Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos.

Autor: Borel, A. / Siebenthal, J . De

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19760

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos *)

Par A. Borel, Zurich, et J. De Siebenthal, Lausanne

Dans un groupe de Lie compact G, tout sous-groupe abélien maximum est clos, puisqu'il est fermé, et de plus connexe[1]; c'est donc un produit direct de l groupes clos à un paramètre[2]), appelé toroïde à l dimensions; l ne dépend que de G et non du sous-groupe abélien considéré et définit le *rang* de G (au point de vue global).

L'objet de ce travail est l'étude des sous-groupes fermés (donc de Lie) connexes d'un group de Lie clos possédant le même rang que le groupe, ou, si l'on veut, ayant avec le groupe un toroïde maximum commun. Ils sont complètement caractérisés par le théorème suivant, démontré au N° 6:

Soient G' un sous-groupe fermé connexe de rang maximum d'un groupe de Lie clos G et Z' le centre de G'; alors, G' est la composante connexe du normalisateur dans G de Z'.

Par normalisateur dans G d'un sous-groupe Z', nous entendons ici, selon l'usage habituel, l'ensemble des éléments x de G pour lesquels:

$$x^{-1} Z' x \subset Z'$$

c'est un sous-groupe fermé de G, de rang maximum si Z' est abélien.

On peut aussi dire qu'un sous-groupe connexe de rang maximum est entièrement défini par son centre.

Cette étude se fera à l'aide du diagramme ou, ce qui revient au même, des vecteurs racines de G, dont nous rappelons les définitions et principales propriétés au N° 1. Leur emploi mène rapidement au but ici grâce au fait que les vecteurs racines d'un sous-groupe de même rang sont

---

*) Un résumé de cet article a paru dans les Comptes Rendus, t. **226** (1948) p. 1662/4.

[1]) *H. Hopf*, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen, Comm. Math. Helv. **13** (1940—41), p. 119—143, N° 23.

[2]) *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs, Mémorial Sc. Math. **XLII**, Paris 1930, N° 42.

aussi vecteurs racines du groupe (Théorème 2), ce qui n'est en général pas vrai pour les sous-groupes de rangs inférieurs à celui du groupe. Cette proposition nous conduit à chercher un critère pour qu'un système de vecteurs racines pris parmi ceux de G corresponde à un sous-groupe fermé. Nous donnons à cet effet au N° 4 une condition nécessaire (Théorème 3) d'où nous déduisons une borne supérieure pour le nombre des paramètres d'un sous-groupe de même rang. Ensuite, une propriété des vecteurs racines démontrée au N° 2, jointe au théorème 3, nous permet d'obtenir au N° 5 une condition nécessaire et suffisante, qui équivaut à l'énoncé donné plus haut. Enfin, le N° 7 est consacré à la détermination explicite des plus grands sous-groupes de même rang des groupes simples clos.

En nous proposant l'examen des sous-groupes *fermés*, nous nous plaçons automatiquement à un point de vue global, et effectivement nous considérons dans ce travail toujours les groupes „en grand" ; mais il est à remarquer que l'on pourrait traiter le problème par la méthode infinitésimale car *tout sous-groupe de Lie local d'un groupe clos G qui est de rang maximum, c'est-à-dire contient un noyau de sous-groupe abélien maximum dans G, est le noyau d'un sous-groupe en grand fermé dans G.* Nous reviendrons sur ce point au N° 8.

Dans ce mémoire, nous nous occupons exclusivement des sous-groupes de même rang que le groupe, nous réservant pour plus tard l'étude des sous-groupes de rang quelconque. Mentionnons cependant que les considérations du N° 4 s'étendent avec peu de modifications au cas général, ce qui n'est pas le cas pour le N° 5.

Il nous est agréable de remercier ici MM. H. Hopf et E. Stiefel de leurs conseils. C'est directement à l'instigation de ce dernier que l'un de nous (A. Borel) s'est occupé de la question traitée ici, à l'étude de laquelle J. de Siebenthal a été amené par l'examen de problèmes topologiques proposés par M. Hopf.

1. Dans la suite G désignera toujours, même si nous ne le mentionnons pas expressément, un groupe de Lie compact connexe et G' un sous-groupe fermé connexe de rang maximum de G.

Soit T^l un toroïde maximum de G. On peut toujours rapporter un entourage $U(e)$ de l'élément neutre à des coordonnées orthogonales canoniques $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (de première espèce) dans lesquelles[3]) :

[3]) Pour les théorèmes de ce paragraphe, voir *E. Stiefel*, Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und ..., Comm. Math. Helv. **14**, 1941/42, p. 350—379.

a) le groupe adjoint linéaire de G est orthogonal.

b) $x_1, \ldots, x_l$ sont les coordonnées de $T^l \cap U(e)$; la multiplication dans T^l est représentée par l'addition des coordonnées et l'image de T^l dans le groupe adjoint linéaire de G est formée par des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} E_l & & & & 0 \\ & D_1(x) & & & \\ & 0 & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & D_m(x) \end{pmatrix} \qquad D_i(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\vartheta_i(x) & -\sin 2\pi\vartheta_i(x) \\ \sin 2\pi\vartheta_i(x) & \cos 2\pi\vartheta_i(x) \end{pmatrix}$$

$\pm\vartheta_1(x), \pm\vartheta_2(x), \ldots, \pm\vartheta_m(x)$ étant des formes linéaires en $x_1, \ldots, x_l$; ce sont les *paramètres angulaires* de G ; deux paramètres ϑ_i, ϑ_j quelconques sont linéairement indépendants.

Prenons $x_1, \ldots, x_l$ comme coordonnées dans un espace R^l à l dimensions ; l'addition vectorielle fait de R^l le groupe de recouvrement universel simplement connexe de T^l ; réciproquement, on obtiendra T^l à partir de R^l en identifiant entre eux les points équivalents par rapport à un réseau à l dimensions, le réseau unité, qui est le noyau de l'homomorphisme de R^l sur T^l. Cette correspondance entre R^l et T^l permet de considérer un système $(x_1, \ldots, x_l)$ comme caractérisant indifféremment un point de R^l ou un élément de T^l, ce dont nous ferons constamment usage. Les plans à $l-1$ dimensions :

$$\vartheta_i(x) \equiv 0 \text{ (modulo 1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

définissent dans R^l le *diagramme de G* que nous noterons $D(G)$. Ces plans contiennent les *éléments singuliers* de T^l[4]), c'est-à-dire ceux dont le normalisateur dans G est plus grand que T^l ; si un point se trouve sur k plans, son normalisateur connexe possède $l + 2k$ paramètres.

Nous considérerons R^l comme un espace euclidien, avec la métrique $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_l^2$; les symétries aux plans du diagramme laissent ce dernier et le réseau des points équivalents à l'élément neutre invariants. En tant que transformations de T^l, elles sont fournies par des automorphismes intérieurs de G laissant T^l invariant. Les transformations de T^l obtenues à l'aide de ces automorphismes constituent un groupe qui est isomorphe (holoédrique) au groupe Ψ engendré par les symétries aux plans du diagramme contenant l'origine. Ψ est un groupe fini.

---

[4]) Les formes $\pm 2\pi\sqrt{-1}\vartheta_i$ sont les racines de G, au sens de la théorie infinitésimale ; les éléments singuliers du texte et contenus dans $T^l \cap U(e)$ sont portés par les groupes à un paramètre qu'engendrent les transformations infinitésimales de T^l dont le polynôme caractéristique admet la racine zéro avec une multiplicité plus grande que l.

