Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Intégrales singulières à noyau positif.

Autor: Fejér, Léopold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19759

Intégrales singulières à noyau positif

Par Léopold Fejér, Budapest [1])

1. Je ne connais pas l'origine de cette dénomination „intégrale singulière", mais il est sûr que lorsqu'on parle d'une intégrale singulière, sous le signe de l'intégrale définie d'une ou de plusieurs dimensions figure toujours un produit de deux facteurs dont l'un est une fonction „arbitraire" des variables d'intégration, l'autre facteur (ordinairement d'un caractère analytique très régulier) est au contraire tout-à-fait indépendant de la fonction arbitraire; ce deuxième facteur est commun pour toutes les fonctions arbitraires et dépend d'un côté, comme la fonction arbitraire elle-même, des variables d'intégration, de l'autre côté d'une seule ou de plusieurs autres variables nommées „paramètres" de l'intégrale singulière. La fonction arbitraire est nommée tout simplement „*la fonction*" et le facteur indépendant de cette fonction a le nom „*noyau*" de l'intégrale singulière. La seconde dénomination se ramène à *Hilbert*. Le problème ordinairement attaché à l'intégrale singulière est de rechercher si elle converge ou non vers une valeur finie quand les paramètres, continus ou discontinus, convergent de leur part vers telle ou telle valeur. Je ne parle pas ici d'autres problèmes qui s'attachent à des intégrales singulières; ils sont nombreux et importants.

2. Je crois cependant qu'au lieu de continuer de préciser plus loin la définition générale des intégrales singulières et d'exposer préliminairement les remarques générales qui se rapportent à ce sujet et qui font une partie de cette conférence, il sera peut-être plus agréable pour mes auditeurs honorés, si je vais parler d'abord de quelques cas speciaux et que, après, je signale la route qui m'a conduit à des résultats de quelque généralité. C'est d'abord la série de *Fourier* d'une fonction de période 2π et intégrable de la variable u

$$f(u) \sim A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots ,$$

où

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\, dt ,$$

[1]) Conférence faite à Genève en juillet 1948.

$$A_n = A_n(u) = a_n \cos nu + b_n \sin nu \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \cdot 2 \cos nt\, dt \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

qui était et demeurait une source abondante pour des intégrales singulières. $\psi(t)$ a ici et dans ce qui suit toujours la signification

$$\psi(t) = \frac{f(u+t) + f(u-t)}{2} \; , \tag{2.2}$$

u désigne un nombre fixe et si l'on doit s'occuper de la convergence ordinaire de la série de Fourier $A_0 + A_1 + \cdots$ de la fonction f au point u, on est conduit à l'intégrale singulière de *Dirichlet*

$$s_n^{(0)}(u) = s_n^{(0)} = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t)\,(1 + 2\cos t + \cdots + 2 \cos nt)\, dt \; ,$$

ou

$$s_n^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\, dt \; . \tag{2.3}$$

Pour les moyennes ordinaires des sommes partielles $s_n^{(0)}$ de la série de Fourier, on obtient l'intégrale singulière

$$s_n^{(1)} = \frac{s_0^{(0)} + s_1^{(0)} + \cdots + s_n^{(0)}}{n+1} \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{(n+1)\cdot 1 + n \cdot 2\cos t + \cdots + 1 \cdot 2 \cos nt}{n+1}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \cdot \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \; .$$

En général, k étant un nombre entier non-négative quelconque, on est conduit pour les moyennes arithmétiques d'ordre k, en se basant toujours à la forme (2.1) du terme général A_n de la série de Fourier, à l'intégrale singulière

$$s_n^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\, \frac{\binom{n+k}{k}\cdot 1 + \binom{n+k-1}{k}\cdot 2\cos t + \cdots + \binom{k}{k}\cdot 2\cos n\, t}{\binom{n+k}{k}}\, dt\,, \tag{2.5}$$

$\psi(t)$ signifiant toujours

$$\psi(t) = \frac{f(u+t)+f(u-t)}{2}\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{2.6}$$

