ausgehen.

Sei  $R_r$  ( $r \leq \infty$ ) die Menge sämtlicher Stellen  $w = \{1, w, w^2, \dots\}$ ,  $w' = \{0, 1, 2w, \dots\}, \dots$ , die sich ergeben, wenn  $w$  alle komplexen Zahlen  $|w| < r$  durchläuft (auch  $w = 0$ ). Mit  $R_r^{(l)}$  bezeichnen wir die aus den finiten linearen Verbindungen der Stellen aus  $R_r$  bestehende lineare Hülle von  $R_r$ .

Wir überlegen, welche Funktionen aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  zu den Stellen der Menge  $R_r^{(l)}$  gehören. Zu  $w$  gehört die Funktion  $\frac{1}{1-wz}$ , zu  $w'$  ihre Ableitung  $\frac{1}{(1-wz)^2}$  usf., zu  $w^{(v-1)}$  die Funktion  $\frac{1}{(1-wz)^v}$  bis auf konstante Faktoren. Zu jeder linearen Verbindung davon gehört eine rationale Funktion, die für  $|z| \leq \frac{1}{r}$  regulär ist. Umgekehrt lehrt der Satz von der Partialbruchzerlegung, daß jede rationale Funktion, die für  $|z| \leq \frac{1}{r}$  regulär ist, auf diese Weise darstellbar ist, also:

*Zu  $R_r^{(l)}$  gehört die Menge aller rationalen Funktionen, die für  $|z| \leq \frac{1}{r}$  regulär sind.*

Die Nullstellen  $w_i$  einer Funktion  $a(z)$  aus  $\pi_r$  häufen sich nicht in  $|w| < r$ . Sei allgemein  $w_1, w_2, \dots$  eine Folge komplexer Zahlen, die sich nicht in  $|w| < r$  häufen, und sei zu jeder eine Vielfachheit  $\alpha_i$  gegeben, so sei  $W$  die Menge der Stellen  $w_i, w'_i, \dots, w_i^{(\alpha_i-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .  $W^{(l)}$  ihre lineare Hülle. Dann gilt

**Satz 2.**  $W^{(l)}$  ist vollabgeschlossen.

**Folgerung.** In Verschärfung von Satz 1 gilt:  $\tilde{\eta} = W_a^{(l)}$ .

Sei  $a(z) = \sum_p a_p z^{p-1}$  gemäß Weierstraß eine Funktion aus  $\pi_r$ , die die  $w_i$  in der vorgegebenen Vielfachheit  $\alpha_i$  zu Nullstellen hat und sonst keine Nullstellen. Wir haben dann zu zeigen, daß der Raum  $\tilde{\eta}$  der Lösungen von  $\mathfrak{A}'u = 0$  gleich  $W_a^{(l)}$  ist. Ist  $u$  eine Lösung, so ist

$$\begin{aligned} u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \dots &= 0 \\ u_2 a_1 + u_3 a_2 + \dots &= 0 \\ u_3 a_1 + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

Dann bilde man

$$\varphi(z) = u_1 + u_2 \frac{1}{z} + u_3 \frac{1}{z^2} + \dots \quad (5)$$



Diese Reihe konvergiert für  $\left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{r - \varepsilon}$ , also  $|z| > r - \varepsilon$ . Das Produkt  $a(z) \varphi(z)$  kann daher für  $r - \varepsilon < |z| \leq r$  als Doppelreihe, die absolut konvergiert, umgeordnet werden, es wird

$$a(z) \varphi(z) = z(a_2 u_1 + a_3 u_2 + \dots) + z^2(a_3 u_1 + a_4 u_2 + \dots) + \dots,$$

die übrigen Glieder fallen gemäß Voraussetzung weg. Die Reihe rechts, eine Potenzreihe, konvergiert für  $r - \varepsilon < |z| \leq r$  also für  $|z| \leq r$ , stellt also eine Funktion  $b(z)$  aus  $\pi_r$  dar. Daher ist  $\varphi(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$  eine in  $|z| \leq r$  bis auf die Nullstellen von  $a(z)$  reguläre Funktion. Außerdem ist sie, wie aus (5) hervorgeht, für  $|z| > r - \varepsilon$  in  $\infty$  regulär. Sie ist daher eine rationale Funktion. Also ist auch  $\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = u_1 + u_2 z + u_3 z^2 + \dots$  rational und für  $|z| \leq \frac{1}{r}$  regulär, also ist  $u$  eine lineare Verbindung solcher  $w, w', \dots$ , die zu den Nullstellen von  $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ , die Pole von  $a(z)$  sind, gehören, d. h.  $u$  liegt in  $W^{(l)}$ .<sup>5)</sup>

Die zur Abbildung (4) transponierte Abbildung  $\mathfrak{U}'$  führt die Stelle  $w$  aus  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  in die Stelle  $a(w)w$  über. Bezeichnen wir die Menge aller Vielfachen der Stellen aus  $R_r$  mit  $cR_r$ , so ist also  $\mathfrak{U}'$  eine Abbildung von  $cR_r$  in sich. Wir wollen alle diese Abbildungen  $\mathfrak{B}$  bestimmen.