On peut aussi caractériser le diagramme par un système de $2m$ vecteurs racines $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_m$ introduits par *H. Weyl.* $\vec{\vartheta}_i$ est le vecteur contravariant dont les composantes covariantes sont les coefficients du paramètre angulaire $-\vartheta_i$; $\vec{\vartheta}_i$ est donc perpendiculaire au plan $\vartheta_i = 0$. Ces vecteurs vérifient les conditions[5]) :

(1) $2\dfrac{(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_j)}{(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_i)}$ est un nombre entier ($(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_j)$ est le produit scalaire ordinaire).

(2) Si $2\dfrac{(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_j)}{(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_i)} = k$, $\vec{\vartheta}_j - \varepsilon\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_j - 2\varepsilon\vec{\vartheta}_i, \ldots, \vec{\vartheta}_j - k\vec{\vartheta}_i$, ($\varepsilon =$ signe de k) sont aussi des vecteurs racines.

(2) est du reste une conséquence de (1) et du fait que les vecteurs racines sont deux à deux opposés.

Toutes ces propriétés sont en général énoncées pour les groupes compacts semi-simples, mais elles s'étendent d'elles-mêmes aux groupes clos quelconques, qui sont toujours localement isomorphes au produit direct d'un groupe semi-simple et d'un groupe commutatif indiquant la présence d'un centre continu ; si celui-ci est à s paramètres, les plans $\vartheta_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$ se couperont suivant un espace R^s à s dimensions ; les vecteurs racines sous-tendent l'espace R^{l-s} complémentaire de R^s, et réciproquement. R^{l-s} recouvre le toroïde maximum de la composante semi-simple ; si cette dernière n'est pas simple, elle est (au moins localement) produit direct de k groupes simples et les vecteurs racines se répartissent en k systèmes de vecteurs, mutuellement orthogonaux, correspondant aux différents groupes simples, et réciproquement.

Si le centre continu de G a s paramètres, le domaine fondamental de Ψ est limité par $l - s$ plans, disons $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0, \ldots, \vartheta_{l-s} = 0$; tous les autres paramètres angulaires sont combinaisons linéaires à coefficients *entiers* de $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{l-s}$, qui sont dits pour cela former un système de *paramètres fondamentaux* ; en multipliant éventuellement certains paramètres par (-1), on peut faire en sorte que tous les coefficients soient positifs ou nuls, le domaine fondamental de Ψ étant alors donné par les relations $\vartheta_i(x) \geq 0$, $i = 1, \ldots, l - s$.

---

[5]) Voir *B. L. van der Waerden*, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeitschr. **37**, 1933, pp. 448; aussi *E. Stiefel*, l. c. note 3, p. 378; les vecteurs définis par M. Stiefel ne sont pas exactement les vecteurs racines, mais ont les longueurs inversément proportionnelles.

Rappelons encore que, d'après un théorème de *E. Cartan*[6]) tout élément de G a au moins un conjugué par un automorphisme intérieur dans tout domaine fondamental du groupe engendré par les symétries à tous les plans du diagramme. Ce domaine est un simplexe[6]) si le groupe est simple, un produit topologique de simplexes et d'un espace R^s dans le cas général. L'angle de deux faces est toujours de la forme π/k, k entier, ce qui permet de représenter ce polyèdre par un graphe très simple, dû à Schläfli, que nous utiliserons au N° 7.

Si G est simple, on obtiendra les points du simplexe en ajoutant au système $\vartheta_i(x) \geq 0$, $i = 1, \ldots, l$ une équation $\vartheta(x) \leq 1$ où $\vartheta = c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 + \cdots + c_l \vartheta_l$ est le *paramètre dominant*, ainsi nommé parce que c_i est le plus grand coefficient de ϑ_i qui intervienne dans les expressions des paramètres angulaires en fonction de $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_l$.

2. Une propriété des vecteurs racines

Théorème 1. *Soient G un groupe compact et $\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_1, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ $h+1$ vecteurs racines de G tels que :*

(a) $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ *soient indépendants.*

(b) $\vec{\vartheta} = a_1 \vec{\vartheta}_1 + \cdots + a_p \vec{\vartheta}_p - a_{p+1} \vec{\vartheta}_{p+1} - \cdots - a_h \vec{\vartheta}_h$, *les a_i étant positifs.*

Alors, il existe au moins un indice k tel que, ou bien $\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_k$, si $k \leq p$, ou bien $\vec{\vartheta} + \vec{\vartheta}_k$ si $k > p$ soit un vecteur racine de G.

Prenons les vecteurs $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ comme base de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ; les composantes contravariantes de $\vec{\vartheta}$ dans ce système sont $a_1, \ldots, a_p$, $-a_{p+1}, \ldots, -a_h$.

Supposons que l'indice k de l'énoncé n'existe pas ; alors, $\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_i$ n'étant pas un vecteur racine pour $i = 1, \ldots, p$, l'entier $2 \dfrac{(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_i)}{(\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_i)}$ est négatif ou nul, d'après la propriété (2) des vecteurs du diagramme ; de même, $\vec{\vartheta} + \vec{\vartheta}_j$ n'étant pas un vecteur racine, pour $j = p+1, \ldots, h$, $2 \dfrac{(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_j)}{(\vec{\vartheta}_j, \vec{\vartheta}_j)}$ est positif ou nul ; on a donc $(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_i) \leq 0$, $i = 1, \ldots, p$ et

[6]) *E. Cartan*, La géométrie des groupes simples, Annali di Matematica t. **4**, 1927, pp. 211, spéc. Chap. I et t. **5**, 1928, pp. 253, où l'on trouve du reste une grande partie des notions et théorèmes indiqués dans le N° 1, mais introduits à l'aide de la théorie infinitésimale.

$(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}_j) \geq 0$, $j = p + 1, \ldots, h$. En résumé, le produit d'une composante contravariante c^i de ϑ par la composante covariante c_i de même indice est négatif ou nul, $i = 1, \ldots, h$. Il en résulte que :

$$(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}) = c_1 c^1 + c_2 c^2 + \cdots + c_h c^h \leq 0$$

ce qui est impossible. L'existence de l'indice k étant assurée, la proposition est établie.

Corollaire. *Si $a_1, a_2, \ldots, a_h$ sont entiers, il existe un vecteur $\vec{\vartheta}_i$ choisi parmi $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ tel qu'on puisse relier $\vec{\vartheta}$ à $\vec{\vartheta}_i$ par une suite finie $\vec{\vartheta}_i, \vec{\vartheta}_i \pm \vec{\vartheta}_k, \ldots, \vec{\vartheta}$ de vecteurs racines, le j-ème se déduisant du $(j-1)$-ème par addition de l'un des vecteurs $\pm \vec{\vartheta}_1, \pm \vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm \vec{\vartheta}_m$.*

Pour obtenir ce corollaire, il suffira d'appliquer à plusieurs reprises le théorème 1, en observant qu'après chaque pas, la somme des valeurs absolues des composantes du vecteur obtenu est plus petite d'une unité que pour le vecteur précédent.