Donc, si nous désignons par $\sigma_n^{(k)}(t)$ la moyenne d'ordre k et d'indice n de la série

$$1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos n\, t + \cdots\,, \tag{2.7}$$

qu'on peut nommer „la série-noyau de la série de Fourier", c'est-à-dire posant

$$\sigma_n^{(k)}(t) = \frac{\binom{n+k}{k}\cdot 1 + \binom{n+k-1}{k}\cdot 2\cos t + \cdots + \binom{k}{k}\cdot 2\cos n\, t}{\binom{n+k}{k}}\,, \tag{2.8}$$

nous obtenons pour la moyenne du même ordre et du même indice de la série de Fourier de la fonction f la formule générale

$$\left.\begin{aligned} s_n^{(k)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\cdot \sigma_n^{(k)}(t)\, dt \\ k &= 0, 1, 2, 3, \ldots \\ n &= 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

où, je le répète, $\psi(t)$ a, ici et dans ce qui suit, toujours la signification

$$\psi(t) = \frac{f(u+t)+f(u-t)}{2}\,. \tag{2.10}$$

Le produit figurant sous le signe d'intégrale dans l'expression de $s_n^{(k)}$ sous (2.9) se compose de *deux facteurs*. Le premier facteur $\psi(t)$ dépend de la fonction développée $f(u)$ mais le second $\sigma_n^{(k)}(t)$ qui représente la moyenne arithmétique d'ordre k et d'indice n de la série élémentaire

$$1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos n\, t + \cdots\,,$$

est tout-à-fait indépendante de la fonction développée f; il est commun pour toutes les fonctions f et se nomme par cette raison *le noyau* de l'intégrale singulière (2.9).

3. En mentionnant d'autres exemples d'intégrales singulières, qu'il me soit permis de me restreindre à quelques des plus anciens et à quelques des plus nouveaux.

Voici l'intégrale de *Poisson :*

$$P(r,u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\,dt \ , \tag{3.1}$$

ou l'intégrale de *Weierstrass :*

$$W(r,u) = \frac{2r}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \psi(t)\,e^{-r^2t^2}\,dt \ ; \tag{3.2}$$

puis l'intégrale d'*Hermite*, qu'on obtient en posant

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{3.3}$$

et formant la différence

$$\frac{1}{2i}\{F(u+ri) - F(u-ri)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{r}{(t-u)^2+r^2}\,dt \ ,$$

c'est alors l'intégrale

$$H(r,u) = \frac{2r}{\pi}\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\frac{1}{t^2+r^2}\,dt \ , \tag{3.4}$$

$\psi(t)$ ayant toujours la signification de $\frac{1}{2}\big(f(u+t)+f(u-t)\big)$, qu'on doit nommer intégrale singulière d'Hermite.

Dans une Note publiée en 1925 dans les „Göttinger Nachrichten", je pars du fait que la courbe qui représente pour $t \geqq 0$ la fonction positive $\frac{|\sin t|}{t}$ est toujours située sous l'hyperbole $\frac{2}{1+t}$, $t \geqq 0$; le noyau, un peu modifié, de l'intégrale singulière, représentant la moyenne arithmétique de premier ordre de la série de Fourier, satisfait donc à l'inégalité

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 = n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2 \leqq n\,\frac{4}{(1+nt)^2}$$

et j'étais ainsi conduit à considérer l'intégrale singulière

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\frac{n}{(1+nt)^2}\,dt \ . \tag{3.5}$$

Par l'application de ce noyau si simple $n(1+n\,t)^{-2}$ le théorème d'après lequel les moyennes arithmétiques de la série de Fourier d'une fonction $f(u)$ convergent vers la valeur f, devient presque évident non seulement dans le cas où

$$\left(\frac{f(u+t)+f(u-t)}{2}-f\right)\to 0\,, \qquad \text{si} \quad t\to+0\,, \tag{3.6}$$

mais également dans le cas beaucoup plus général de *Lebesgue* où

$$\frac{1}{h}\int_0^h |\,\psi(t)-f\,|\,dt\to 0 \qquad \text{avec} \quad h\to+0\,, \tag{3.7}$$

c'est-à-dire dans le cas où la fonction $f(u)$ possède au point u „une valeur intégrale moyenne absolue" f.

Jusqu'ici j'ai énuméré un certain nombre d'intégrales singulières mais je n'ai pas parlé des problèmes de différentes espèces qui se sont attachés au cours des années à telle ou telle intégrale singulière.

Il est impossible mais heureusement entièrement superflu que j'insiste sur ce point ; je veux seulement dire que la question le plus souvent mais pas du tout exclusivement traitée est celle de *la convergence de l'intégrale singulière vers une limite finie* f, *la fonction* $\psi(t)$ *se comportant de telle ou telle manière au voisinage de* $t=+0$, *point critique du noyau.* Le *noyau* d'une intégrale singulière, commun pour toutes les fonctions admises, fait *prédominer* le comportement de la *fonction* dans le voisinage infinitésimal du point critique du noyau. (Dans les exemples donnés jusqu'ici c'est le point $t=0$.)