Da wir sie nur unter den Abbildungen von  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  in sich suchen, muß zuerst jede Zeile von  $\mathfrak{B}$  in  $\pi_r$  liegen. Sei  $\sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} w^{q-1} = b_p(w)$ , so sind also alle  $b_p(w)$  in  $\pi_r$ . Soll  $\mathfrak{B}$  jede Stelle  $w$  aus  $R_r$  in eine Stelle  $cv = \{c, cv, cv^2, \dots\}$  mit  $|v| < r$  überführen, so muß  $b_p(w) = cv^{p-1}$  sein:

$$b_1(w) = c, \quad b_2(w) = cv, \quad b_3(w) = cv^2, \dots$$

und daher identisch in  $w$ :

$$b_2^2(w) = b_1(w) b_3(w), \quad b_2^3(w) = b_1^2(w) b_4(w), \quad b_2^4(w) = b_1^3(w) b_5(w), \dots$$

---

<sup>5)</sup> Da nach § 4, Satz 5 der in Anm. 3 zitierten Arbeit bereits jeder nur in bezug auf die Limesbildung abgeschlossene lineare Teilraum von  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  orthogonal abgeschlossen ist,

genügt es zum Beweis von Satz 2, die Abgeschlossenheit von  $W^{(l)}$  zu zeigen, was wesentlich einfacher und ohne Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel möglich ist (vgl. § 7 der angegebenen Arbeit). Die Folgerung von Satz 2 haben bereits *F. Schürer* (Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Leipzig 70 (1918), S. 185—240) und *O. Perron* (Math. Ann. 84 (1921), S. 1—15, Satz 1) bewiesen durch Zurückführung auf einen Satz über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ist  $w_i$  irgendeine  $a$ -fache Nullstelle von  $b_1(w)$ , so muß sie also auch Nullstelle von  $b_2(w)$  sein, und wenn sie eine  $b$ -fache Nullstelle von  $b_2(w)$  ist, muß

$$a \leq 2b, \quad 2a \leq 3b, \quad 3a \leq 4b, \dots$$

sein, d. h. der Reihe nach

$$a \leq 2b, \quad a \leq \frac{3}{2}b, \quad a \leq \frac{4}{3}b, \dots$$

Da  $a, b$  ganze Zahlen sind, folgt  $a \leq b$ .  $b_1(w)$  muß also in  $\pi_r$  ein Teiler von  $b_2(w)$  sein,  $b_2(w) = b_1(w)c(w)$ , wo auch  $c(w)$  eine Funktion aus  $\pi_r$  ist, und es ist  $b_p(w) = b_1(w)[c(w)]^{p-1}$ . Setzen wir also bequemer  $b_1(w) = a(w)$ , so haben wir

$$b_1(w) = a(w), \quad b_2(w) = a(w)c(w), \quad b_3(w) = a(w)[c(w)]^2, \dots$$

Dabei muß  $|c(w)| < r$  sein für  $|w| < r$ .

Die zugehörige Funktion ist  $B(z, w) =$

$$\sum \sum b_{pq} z^{p-1} w^{q-1} = a(w) + za(w)c(w) + z^2 a(w)[c(w)]^2 + \dots$$

Die zugehörige Matrix  $\mathfrak{B}$  hat offenbar die Form

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdot \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdot \\ 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathfrak{C}' \mathfrak{A}' . \quad (6)$$

$\mathfrak{A}'$  ist Transponierte zu (4),  $\mathfrak{C}$  ist eine Matrix, in deren Spalten die Koeffizienten der Potenzen von  $c(w)$  stehen.  $\eta = \mathfrak{C}x$  bedeutet in  $\pi_r$  den Übergang von  $x(w)$  zur Funktion  $x(c(w))$ , die wegen  $|c(w)| < r$  für  $|w| < r$  in  $\pi_r$  liegt.  $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$  bedeutet also die lineare Abbildung  $x(w) \rightarrow a(w)x(c(w))$  von  $\pi_r$  in sich, also führt auch jede Matrix  $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\varrho_{\frac{1}{r}}$  in sich über, speziell  $cR_r$  in sich.

**Satz 3.** Die Transformationen von  $\varrho_{\frac{1}{r}}$  in sich, die  $cR_r$  in sich überführen, haben die Gestalt (6), wo  $a(w) = \sum a_p w^{p-1}$  und  $c(w) = \sum c_p w^{p-1}$  in  $\pi_r$  liegen, außerdem  $|c(w)| < r$  für  $|w| < r$  ist.

(Eingegangen den 3. Oktober 1948)