3. Précisons tout d'abord que par recherche des sous-groupes, nous entendons plutôt recherche des *structures* de sous-groupes, sans distinguer entre groupes localement isomorphes ; par exemple, „G contient G'" signifiera simplement qu'un groupe localement isomorphe à G', mais pas forcément G' lui-même, se trouve dans G.

Des groupes clos localement isomorphes admettent un recouvrement *fini* commun, produit direct de groupes simples clos[7] ; de là on déduit aisément que la propriété de contenir un sous-groupe G' fermé, au sens donné ci-dessus à cette expression, est commune à tous les éléments d'une famille de groupes clos localement isomorphes, et il suffira d'étudier un représentant de la famille. On peut même, si l'on veut, se borner aux groupes simples en vertu du théorème :

Un sous-groupe G' fermé de rang maximum d'un produit direct $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ de groupes clos est isomorphe à un produit direct $G'_1 \times G'_2 \times \cdots \times G'_k$, où G'_i est un sous-groupe fermé de même rang de G_i, $(i = 1, \ldots, k)$.

Démonstration. Un toroïde maximum T^l de G' est aussi maximum dans G, c'est donc un produit direct $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_k$, T_i maximum

[7]) Voir par exemple *E. Cartan*, l. c. note 2, N° 52.

dans G_i. Tous les $a_i \in G_i$ qui figurent dans les expressions $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$ des éléments a de G' forment un sous-groupe G'_i de G_i, de même rang que G_i, car il contient T_i. G' sera isomorphe au produit direct des G'_i s'il renferme, avec $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$ tous les éléments $\bar{a}_i = (e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_k)$, $i = 1, \ldots, k$, où e_j désigne l'unité de G_j, ce que nous allons justement montrer.

Selon un théorème rappelé au N° 1, a est conjugué à au moins un élément de T^l; soit $b = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_k)$ dans G' tel que :

$$b^{-1} a b = (t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_k) \in T^l$$

en particulier

$$b_i^{-1} a_i b_i = t_i \in T_i$$

mais G' contient $\bar{t}_i = (e_1, \ldots, e_{i-1}, t_i, e_{i+1}, \ldots, e_k)$, donc aussi $b \bar{t}_i b^{-1}$, qui est précisément $\bar{a}_i$.

Ce théorème montre en particulier qu'un sous-groupe maximum de rang maximum, c'est-à-dire non contenu dans un sous-groupe différent du groupe total, d'un produit direct $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ est de la forme

$$G_1 \times \cdots \times G_{1-1} \times G'_i \times G_{i+1} \times \cdots \times G_k$$

G'_i maximum dans G_i.

La possibilité d'utiliser le diagramme ou les vecteurs racines pour l'étude des sous-groupes de même rang résulte du

Théorème 2. *Soient G un group compact, d'ordre $n = l + 2m$, G' un sous-groupe connexe fermé de rang maximum, à $n' = l + 2m'$ paramètres. Le diagramme de G' est formé de m' familles complètes de plans parallèles du diagramme $D(G)$; autrement dit, les vecteurs racines de G' sont des vecteurs racines de G.*

Soit T^l un toroïde maximum de G'. Prenons dans un entourage $U(e)$ de l'unité dans G un système de coordonnées canoniques rendant le groupe adjoint linéaire orthogonal. $U(e) \frown T^l$ et $U(e) \frown G'$ sont des portions de plans ; à l'aide d'un changement de coordonnées orthogonal, on peut faire en sorte que ces plans aient les équations :

$$x_{l+1} = x_{l+2} = \cdots = x_n = 0 \ ,$$

$$x_{n'+1} = x_{n'+2} = \cdots = x_n = 0 \ .$$

A un élément x de G' correspond dans le groupe adjoint de G une matrice (orthogonale) du type :

$$S(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) & 0 \\ 0 & S_2(x) \end{pmatrix}$$

les matrices $S_1(x)$, de degré n', forment le groupe adjoint linéaire de G'. Si $x \in T^l$, on aura

$$S(x) = \begin{pmatrix} E_l & & & 0 \\ & S_1'(x) & & \\ & 0 & & \\ & & & S_2(x) \end{pmatrix}$$

les matrices $S_1'(x)$, $x \in T^l$, constituent un groupe abélien orthogonal ; un changement de coordonnées orthogonal portant sur $x_{l+1}, \ldots, x_{n'}$ permettra de les mettre simultanément sous la forme

$$\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{m'} \end{pmatrix} \qquad D_i = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\,\vartheta_i(x) & -\sin 2\pi\,\vartheta_i(x) \\ \sin 2\pi\,\vartheta_i(x) & \cos 2\pi\,\vartheta_i(x) \end{pmatrix}$$

de même, les matrices $S_2(x)$ pourront être réduites à la forme

$$\begin{pmatrix} D_{m'+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix} \qquad D_{m'+i} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\,\vartheta_{m'+i}(x) & -\sin 2\pi\,\vartheta_{m'+i}(x) \\ \sin 2\pi\,\vartheta_{m'+i}(x) & \cos 2\pi\,\vartheta_{m'+i}(x) \end{pmatrix}$$

Par définition (cf. N° 1), les plans $\vartheta_i(x) \equiv 0(1)$, $i = 1, 2, \ldots, m'$ forment $D(G')$ et, puisque T^l est aussi maximum dans G, les plans $\vartheta_j(x) \equiv 0(1)$, $j = 1, \ldots, m$, donnent $D(G)$, ce qui démontre le théorème.

Remarquons que l'essentiel du théorème précédent est le mot *complète* de la conclusion ; en effet, un élément singulier de G' étant évidemment singulier dans G, il est clair que $D(G')$ fera toujours partie de $D(G)$, mais il importait de voir que $D(G')$ ne peut contenir un plan sans comprendre tous les plans de $D(G)$ qui lui sont parallèles, ou si l'on veut, qu'un vecteur racine de G' n'est jamais un multiple (différent de ± 1) d'un vecteur de G.

La réciproque du théorème 2 est fausse ; il se peut très bien que $D(G)$ possède un sous-diagramme D' auquel ne corresponde aucun sous-groupe, comme nous le verrons bientôt. Notre tâche est précisément de savoir quand une inclusion de diagrammes permet de conclure à une inclusion de groupes.

4. Une condition nécessaire pour qu'un sous-diagramme indique un sous-groupe

Soit G', à $l + 2m'$ paramètres, un sous-groupe fermé de rang maximum de G. Nous reprenons les coordonnées et notations du théorème 2 ; G' est donc représenté dans le groupe adjoint linéaire de G par des matrices :

$$\begin{pmatrix} S_1(x) & 0 \\ 0 & S_2(x) \end{pmatrix}$$

les matrices $S_2(x)$ définissent un groupe homomorphe à G'. Nous nous proposons de montrer que :

Si G est simple, le noyau N de l'homomorphisme de G' sur le groupe des matrices $S_2(x)$, $x \in G'$, est identique au centre de G.

Le centre de G est dans chaque toroïde maximum, donc dans G' et même dans N, puisque l'image du centre de G dans le groupe adjoint linéaire de G se réduit à la matrice identité ; il nous reste à prouver que, inversément, N est contenu dans le centre de G ; pour cela, il sera commode de considérer l'espace homogène de G défini par G' [8]). Pour l'obtenir, on associe à chaque classe xG' d'éléments de G un point $\bar{x}$ d'un nouvel espace H ; la topologie de G permet d'y introduire de façon naturelle une topologie, qui fait de H une variété compacte à $n - n'$ dimensions. $(x_{n'+1}, x_{n'+2}, \ldots, x_n)$ peuvent être prises comme coordonnées dans un entourage $V(\bar{e})$ du point $\bar{e}$ de H associé à G'.