4. Permettez moi d'indiquer deux sujets assez profondément étudiés qui sont en connexion plus ou moins étroite avec celui des *intégrales singulières*. Ce sont les „*sommes singulières*", comme on les pourrait nommer.

J'ai commencé en 1900 d'examiner la moyenne arithmétique d'ordre n de la série de Fourier qui représente une intégrale singulière de noyau *positif* (non-négatif), mais c'est seulement en 1915 que j'ai réussi a trouver la formation arithmétique analogue dans la *théorie des suites d'interpolation* et en 1932 dans la *théorie des suites de quadrature mécanique*, la dernière formation étant d'ailleurs d'un caractère différent.

Ce sont les sommes singulières aux *facteurs positifs* qui correspondent aux moyennes arithmétiques de premier ordre de la série de Fourier, en accordant les mêmes avantages. Permettez moi, en laissant de côté ces sujets dans tout leur étendu, de faire la remarque unique que les coefficients des quadratures mécaniques (nommés coefficients ou nombres de *Cotes* ou de *Christoffel*) se sont montrés *positifs* dans les cas les plus classiques, parmi lesquels la quadrature de *Gauss*, les abscisses de quadrature étant dans ce cas les zéros du polynôme de *Legendre*.

5. Les intégrales *doubles* singulières sont aussi dignes d'intérêt; je parlerai plus tard de celles qui sont attachées à la série de *Laplace*. A présent, je considère l'intégrale double singulière que j'ai employé à la démonstration et généralisation d'un théorème découvert par *Hardy* et *Littlewood*. Cette démonstration se trouve dans ma note parue dans les „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society" (October 1938; received 20 May, read 17 October 1938).

J'ai déjà remarqué qu'en désignant par

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

la suite des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction f, pour fixer les idées, partout continue et de période 2π de la variable indépendante, la somme partielle $s_n = s_n^{(0)}$ s'exprime par l'intégrale de *Dirichlet*

$$\left.\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \psi(t) &= \frac{f(u+t)+f(u-t)}{2} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

c'est-à-dire par une intégrale singulière dont le noyau

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

change exactement n-fois le signe dans l'intervalle d'intégration $0 < t < \pi$, tandis que la suite des moyennes arithmétiques

$$s_0\,, \quad \frac{s_0+s_1}{2}\,, \quad \frac{s_0+s_1+s_2}{3}\,, \ldots, \quad \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}\,, \ldots \tag{5.2}$$

est exprimée par une intégrale singulière

$$s_n^{(1)} = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cdot\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt\,, \tag{5.3}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \psi(t) = \frac{f(u+t)+f(u-t)}{2}\,, \tag{5.4}$$

dont le noyau
$$\left(\frac{\sin (n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2$$
ne le change pas du tout.

Or, en 1913, *Hardy* et *Littlewood* ont considéré, au lieu de la suite des sommes partielles de la série de Fourier

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \quad , \tag{5.5}$$

la suite des carrés de ces sommes partielles, c'est-à-dire la suite

$$s_0^2, s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2, \ldots \quad , \tag{5.6}$$

et ont trouvé qu'en désignant la valeur de la fonction f au point u bref par s,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2}{n+1} = s^2 \ . \tag{5.7}$$

Tandis que le théorème sur la convergence des moyennes arithmétiques vers la limite s signifie pour les écarts $(s_n - s)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1} = 0 \ , \tag{5.8}$$

du théorème sur les moyennes arithmétiques des carrés s'ensuit immédiatement le théorème de *Hardy et Littlewood*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_0 - s)^2 + (s_1 - s)^2 + \cdots + (s_n - s)^2}{n+1} = 0 \ . \tag{5.9}$$

Si l'on part de l'intégrale double qu'on obtient pour le carré des sommes partielles s_n en les exprimant par l'intégrale de Dirichlet

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, dt \ , \tag{5.10}$$

c'est-à-dire de la formule

$$(s_n)^2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \psi(t)\,\psi(v) \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin (2n+1)\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}\, dt\, dv \ , \tag{5.11}$$

la démonstration du théorème (5.7) semble être très difficile parce que le nombre des changements de signe du noyau dans cette intégrale double croît indéfiniment avec n. Nous avons la même situation pour les moyennes arithmétiques du *premier* et du *deuxième* ordre de la suite des carrés $\{s_n^2\}$ des sommes partielles. Ce sont les moyennes arithmétiques de *troisième ordre* de la suite des carrés $\{s_n^2\}$ des sommes partielles, c'est-à-dire

$$\frac{\binom{n+2}{2} s_0^2 + \binom{n+1}{2} s_1^2 + \binom{n}{2} s_2^2 + \cdots + \binom{2}{2} s_n^2}{\binom{n+3}{3}} \tag{5.12}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(t) f(v) k_n(t, v)\, dt\, dv \ ,$$

où

$$k_n(t, v) =$$

$$\frac{\binom{n+2}{2} \dfrac{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2}}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2}} + \binom{n+1}{2} \dfrac{\sin 3\frac{t}{2} \sin 3\frac{v}{2}}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2}} + \cdots + \binom{2}{2} \dfrac{\sin (2n+1)\frac{t}{2} \cdot \sin (2n+1)\frac{v}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{v}{2}}}{\binom{n+3}{3}} \tag{5.13}$$

desquelles dérive l'intégrale singulière double (5.12), dont le noyau $k_n(t, v)$ ne change de signe nulle part dans le carré d'intégration.

Maintenant, en se basant sur l'intégrale double singulière à noyau non-negatif (5.12), on obtient une démonstration assez élémentaire du théorème cité de *Hardy* et *Littlewood* et à la fois une généralisation se rapportant à la série de Fourier double d'une fonction quelconque de deux variables. Voici une application de la formule (5.12). On doit a *Isaïe Schur* un très beau théorème avec une démonstration bien simple qui s'énonce: si la série de puissances $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$ est convergente dans le cercle $|z| < 1$ du plan de la variable complexe z et si la valeur absolue de $f(z)$ ne dépasse pas l'unité dans l'intérieur de ce cercle ($|f(z)| \leqq 1$ pour $|z| < 1$), alors on a pour $|z| \leqq 1$

$$\frac{|s_0(z)|^2 + |s_1(z)|^2 + \cdots + |s_n(z)|^2}{n+1} \leqq 1 \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{5.14}$$

Si l'on remplace dans cet énoncé $s_n(z)$ par la somme partielle ordinaire d'ordre n de la série de Fourier d'une fonction $f(u)$, pour laquelle on a $|f(u)| \leqq 1$ pour toutes les valeurs de u, le théorème *cesse d'être vrai*, c'est-à-dire les valeurs moyennes *ordinaires* des carrés des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction qui ne dépasse jamais en valeur absolue l'unité, peuvent quelques fois dépasser l'unité, mais les moyennes de *troisième* ordre des carrés des dites sommes partielles ne le peuvent pas ; c'est-à-dire tandis que

$$\frac{s_0^2 + s_1^2 + \cdots + s_n^2}{n+1} > 1 \tag{5.15}$$

est possible,

$$\frac{\binom{n+2}{2} s_0^2 + \binom{n+1}{2} s_1^2 + \cdots + \binom{2}{2} s_n^2}{\binom{n+3}{3}} > 1 \tag{5.16}$$

est impossible.

6. Dans le quatrième numéro d'une petite note déjà citée sur la théorie de la sommabilité par les moyennes arithmétiques répétées de la série de Fourier et de la série de Laplace, publiée en 1938 dans les „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society“, j'ai remarqué qu'en appliquant certains théorèmes généraux que j'avais trouvés successivement dès 1932 sur les intégrales singulières, on obtient, dans le cas ou les prémisses se rapportant à la *fonction* dans l'intégrale singulière sont celles de *Lebesgue* ou, plus généralement, celles de *Hardy* et *Littlewood*, des démonstrations simples pour certains théorèmes connus et pour certains nouveaux.

Naturellement, pour obtenir de nouveaux théorèmes, il faut employer aussi des propriétés nouvelles du noyau de l'intégrale singulière. Pour éclaircir un peu ce deuxième point, prenons pour exemple le cas de la série de *Fourier* et celle de *Laplace* et supposons qu'il s'agit de la convergence ordinaire de ces séries ou de la convergence des moyennes arithmétiques des sommes partielles d'un certain ordre de ces séries ; alors, ce sont des propriétés nouvelles des sommes itérées des séries élémentaires

$$1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos nt + \cdots \tag{6.1}$$

$$P_0(\cos t) + 3P_1(\cos t) + \cdots + (2n+1)\cdot P_n(\cos t) + \cdots \quad , \tag{6.2}$$

que j'ai trouvées et qui m'ont permis de poursuivre mes recherches dans la direction indiquée. Si l'on introduit $\cos t = x$ comme variable indépendante ce qui est très important au point de vue des considérations suivantes, ces séries prennent respectivement la forme

$$T_0(x) + 2T_1(x) + 2T_2(x) + \cdots + 2T_n(x) + \cdots \quad , \tag{6.3}$$

$$P_0(x) + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \cdots + (2n+1)\,P_n(x) + \cdots \quad , \tag{6.4}$$

où $T_n(x)$ désigne le polynôme de *Tchebychef* de première espèce, c'est-à-dire la fonction $\cos n\,t$, prise comme fonction de $\cos t = x$ et $P_n(x)$ signifie le polynôme de *Legendre*.