L'ensemble des transformations de H sur lui-même :

$$f_a : \bar{x} \to \overline{(a\,x)}\ , \qquad a \in G$$

opère transitivement sur H, qui est donc un espace homogène de G. G' se compose de tous les éléments g' de G pour lesquels $f_{g'}(\bar{e}) = \bar{e}$: c'est le groupe d'isotropie de H, et les matrices $S_2(x)$ indiquent précisément comment le groupe d'isotropie opère sur $V(\bar{e})$. Si $S_2(x) = E$, la transformation laisse $V(\bar{e})$, partant H, fixe point par point. N n'est autre que l'ensemble des éléments de G qui induisent dans H la transformation identique. On en déduit immédiatement que N est invariant dans G ; comme il est de plus fermé, et que G est simple, N est discret et fait alors partie du centre de G.

Pour énoncer facilement la condition nécessaire que nous avons en vue, il est commode d'introduire la définition suivante :

---

[8]) cf. *E. Cartan*, l. c.[2]), nos 17, 18, 28, 29.

Définition. *Le centre de k familles de plans parallèles de R^l est l'ensemble des points par lesquels passent un plan de chaque famille.*

En particulier, le centre d'un diagramme $D(G)$ recouvre le centre du groupe G.

Désignons par $D - D'$ le complément d'un sous-diagramme D' de D, c'est-à-dire l'ensemble des plans de D non compris dans D'; nous pouvons alors énoncer le théorème:

Théorème 3. *Supposons que les m' premières familles de plans parallèles du diagramme $D(G)$ dun groupe simple G forment un sous-diagramme D'. Pour que G contienne un sous-groupe fermé G' de diagramme D', il faut que le centre du complément $D - D'$ de D' dans D soit identique au centre de D.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent; en effet, si x est un point de $D - D'$, on a:

$$\vartheta_{m'+i}(x) \equiv 0 \quad (1) \ , \qquad i = 1, \ldots, m - m'$$

d'où

$$S_2(x) = E$$

et x représente un élément de N, et fait donc partie du centre de $D(G)$.

Exemple 1. $D(B_2)$ [9]) est formé par les plans:

$$x_1 \pm x_2 \equiv 0 \quad (1)$$

$$x_1 \equiv 0 \qquad\qquad x_2 \equiv 0 (1)$$

les deux dernières familles définissent un diagramme D' de D. Le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est dans le centre de $D - D'$, mais pas dans celui de $D(B_2)$; B_2 ne contient pas de sous-groupe ayant le diagramme D'.

Exemple 2. On peut prendre comme diagramme du groupe exceptionnel G_2 les plans

---

[9]) Selon l'usage habituel, B_l désigne la structure du groupe unimodulaire orthogonal à $2l + 1$ variables, D_l celle du groupe unimodulaire orthogonal à $2\,l$ variables.

$$x_1 \equiv 0, \qquad x_2 \equiv 0, \qquad x_1 + x_2 \equiv 0 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 \equiv 0, \qquad 2x_1 + x_2 \equiv 0, \qquad x_1 + 2x_2 \equiv 0 \quad (1)$$

où x_1 et x_2 sont coordonnées dans un système dont les vecteurs base ont la longueur un et font entre eux un angle de 60 degrés. Les trois familles de la première ligne forment un diagramme de A_2 auquel ne correspond aucun sous-groupe, car le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est dans le centre de son complément, mais pas dans celui de $D(G_2)$.

Corollaire. Soit G un groupe simple clos de rang l, à n paramètres. Un sous-groupe fermé de même rang a au maximum $n - 2l$ paramètres.

Démonstration. Le centre de $D - D'$ est égal au centre de $D(G)$ qui est un réseau de points ; en particulier, les plans de $D - D'$ passant par l'origine ne peuvent avoir que ce point en commun et leur nombre est au moins l. Or, la différence entre les ordres de G et de G' est égale à deux fois le nombre de familles de plans formant $D - D'$, d'où le corollaire.

Remarques sur un mémoire de B. L. van der Waerden. Dans le travail cité en note[5]), l'auteur construit par induction les systèmes de vecteurs racines des groupes simples clos et en dresse le tableau p. 461, indiquant par une flèche quand un système est une extension d'un autre. Signalons tout d'abord qu'il y manque les relations $D_5 \to E_6$, $D_6 \to E_7$, établies au § 17, sous $n = 5$ et $n = 6$, et que, autour de F_4, le tableau correct est

$$\begin{array}{ccccc} B_3 & & & & C_3 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ B_4 & \to & F_4 & \leftarrow & C_4 \end{array}$$

ce qui résulte du texte: au § 7, l'extension de C_3 donne un système F_4 englobant C_4, de même au § 6 pour les B.

Dans une phrase précédant immédiatement ce tableau, l'auteur dit que les flèches indiquent aussi des inclusions de groupes, ce qui n'est pas toujours exact. Le théorème 3 permet de voir aisément que $D_4 \to C_4 \to F_4$ et $D_n \to C_n (n \geqslant 3)$ ne sont pas des inclusions de groupes. Du théorème 4 établi ci-dessous on déduit par contre que les autres relations entre systèmes de même rang correspondent à des inclusions de groupes. Ajoutons enfin pour compléter que les flèches reliant 2 systèmes de rangs différents indiquent toujours des inclusions de groupes.

5. Un critère nécessaire et suffisant pour qu'un sous-diagramme indique un sous-groupe

Pour parvenir à ce critère, nous aurons besoin du :

Lemme. *Soit G' un sous-groupe fermé de rang maximum de G. Si $\vec{\vartheta}_1$ et $\vec{\vartheta}_2$ sont des vecteurs racines de G' et si $\vec{\vartheta}_1 + \vec{\vartheta}_2$ est un vecteur racine de G, c'est aussi un vecteur de G'* [10]).

Pour la démonstration, nous distinguons deux cas :

a) *rang de* $G = 2$. Les seules structures semi-simples de rang deux non isomorphes sont A_2, B_2, D_2, G_2 ; un coup d'œil sur leurs diagrammes [11]) montre que dans deux cas seulement on peut trouver un sous-diagramme ne vérifiant pas notre lemme ; ce sont justement les deux exemples traités après le théorème 3 ; nous avons vu qu'il ne correspond pas de sous-groupe à ces sous-diagrammes, ce qui démontre la proposition sous l'hypothèse a).

b) *Rang de* $G > 2$. Les plans $\vartheta_1(x) = 0$ et $\vartheta_2(x) = 0$ se coupent suivant un espace R^{l-2} à $l - 2$ dimensions. Le centralisateur connexe [12]) N de R^{l-2} a comme diagramme tous les plans de $D(G)$ parallèles à R^{l-2} ses vecteurs racines sont donc tous les vecteurs racines de G situés dans le plan à deux dimensions déterminé par $\vec{\vartheta}_1$ et $\vec{\vartheta}_2$, en particulier $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$, $\vec{\vartheta}_1 + \vec{\vartheta}_2$. N est localement le produit direct d'un toroïde à $l - 2$ dimensions recouvert par R^{l-2} avec un groupe semi-simple N_2 de rang 2 ayant les mêmes vecteurs que N (cf. N° 1).