En outre, il est utile aussi de considérer les propriétés analogues des séries encore plus élémentaires

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad , \tag{6.5}$$

$$P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) + \cdots \quad . \tag{6.6}$$

Ma note, citée tout à l'heure, contient seulement quelques lignes sommaires pas aisément compréhensibles, relatives aux sujets dont je viens de parler. Je suis heureux de pouvoir développer un peu ce sujet.

Mais quelles sont les propriétés nouvelles des sommes partielles itérées de différents ordres de la série

$$T_0(x) + 2T_1(x) + \cdots + 2T_n(x) + \cdots \quad , \qquad x = \cos t, \tag{6.7}$$

dont j'ai fait allusion il y a un instant?

Pour commencer par des résultats connus depuis longtemps, il faut mentionner d'abord que la somme partielle d'ordre 0 de la série (6.7) a la valeur, exprimée en t,

$$S_n^{(0)}(x) = T_0(x) + 2\,T_1(x) + \cdots + 2\,T_n(x) = \frac{\sin\,(2\,n+1)\,\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\;; \tag{6.8}$$

donc le polynôme $S_n^{(0)}(x)$ de *Dirichlet*, de degré n en x, change son signe n-fois dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$. Par contre, la somme itérée d'ordre 1

$$S_n^{(1)}(x) = S_0^{(0)}(x) + S_1^{(0)}(x) + \cdots + S_n^{(0)}(x) = \left(\frac{\sin\,(n+1)\,\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{6.9}$$

qui est un polynôme de degré n en x, ne change pas son signe dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Maintenant laissons de côté pour un moment les sommes partielles de *deuxième* ordre de la série

$$T_0(x) + 2T_1(x) + 2T_2(x) + \cdots + 2T_n(x) + \cdots \tag{6.10}$$

et parlons des sommes partielles de troisième ordre $S_n^{(3)}(x)$ de cette série. J'ai démontré en 1932 que les polynômes $S_n^{(3)}(x)$ sont non seulement positifs dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, mais aussi *toujours croissants* dans le même intervalle, c'est-à-dire $S_n^{(3)}(x) > 0$, $\frac{d}{dx} S_n^{(3)}(x) > 0$, pour $-1 < x < +1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Bien entendu, on a $\frac{d}{dx} S_0^{(3)}(x) \equiv 0$.) Cela signifie que le polynôme de cosinus

$$S_n^{(3)}(\cos t) = \binom{n+3}{3} + \binom{n+2}{3} \cdot 2\cos t + \cdots + \binom{3}{3} \cdot 2\cos n t \tag{6.11}$$

est non seulement positif dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$ mais aussi toujours décroissant.

En ce qui concerne les dérivées d'ordre supérieur des moyennes d'ordre supérieur, je ne pouvais pas avancer en ce temps dans cette matière, parce que j'ai examiné toujours les dérivées d'ordre $2, 3, \ldots$ *par rapport à la variable* t. C'est seulement après cinq années que j'ai aperçu qu'on doit différentier *par rapport à la variable* x, si l'on veut obtenir des lois générales et simples.

On obtient ainsi, en faisant le premier pas en avant, que quant à la série

$$T_0(x) + 2T_1(x) + 2T_2(x) + \cdots + 2T_n(x) + \cdots \tag{6.12}$$

qui sert comme série de noyau dans la théorie de la série de Fourier si l'on introduit $\cos t = x$ au lieu de t, les sommes partielles d'ordre 5 de cette série $S_n^{(5)}(x)$ (et par conséquent aussi les moyennes d'ordre supérieur à 5 de cette série en x) sont toutes 1) *positives*, 2) *toujours croissantes* et 3) *convexes*, regardées de dessous, dans tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

En général, les dérivées par rapport à x *d'ordre* k *des moyennes arithmétiques d'ordre* $2k+1$ *de la série*

$$T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n(x)$$

sont toutes positives dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ et par conséquent, il en est de même pour les dérivées d'ordre k des moyennes arithmétiques d'ordre $m = 2k + 1 + l$ *plus grand que* $2k+1$. (Seule exception: $k = 0$, $l = 0$, lorsque nous devons dire „non-négatives" au lieu de „positives".)