En raisonnant de même sur G', on voit que *tous* les vecteurs racines de G' coplanaires avec $\vec{\vartheta}_1$ et $\vec{\vartheta}_2$ sont vecteurs racines d'un groupe N_2' de rang deux, qui est l'intersection de N_2 avec G'. D'après a), $\vec{\vartheta}_1 + \vec{\vartheta}_2$ est un vecteur racine de N_2' donc aussi de G'.

---

[10]) Du point de vue infinitésimal, ce lemme résulte, pour les groupes à paramètres complexes, de théorèmes connus (cf. *Cartan*, Thèse, p. 55, th. 5).

[11]) Ils se trouvent par exemple dans: *E. Stiefel*, l. c. note 3.

[12]) Nous désignons ainsi l'ensemble des éléments de G échangeables avec tous les éléments de T^l représentés par des points de R^{l-2}. R^{l-2} recouvre un sous-groupe *fermé* à $l - 2$ paramètres de T^l, car R^{l-2} a en commun avec le réseau unité un réseau à $l - 2$ dimensions (cf. *E. Stiefel*, l. c., p. 361).

Théorème 4. *Soient G un groupe compact de rang l, $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_m$, ses vecteurs racines. Pour que $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_{m'}$, soient les vecteurs racines d'un sous-groupe G' fermé de G il faut et il suffit que :*

(a) *Si h $(h \leq l)$ est le rang de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_{m'}$, on puisse trouver parmi $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_{m'}$ h vecteurs dont tous les autres soient combinaisons linéaires à coefficients entiers.*

(b) *Tout vecteur racine de G combinaison linéaire à coefficients entiers de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_{m'}$ fasse partie du système $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_{m'}$.*

1) Ces conditions sont *nécessaires*. Supposons donc que $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_{m'}$ soient les vecteurs racines d'un sous-groupe G' fermé de G. Si h est le rang de ces vecteurs, nous savons qu'il est possible d'en choisir h dont les autres sont combinaisons linéaires à coefficients entiers ; on peut par exemple prendre h vecteurs perpendiculaires aux h faces d'un domaine fondamental de $\Psi(G')$, cf. N° 1, donc (a) est bien nécessaire ; il est loisible d'admettre que ces vecteurs sont $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$; alors toute combinaison à coefficients entiers de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_{m'}$ est déjà combinaison à coefficients entiers de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$.

Soit maintenant

$$\vartheta = a_1\vec{\vartheta}_1 + a_2\vec{\vartheta}_2 + \cdots + a_h\vec{\vartheta}_h \qquad (a_i \text{ entiers})$$

un vecteur de G. En vertu du corollaire au théorème 1, on peut trouver un vecteur $\pm\vec{\vartheta}_i$ $(i \leq h)$ relié à $\vec{\vartheta}$ par une suite de vecteurs racines de G, $\pm\vec{\vartheta}_i, \pm\vec{\vartheta}_i \pm \vec{\vartheta}_k, \ldots, \vec{\vartheta}$ le j-ème se déduisant du $(j-1)$-ème par addition de l'un des vecteurs $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_h$; mais le lemme ci-dessus assure que $\pm\vec{\vartheta}_i \pm \vec{\vartheta}_k$, puis le troisième vecteur de la suite, le quatrième, ..., enfin $\vec{\vartheta}$ sont des vecteurs racines de G', c. q. f. d.

2) Ces conditions sont *suffisantes*. Soient donc $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ h vecteurs racines de G indépendants et $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_{m'}$ tous les vecteurs de G combinaisons linéaires à coefficients entiers de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$.

Nous avons à montrer que $\pm\vec{\vartheta}_1, \pm\vec{\vartheta}_2, \ldots, \pm\vec{\vartheta}_{m'}$ sont les vecteurs d'un sous-groupe G' de G. Considérons pour cela l'ensemble Z des points x de R^l pour lesquels $\vartheta_i(x) \equiv 0(1)$, $i = 1, \ldots, m'$. Z est identique au centre des h familles de plans $\vartheta_i(x) \equiv 0(1)$, $i \leq h$ par suite de (a). Appelons G' la composante connexe du centralisateur de Z dans G. Le diagramme de G' comprend en tout cas les plans $\vartheta_i(x) \equiv 0(1)$, $i = 1, 2, \ldots, m'$, en vertu de la définition même des éléments singuliers d'un groupe clos (voir N° 1), et nous allons maintenant montrer qu'il n'en contient pas d'autres ; il suffit pour cela d'établir qu'aucune famille de plans $\vartheta_{m'+i}(x) \equiv 0(1)$ ne renferme Z, puisque Z, faisant partie du centre de G' doit se trouver sur chaque famille de plans parallèles de $D(G')$. Or, $\vec{\vartheta}_{m'+i}$ n'étant pas une combinaison à coefficients entiers de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ on a deux possibilités : ou bien,

$$\vartheta_{m'+i} = a_1 \vec{\vartheta}_1 + a_2 \vec{\vartheta}_2 + \cdots + a_h \vec{\vartheta}_h$$

et l'un des coefficients au moins, disons a_1, est rationnel non entier, et alors un point z solution de

$$\vartheta_1(z) = 1 \qquad \vartheta_2(z) = \vartheta_3(z) = \cdots = \vartheta_h(z) = 0$$ [13])

se trouve dans Z mais pas sur un des plans $\vartheta_{m'+i}(x) \equiv 0(1)$; ou bien $\vec{\vartheta}_{m'+i}$ est indépendant de $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_h$ (ce qui ne peut du reste se produire que si $h < l$). Dans ce cas, l'intersection des plans $\vartheta_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, h$ est un espace à $l - h$ dimensions possédant au moins une droite qui n'a avec $\vartheta_{m'+i}(x) = 0$ que l'origine en commun ; les points de cette droite sont dans Z mais ne seront pas tous sur un des plans $\vartheta_{m'+i} \equiv 0(1)$.

6. Soient G un groupe clos, G' un sous-groupe connexe de rang maximum, Z le centre de G'. De la démonstration du théorème 4 il résulte immédiatement que G' est le plus grand sous-groupe connexe de G formé par les éléments de G échangeables avec tous ceux de Z ; G' est donc centralisateur connexe de Z dans G. On peut même affirmer que G' est identique à la composante connexe du normalisateur de Z dans G. En effet, tout automorphisme $x^{-1}Zx$ de Z fourni par un élément de la composante connexe de ce normalisateur peut être relié à l'identité par une suite continue d'automorphismes de Z ; mais Z est un groupe abélien compact (connexe ou non, éventuellement discret) et ses automorphismes

[13]) Ce système est compatible, car les formes linéaires $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_h$ sont indépendantes (et $h \leq l$).

continus forment un groupe discret ; l'automorphisme précédent est donc l'identité et x est échangeable avec chaque élément de Z ; le normalisateur connexe de Z est égal au centralisateur connexe de Z. Nous avons démontré :

Théorème 5. *Soient G un groupe de Lie clos, G' un sous-groupe fermé connexe de rang maximum, Z' le centre de G' ; G' est égal à la composante connexe du normalisateur dans G de Z'.*

Corollaire. *Tout sous-groupe fermé connexe maximum*[14]) *de rang maximum est le normalisateur connexe d'un élément de G.*

Pour prouver ce corollaire, considérons un élément z qui soit dans le centre de G' mais pas dans celui de G (z existe certainement si $G' \neq G$ d'après le théorème 5). Le normalisateur connexe de z est différent de G, il contient G' et doit lui être égal si ce dernier est maximum.

La réciproque du corollaire est fausse, comme on peut s'y attendre ; un sous-groupe peut être normalisateur d'un élément sans être maximum (voir le N° 7). On peut même se demander si tout sous-groupe fermé de rang maximum ne peut pas être défini comme normalisateur d'un élément de G ; cela revient à savoir s'il existe toujours un point dans le centre du diagramme de G' par lequel ne passe aucun plan du diagramme de G qui ne fasse déjà partie du diagramme $D(G')$. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. $\mathrm{D}(C_3)$ se compose des plans

$$2x_i \equiv 0(1) \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$x_i \pm x_j \equiv 0(1) \qquad i \neq j$$

les trois premières familles forment un diagramme D' du produit direct $A_1 \times A_1 \times A_1$. Le centre de D' se compose des points $(n_1/2,\ n_2/2,\ n_3/2)$, n_i entiers quelconques. Il est facile de voir que les vecteurs racines de D' satisfont aux conditions (a) et (b) du théorème 4 ; par conséquent D' est le diagramme d'un sous-groupe G' de C_3. G' ne peut être défini comme normalisateur d'un élément de G. En effet, si c'était le cas, on pourrait trouver un point $P = (n_1/2, n_2/2, n_3/2)$ du centre de D' par lequel ne passe aucun plan de $D - D'$. Or, cela est impossible ; en effet deux au moins des coordonnées de P sont congrues entre elles modulo $\frac{1}{2}$; soient i et j leurs indices, P est alors sur un des plans $x_i + x_j \equiv 0(1)$, et le normalisateur de P est plus grand que G'.

---

[14]) Ici et dans la suite de ce travail, G' sous-groupe *maximum* de G signifie: G' n'est contenu dans aucun sous-groupe *connexe* de G différent de G ou de G'.

7. Détermination explicite des sous-groupes maxima de rang maximum des groupes simples clos

Rappelons tout d'abord que les plus grands sous-groupes de rang maximum des groupes de Lie compacts sont connus dès que ceux des groupes simples le sont (N° 3) ; ce n'est donc pas restreindre la généralité que de se limiter à ces derniers.

Un sous-groupe maximum de même rang d'un groupe simple clos G est normalisateur d'un élément x de G (théorème 5, corollaire) ; bien entendu, nous ne cherchons que les *types* de sous-groupes maxima, sans distinguer entre des sous-groupes isomorphes, en particulier entre les normalisateurs de deux éléments conjugués. Il est donc loisible de supposer que x se trouve dans un toroïde maximum déterminé T^l, ou même dans un simplexe fondamental du diagramme $D(G)$, qui contient toujours au moins un représentant de toutes les classes d'éléments conjugués de G (cf. N° 1).

Soit donc x un point du simplexe $S(G)$; si x est à l'intérieur de S, le normalisateur $N(x)$ est T^l, qui n'est pas maximum si $l > 1$; si x est sur une face à $k \geq 2$ dimensions de S (mais pas sur une arête) on voit facilement que le normalisateur d'un point d'une arête de S contenue dans ce k-plan est plus grand que $N(x)$, qui n'est donc pas maximum. Si x est sur une arête dont une extrémité x' au moins n'appartient pas au centre de $D(G)$, $N(x)$ est contenu dans $N(x')$ et n'est pas non plus maximum ; supposons maintenant que les deux extrémités de l'arête fassent partie du centre de $D(G)$ et soit z l'une d'elles ; z représente un élément du centre de G et le normalisateur $N(z^{-1}x)$ du produit $(z^{-1}x)$ est le même que celui de x. Le point $(z^{-1}x)$ est sur une arête d'un simplexe S', issue de l'origine 0 (car la multiplication dans T^l est donnée par l'addition vectorielle dans R^l). Il existe une transformation de Ψ qui amène S' et S (cf. N° 1) et $z^{-1}x$ en un point x' d'une arête de S passant par 0 ; x' et $(z^{-1}x)$ sont conjugués, et leurs normalisateurs isomorphes.

Notons d'autre part que les normalisateurs des points intérieurs à une arête sont tous les mêmes ; chacun a en effet comme diagramme tous les plans de $D(G)$ parallèles à cette arête et aucun autre puisque $S(G)$ n'est traversé par aucun plan de $D(G)$.

Par conséquent, *pour obtenir tous les types de sous-groupes maxima, il suffit d'examiner les normalisateurs des sommets du simplexe S qui n'appartiennent pas au centre de $D(G)$ et ceux des milieux des arêtes issues de* 0 *dont la deuxième extrémité est dans le centre de* $D(G)$, d'où le théorème :

Un sous-groupe maximum de rang maximum d'un groupe simple compact est soit semi-simple soit de la structure $G_{l-1} \times T$, où G_{l-1} est un sous-groupe semi-simple de rang $l-1$ et T un groupe à un paramètre.

Le premier cas est celui du normalisateur d'un sommet, le deuxième celui du normalisateur du milieu d'une arête (car alors tous les vecteurs racines du sous-groupe sont perpendiculaires à cette arête).

Mais il convient d'être plus précis, car nous ne savons pas encore si tous les normalisateurs envisagés sont vraiment maxima.

Soient $\vartheta_1(x) \geq 0$, $\vartheta_2(x) \geq 0, \ldots, \vartheta_l(x) \geq 0, \vartheta(x) \leq 1$ les équations du simplexe $S(G)$. $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_l$ sont les paramètres fondamentaux, $\vartheta = m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 + \cdots + m_l\vartheta_l$ (m_i entiers positifs) est le paramètre dominant (voir N° 1). $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_l$ sont des formes linéaires indépendantes, et on peut les utiliser pour définir dans R^l de nouvelles coordonnées, ce que nous ferons. Dans ce système, le centre de $D(G)$ est le réseau des points à coordonnées entières. Les sommets de S autres que l'origine sont les points

$$x_i = (0, \ldots, 0, 1/m_i, 0, \ldots, 0) \qquad i = 1, 2, \ldots, l\ ,$$

pour que x_i soit dans le centre de G, il faut et il suffit que $m_i = 1$; notons en passant que le nombre des m_i égaux à un donne l'ordre, diminué de un, du groupe de Poincaré du groupe adjoint linéaire de G[15]).

Théorème 6. *Soient G un groupe simple compact, $x_i = (0, \ldots, 0, 1/m_i, 0, \ldots, 0)$ un sommet du simplexe $S(G)$.*

(a) Si $m_i = 1$, le normalisateur du milieu de l'arête $0x_i$ est maximum dans G, et réciproquement.

(b) Le normalisateur $N(x_i)$ de x_i est maximum si et seulement si m_i est premier > 1.

On obtient de la sorte tous les types de sous-groupes maxima de rang maximum de G[16]).

La réciproque de (a) ayant déjà été établie plus haut, il nous reste à démontrer trois points.

1) *Si $m_i = 1$, le normalisateur $N(y)$ du milieu y de $0x_i$ est maximum.* Le diagramme de $N(y)$ se compose de tous les plans de $D(G)$

---

[15]) Voir *E. Cartan*, l. c., note 6; aussi l. c., note 2, N° 48.