On démontre cela tout d'un coup en regardant la fonction génératrice de notre série qui est le noyau de *Poisson*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-r^2}{1-2xr+r^2} &= T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n(x) \cdot r^n, \\ x &= \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Si nous différentions k-fois les deux membres de l'équation (6.13) par rapport à x, nous obtenons la fonction génératrice de la série

$$\frac{d^k T_0(x)}{dx^k} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{d^k T_n(x)}{dx^k} \tag{6.14}$$

et puis si nous multiplions les deux membres de l'équation ainsi reçue par $\dfrac{1}{(1-r)^{m+1}}$, nous obtenons la fonction génératrice de la suite

$$\frac{d^k S_0^{(m)}(x)}{dx^k}, \quad \frac{d^k S_1^{(m)}(x)}{dx^k}, \ldots, \frac{d^k S_n^{(m)}(x)}{dx^k}, \ldots . \tag{6.15}$$

Nous avons supposé que m, c'est-à-dire l'ordre de la somme itérée $S_n^{(m)}(x)$ de la série

$$T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 T_n(x)$$

n'est pas plus petit que $2k+1$, c'est-à-dire $m = 2k+1+l$, où l est un nombre entier non-négatif quelconque.

Enfin, en multipliant et en divisant par $(1-r^2)^k$ le deuxième membre de l'équation obtenue tout-à-l'heure, on arrive à la fonction génératrice de la suite des dérivées supérieures par rapport à x des sommes d'ordre supérieure de la série-noyau de la série de Fourier :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k S_n^{(m)}(x)}{dx^k} r^n = 2^k k! \left(\frac{1}{1-r}\right)^l \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^k \left(\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2xr+r^2)}\right)^{k+1} \\ &k = 0, 1, 2, \ldots , \\ &l = 0, 1, 2, \ldots , \\ &m = 2k+1+l . \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Les séries de puissances en r

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots , \tag{6.17}$$

$$\frac{r}{1-r^2} = r + r^3 + r^5 + \cdots , \tag{6.18}$$

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2rx+r^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 r^n \tag{6.19}$$

ayant des coefficients non-négatifs, il est claire que les coefficients du produit (6.16) sont aussi non-négatifs, même *positifs*, si l'indice n n'est pas plus petit que k (excepté $k = 0,\ l = 0$, lorsque nous obtenons tout simplement la suite

$$1 = S_0^{(1)}(x), \quad S_1^{(1)}(x), \quad S_2^{(1)}(x), \dots \quad , \tag{6.20}$$

qui est *non-négative*).

7. Qu'il me soit permis d'attirer l'attention sur la simplicité de la démonstration de la positivité des polynômes rationnels de x (ou si l'on veut des polynômes de cosinus en t) par *la méthode des fonctions génératrices* que j'ai appliquée dans cet ordre de questions depuis si longtemps. Je ne connais pas une autre voie qui pourrait conduire aussi simplement au même but.

Mais la même méthode conduit au but également dans le cas beaucoup plus difficile de la série

$$P_0(x) + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \dots + (2n+1)P_n(x) + \dots \quad , \tag{7.1}$$

qui se présente comme série de noyau dans la théorie de la série de *Laplace*.

Si l'on part de la fonction génératrice

$$\frac{1-r^2}{(1-2x\cdot r+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\cdot P_n(x)\, r^n \quad , \tag{7.2}$$

ou $P_n(x)$ désigne le polynôme de *Legendre* d'indice n, on obtient, par un calcul très facile et entièrement analogue au précédent, pour la suite des dérivées d'ordre k par rapport à x de la somme d'ordre $m = 2k+2+l$ de la série de noyau (7.1), désignée de nouveau par

$$\frac{d^k S_n^{(m)}(x)}{dx^k}\ , \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{7.3}$$

la fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k S_n^{(m)}(x)}{dx^k}\, r^n \tag{7.4}$$

$$= 3.5\dots(2k+1)\left(\frac{1}{1-r}\right)^l \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^k \left(\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2xr+r^2)}\right)^{k+1} \frac{1}{(1-r)\sqrt{1-2xr+r^2}}$$

où

$$k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$
$$l = 0, 1, 2, \dots\ ,$$
$$m = 2k+2+l\ .$$

Les coefficients des séries de puissance en r

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots\ , \tag{7.5}$$

$$\frac{r}{1-r^2}=r+r^3+r^5+\cdots\ , \tag{7.6}$$

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2xr+r^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\,(n+1)\,\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 r^n\ , \tag{7.7}$$

$$\frac{1}{(1-r)\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_t^{\pi}\frac{\left(\sin\,(n+1)\,\frac{u}{2}\right)^2}{\sin\frac{u}{2}\sqrt{2\,(\cos t-\cos u)}}\,du\right)r^n \tag{7.8}$$

étant non-négatifs, on obtient de nouveau une série de puissances à coefficients non-négatifs en r, si l'on forme leur produit après avoir élevé chacune d'elles a une puissance entière non-négative quelconque. (Dans notre cas, les coefficients du produit sont *positifs* dans tout l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, $n<k$ étant toujours exclus.)

Pour obtenir (7.8) nous nous sommes servis de l'intégrale de Mehler

$$P_n(\cos t)=\frac{2}{\pi}\int_t^{\pi}\frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{u}{2}}{\sqrt{2\,(\cos t-\cos u)}}\,du\ . \tag{7.9}$$

Nous avons donc obtenu que pour la série

$$P_0(x)+3P_1(x)+5P_2(x)+\cdots \tag{7.10}$$

procédant suivant les polynômes de *Legendre* et qui est décisive pour les propriétés de convergence et de sommabilité de la série de *Laplace* d'une fonction donnée sur la sphère, les moyennes d'ordre *deux* sont *positives* dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$; que les moyennes d'ordre *quatre* sont non seulement *positives* dans ce même intervalle, mais qu'elles sont toutes *toujours croissantes* ; que les moyennes d'ordre *six* sont *positives*, *toujours croissantes* et *convexes* regardées d'en bas ; etc.

8. Pendant le siècle passé, on ne s'occupait pas beaucoup des *polynomes trigonométriques positifs* (ou non-négatifs), ou de *la positivité* d'un polynôme entier, ou de celle des polynômes entiers ordonnés suivant les polynômes de *Legendre*, de *Laguerre*, d'*Hermite*, etc., dans tel ou tel intervalle, qui peut être fini ou infini. Dans notre siècle cependant, une certaine branche de l'algèbre s'est développée, qui s'efforce de trouver des méthodes propres à décider la question importante de la positivité, dont nous venons de parler et qui est aujourd'hui en plein développement. On peut dire que la théorie d'un grand nombre d'intégrales singulières appartient plutôt à l'algèbre qu'à l'analyse. Le double caractère de ce domaine de recherche ne manque pas de le faire attractif.

9. J'ai déjà dit que je retournerais aux moyennes arithmétiques de *deuxième* ordre $S_n^{(2)}(x)$ de la série

$$T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n(x) , \tag{9.1}$$

qui succèdent immédiatement les moyennes d'ordre 1, qui sont non-négatives et devancent les moyennes d'ordre 3, qui sont positives et toujours croissantes dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, comme nous l'avons vu tout-à-l'heure. La recherche des propriétés utiles des moyennes d'ordre *deux* $S_n^{(2)}(x)$ de cette série de noyau ne se fait pas par l'application de la méthode des fonctions génératrices. Leur étude est plus délicate. D'abord, il est clair qu'elles sont positives dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Pour étudier plus loin l'allure de ces moyennes arithmétiques de deuxième ordre $S_n^{(2)}(x)$ comme fonction de x dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, coupons notre intervalle de longueur 2 en deux parties, prenant pour première partie $-1 \leqq x \leqq -0.5$ (I_1), c'est-à-dire *un* quart de l'intervalle total et pour deuxième les *trois* quarts qui restent : $-0.5 \leqq x \leqq +1$ (I_2). Raccourcissons maintenant les intervalles I_1 et I_2 par ε à leurs extrémités ; nous obtenons ainsi les intervalles i_1 et i_2,

$$i_1 : \quad -1 + \varepsilon \leqq x \leqq -0.5 - \varepsilon , \tag{9.2}$$

$$i_2 : \quad -0.5 + \varepsilon \leqq x \leqq +1 - \varepsilon . \tag{9.3}$$

Maintenant, en appliquant ma formule asymptotique (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, tome 13 (1933), No. 6 ; pag. 83, 84)

$$\frac{d S_n^{(2)}(x)}{dx} = \frac{1}{4\,n \sin^4 \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}} \left(2 \cos \frac{t}{2} + \cos (2\,n + 3)\, \frac{t}{2} + \eta_n(t)\right) ,$$