[16]) Il n'est pas exclu que certains des sous-groupes maxima donnés par (*a*) et (*b*) soient isomorphes; tout au moins est-on sûr qu'ils ne sont pas homologues dans le groupe adjoint *connexe*.

parallèles à $0x_i$. Si maintenant N' est un sous-groupe plus grand que $N(y)$, $D(N')$ a au moins un plan non parallèle à $0x_i$; soit $\vartheta' = n_1\vartheta_1 + n_2\vartheta_2 + \cdots + n_l\vartheta_l$ le paramètre angulaire correspondant; $n_i = 1$ car $n_i \neq 0$ et $n_i \leq m_i = 1$ (ϑ paramètre dominant); par suite le système de congruences $0 \equiv \vartheta_1(x) \equiv \cdots \equiv \vartheta_{i-1}(x) \equiv \vartheta_{i+1}(x) \equiv \cdots \equiv \vartheta_l(x) \equiv \vartheta'(x)$ est équivalent à $\vartheta_j(x) \equiv 0$, $(j = 1, \ldots, l)$, et tout élément du centre de N' est dans le centre de G, d'où $N' = G$ (théorème 5); N est bien maximum.

2) *Si* $m_i = a \cdot b$ (*a et b entiers différents de* 1), $N(x_i)$ *n'est pas maximum.* $D(N)$ est formé par toutes les familles de plans de $D(G)$ qui contiennent x_i; les paramètres angulaires de $N(x_i)$ sont donc tous les paramètres angulaires de G qui, exprimés en fonction de $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_l$, ont m_i comme coefficient de ϑ_i. Soit $y = x_i^a$ le point $(0, \ldots, 0, 1/b, 0, \ldots, 0)$; $N(y)$ a comme paramètres tous ceux dont le coefficient de ϑ_i est b ou un multiple entier de b, donc $N(y) \supset N(x_i)$. Mais G a au moins un paramètre ϑ' pour lequel le coefficient de ϑ_i est b; pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer le corollaire du théorème 1 à $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_l, \vec{\vartheta}$. Ainsi ϑ' est paramètre angulaire de $N(y)$ mais pas de $N(x_i)$. $N(y)$ est effectivement plus grand que $N(x_i)$ et, comme $N(y) \neq G$, $N(x_i)$ n'est pas maximum.

3) *Si* m_i *est premier* > 1, $N(x_i)$ *est maximum.* Si $N(x_i)$ n'était pas maximum, il serait contenu dans un sous-groupe maximum, c'est-à-dire dans le normalisateur $N(y)$ d'un certain élément y de T^l; il nous suffira donc de montrer que tout normalisateur $N(y) \neq G$ contenant $N(x_i)$ est égal à $N(x_i)$.

$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, \ldots, \vartheta_l \vartheta$ sont des paramètres de $N(x_i)$ et $N(y)$; y est dans le centre de $N(y)$, donc ses coordonnées $(n_1, \ldots, n_l)$ seront toutes entières sauf la i-ème; quant à cette dernière, l'équation $\vartheta(y) \equiv 0\,(1)$ indique qu'elle est de la forme q/m_i, et l'on est sûr que $q \not\equiv 0\,(m_i)$, sinon y aurait toutes ses coordonnées entières, ferait partie du centre de G, et alors $N(y) = G$. Désignons par z le point $(n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, 0, n_{i+1}, \ldots, n_l)$; z est dans le centre de G et de plus $y = x_i^q \cdot z$.

m_i étant premier et $q \not\equiv 0\,(m_i)$, on peut trouver un entier r tel que $q \cdot r \equiv 1\,(m_i)$, et on voit alors aisément que

$$y^r = x_i \cdot z' \qquad (z' \text{ dans le centre de } G).$$

Chaque élément de $N(y)$ est bien entendu échangeable avec y^r, d'où

$$N(y) \subset N(y^r) = N(x_i z') = N(x_i)$$

ce qui, joint à l'hypothèse $N(y) \supset N(x_i)$, entraîne $N(y) = N(x_i)$, q. e. d.

Nous savons maintenant exactement quels points du simplexe sont à considérer. Il nous faut encore pouvoir indiquer la structure des sous-groupes trouvés ; il suffit pour cela de connaître un système de paramètres fondamentaux du sous-groupe, ce qui est immédiat ; en effet, si nous prenons le normalisateur d'un sommet x_i, les plans $\vartheta = 1$, $\vartheta_j = 0$ $(j \leq l, j \neq i)$ délimitent un angle polyèdre contenant $S(G)$ et par conséquent traversé par aucun plan singulier issu de x_i ; donc les plans $\vartheta = 0$, $\vartheta_j = 0$ $(j \leq l, j \neq i)$ bornent un domaine fondamental du groupe Ψ de $N(x_i)$, et $\vartheta, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, \ldots, \vartheta_l$ sont des paramètres fondamentaux de $N(x_i)$; si le sous-groupe envisagé est normalisateur du milieu d'une arête $0x_i$, on voit de même que $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, \ldots, \vartheta_l$ sont des paramètres angulaires fondamentaux de sa composante semi-simple.

Pour effectuer l'énumération des sous-groupes maxima, il est commode de représenter le simplexe $S(G)$ selon un procédé dû à Schläfli : à chaque face $\vartheta_j = 0$, $j \leq l$, et $\vartheta = 1$ on fait correspondre un point P_j, $j \leq l$, P, et on joint P_i à P_j par $k - 2$ traits si l'angle non obtus des deux faces est π/k ; si on enlève le point P et les traits issus de P on a une représentation de l'angle polyèdre à l faces, domaine fondamental de $\Psi(G)$; en général, cet angle polyèdre caractérise déjà le groupe ; parmi les groupes simples, seuls B_l et C_l ont le même angle polyèdre sans être localement isomorphes pour $l \geq 3$.

Si m_i est premier >1, on enlèvera à la représentation de S le point P_i et les traits partant de P_i, la figure restante donne l'angle polyèdre de $N(x_i)$. Si on enlève les points P et P_j, on obtient l'angle polyèdre du normalisateur d'un point intérieur de l'arête Ox_j.

Dans le tableau qui suit, nous énumérons les sous-groupes maximums des groupes simples ; dans les deux premières colonnes se trouvent la représentation du simplexe du groupe et son paramètre dominant, dans les deux dernières les sous-groupes maxima de rang maximum ; sous G_l figurent les sous-groupes simples ou semi-simples, sous $G_{l-1} \times T$, les sous-groupes à centre continu.

Dans les deux remarques ci-dessous, $\bar{G}$ désigne le groupe adjoint linéaire de la structure simple close G.

Remarque I. Le centre de $\bar{G}$ se réduit à l'élément neutre e, et le centre de son diagramme est le recouvrement dans R^l de e ; les sommets x_i du simplexe pour lesquels $m_i = 2$ et les milieux des arêtes Ox_i lorsque $m_i = 1$ représentent des éléments d'ordre 2 de $\bar{G}$; leurs normalisateurs

Groupe	Simplexe	Paramètre dominant	G_l	$G_{l-1}\times T$
A_l	P_1 P_2 P_3 P_{l-1} P_l	$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_{l-1}+\varphi_l$		$A_i\times A_{l-i-1}\times T$ $(i=1,2,3,\ldots)$
B_l	P_1 P_2 P_3 P_{l-1} P_l P	$2\varphi_1+2\varphi_2+\cdots+2\varphi_{l-1}+\varphi_l$	$D_l, B_i\times D_{l-i}$ $(i=1,2,\ldots,l-2)$	$B_{l-1}\times T$
C_l	P_1 P_2 P_3 P_{l-1} P_l P	$\varphi_1+2\varphi_2+2\varphi_3+\cdots+2\varphi_l$	$C_i\times C_{l-i}$ $(i=1,2,\ldots)$	$A_{l-1}\times T$
D_l	P_1 P_2 P_3 P_4 P_{l-2} P_{l-1} P_l P	$\varphi_1+\varphi_2+2\varphi_3+2\varphi_4+\cdots$ $+2\varphi_{l-1}+\varphi_l$	$D_i\times D_{l-i}$ $(i=2,3,\ldots,l-2)$	$A_{l-1}\times T$ $D_{l-1}\times T$
E_6	P_5 P_2 P_1 P_4 P_3 P_6 P	$3\varphi_1+2\varphi_2+2\varphi_3+2\varphi_4$ $+\varphi_5+\varphi_6$	$A_1\times A_5$ $A_2\times A_2\times A_2$	$D_5\times T_1$
E_7	P_1 P_7 P_4 P_2 P_3 P_6 P P_5	$4\varphi_1+3\varphi_2+3\varphi_3+2\varphi_4$ $+2\varphi_5+2\varphi_6+\varphi_7$	$A_1\times D_6, A_7, A_2\times A_5$	$E_6\times T$
E_8	P_1 P_7 P_3 P_2 P_4 P_6 P_8 P P_5	$6\varphi_1+5\varphi_2+4\varphi_3+4\varphi_4$ $+3\varphi_5+3\varphi_6+2\varphi_7+2\varphi_8$	$D_8, A_1\times E_7, A_8,$ $A_2\times E_6, A_4\times A_4$	
F_4	P_4 P_1 P_2 P_3 P	$4\varphi_1+3\varphi_2+2\varphi_3+2\varphi_4$	$A_1\times C_3, B_4, A_2\times A_2$	
G_2	P_1 P_2 P	$3\varphi_1+2\varphi_2$	$A_1\times A_1, A_2$	

connexes ne sont autres que les sous-groupes caractéristiques des automorphies involutives de G, et les espaces homogènes correspondants sont symétriques irréductibles ; à ce point de vue, ces sous-groupes sont connus depuis longtemps[17]). Le tableau précédent montre en particulier que tous les sous-groupes maxima de rang maximum des groupes simples A_l, B_l, C_l, D_l engendrent des espaces symétriques. Les groupes exceptionnels se comportent différemment et chacun contient au moins un sous-groupe maximum caractéristique d'une automorphie non involutive (d'ordre 3 ou 5).

Remarque II. *L'ordre de connexion des sous-groupes maxima.* En s'appuyant sur le fait que les points à coordonnées entières forment le réseau unité de $\bar{G}$, on démontre aisément que le normalisateur *dans* $\bar{G}$ d'un sommet x_i du simplexe a comme centre exactement le groupe cyclique, d'ordre m_i, engendré par x_i ; cela permet d'indiquer facilement des exemples de groupes simples simplement connexes contenant des sous-groupes maxima semi-simples *non* simplement connexes. Par exemple, le groupe adjoint de E_8 est simplement connexe et renferme A_8 qui est normalisateur de x_5 avec $m_5 = 3$. Comme le groupe simplement connexe A_8 recouvre neuf fois son groupe adjoint, le groupe de Poincaré du $A_8 \subset E_8$ est d'ordre 3. Il en est de même pour le groupe $A_2 \times A_2 \times A_2$ qui se trouve dans le groupe simplement connexe de structure E_6.

8. Les sous-groupes locaux de rang maximum des groupes clos

Théorème. *Soit G un groupe de Lie compact de rang l, K un sous-groupe local continu à n' paramètres*[18]) *de rang l, c'est-à-dire contenant un sous-groupe (local) abélien à l paramètres. Alors, K est le noyau d'un sous-groupe fermé G' de G à n' paramètres.*

Soit $U(e)$ un entourage de l'unité de G rapporté à des coordonnées canoniques ; K est alors dans l'intersection de U avec un plan à n' dimensions[18]) ; on peut supposer U assez petit pour que K remplisse toute cette intersection.

---

[17]) *E. Cartan*, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. France, t. **55**, 1927, p. 126—132.

[18]) Cela veut dire que les éléments de K sont dans un entourage U de l'unité e de G, comprennent e et dépendent de façon continue de n' paramètres; de plus le produit de deux éléments de K appartient à K s'il est contenu dans U; d'après un théorème de *Cartan*, l. c., note 2, No. 26, K est un groupe de Lie et ses points forment une variété analytique dans un système de coordonnées analytiques de G. C'est en particulier une portion de plan à n' dimensions dans un système de coordonnées canoniques; enfin, en restreignant éventuellement la variété de K, on peut supposer que K possède l'inverse de chacun de ses éléments.

L'ensemble des produits que l'on peut former avec un nombre fini d'éléments de K constitue un sous-ensemble G' de G qui est en tout cas un groupe abstrait. Soit $\overline{G'}$ son adhérence dans G, c'est-à-dire l'ensemble composé de G' et des points d'accumulation de G' dans G ; $\overline{G'}$ est un sous-groupe fermé de G (donc de Lie et compact). Soit enfin $K' = \overline{G'} \cap U(e)$. K' contient K, c'est l'intersection de U avec un plan à $p \geq n'$ dimensions.

Les transformations (linéaires en coordonnées canoniques) $x^{-1}Ux$ laissent le plan de K invariant si x est dans K, donc aussi si $x \in G'$, et par raison de continuité, si $x \in \overline{G'}$. K est donc un sous-groupe local invariant dans K' ; mais K' est le noyau d'un groupe clos $\overline{G'}$; si $p > n'$, K' est isomorphe à un produit direct $K \times L$[19]), où L est à $p - n'$ paramètres. Or, L contient au moins un groupe à un paramètre, qui déterminera avec le groupe abélien d'ordre l de K un groupe abélien à $l + 1$ paramètres ; celui-ci engendrera dans G un groupe dont l'adhérence sera un toroïde à au moins $l + 1$ dimensions, ce qui contredit l'hypothèse sur le rang de G ; ainsi, K et K' ont la même dimension et $K = K'$; K est un voisinage de l'unité pour le sous-groupe $\overline{G'}$ fermé dans G.

Nous aurions donc pu nous placer au point de vue local pour rechercher les sous-groupes fermés de rang maximum. On sait d'autre part qu'il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes locaux d'un groupe de Lie G et les sous-anneaux de Lie de l'anneau des transformations infinitésimales de G. Notre théorème 4 doit donc, convenablement interprété, fournir un critère pour qu'un sous-ensemble de l'anneau de G qui renferme l transformations échangeables entre elles forme un anneau de Lie. On peut s'assurer que tel est le cas ; un critère analogue a du reste déjà été obtenu par Killing (Math. Annalen *36*, pp. 239) dans l'étude des sous-anneaux maxima des structures simples *complexes*. Inversément, nous aurions pu opérer directement dans l'anneau de G, mais bien entendu, la caractérisation des sous-groupes comme normalisateurs échappe à cette méthode.

(Reçu le 1er septembre 1948.)

---

[19]) *E. Cartan*, l. c., note 2, N° 41.