$$x = \cos t , \tag{9.4}$$

où $\lim_{n \to \infty} \eta_n(t) = 0$, uniformément dans l'intervalle $-1 + \varepsilon \leqq x \leqq +1 - \varepsilon$, on obtient le résultat surprenant que 1) si ε est aussi petit qu'on voudra mais fixé et 2) si, correspondant au choix de ε, l'indice n est suffisamment grand, la fonction $S_n^{(2)}(x)$ est toujours croissante dans l'intervalle i_2, tandis qu'elle à un maximum et un minimum en n'importe quelle petite partie fixe de l'intervalle i_1, si n est suffisamment grand. *Szegö* a démontré dans son travail „Power series with multiply monotonic sequences of coefficients" (Duke Mathematical Journal, Vol. 8, No. 3, September 1941, pag. 560, inégalité (9)) que $S_n^{(2)}(x)$ est toujours croissante dans l'intervalle $-0.4 \leqq x \leqq +1$ et pour toutes les valeurs de n; et enfin mon jeune élève regretté, *Nicolas Schweitzer*, victime de la guerre, a démontré que toutes les moyennes $S_n^{(2)}(x)$ sont toujours croissantes dans l'intervalle $-0.5 \leqq x \leqq +1$, résultat qu'on ne peut pas améliorer d'après ce que nous avons dit au commencement. (Le manuscript de *Schweitzer* que je possède porte la date du 28 décembre 1943.)

10. J'ai déjà fait mention que les propriétés des sommes partielles obtenues par sommation répétée de la série

$$T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n$$

sont utiles non seulement dans la théorie des intégrales singulières, mais aussi dans d'autres domaines de recherches.

En appliquant le fait que les sommes partielles de *troisième* ordre de la série divergente

$$T_0(x) + 2T_1(x) + \cdots + 2T_n(x) + \cdots \tag{10.1}$$

sont toujours croissantes dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ (c'est-à-dire le fait que les sommes partielles de *troisième* ordre de la série

$$T_1'(x) + T_2'(x) + \cdots + T_n'(x) + \cdots \tag{10.2}$$

sont non-négatives dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$), j'ai démontré en 1936 le théorème suivant:

Si la suite $\{c_n\}$ des coefficients de la série de puissances

$$c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{10.3}$$

est monotone du quatrième ordre, la somme de la série est univalente dans le cercle d'unité $|z| < 1$ du plan de la variable complexe.

Pour la série

$$T_1(x) + T_3(x) + T_5(x) + \cdots, \tag{10.4}$$

j'ai trouvé que ce sont déjà les sommes partielles de *deuxième ordre qui sont toujours croissantes dans l'intervalle total* $-1 \leqq x \leqq +1$, mais je n'ai pas réussi à démontrer ce résultat au moyen de la méthode des fonctions génératrices ; la démonstration est un peu difficile mais pas sans intérêt. Une conséquence de cette propriété de notre série

$$T_1 + T_3 + T_5 + \cdots \tag{10.5}$$

est le théorème suivant que j'ai trouvé en 1936 :

Si la suite $\{c_n\}$ *des coefficients de la série de puissances*

$$c_1 z + c_2 z^3 + c_3 z^5 + \cdots \tag{10.6}$$

est monotone de troisième ordre, la série est convergente et univalente dans le cercle d'unité, $|z| < 1$.

On ne peut pas améliorer ce théorème ; il n'est pas vrai si l'on dit : „monotone de deuxième ordre" au lieu de „troisième ordre". Par contre, le théorème précédent se rapportant à la série complète de puissances reste encore vrai si la suite des coefficients est monotone de troisième ordre au lieu d'être monotone de quatrième ordre. C'est-ce qui a été montré par *Szegö* en 1941 dans son travail cité. La démonstration de ce théorème n'est pas facile ; il n'en est même du fait qu'on ne peut pas réduire l'ordre de 3 à 2.

Pour résumer on peut dire : *Les séries de puissances avec* $c_1 > 0$

$$c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{10.7}$$

$$c_1 z + c_2 z^3 + \cdots + c_n z^{2n-1} + \cdots \tag{10.8}$$

sont univalentes pour $|z| < 1$ *si la suite* $c_1, c_2, \ldots$ *est monotone d'ordre* 3 ; *ces théorèmes généraux ne sont plus vrais, si l'on dit* 2 *au lieu de* 3.

(Une suite est dite d'être monotone du troisième ordre, si

$$c_1 > 0, \quad c_2 \geqq 0, \quad c_3 \geqq 0, \quad c_4 \geqq 0, \ldots$$

$$c_1 - c_2 \geqq 0, \; c_2 - c_3 \geqq 0, \; c_3 - c_4 \geqq 0, \ldots$$

$$c_1 - 2c_2 + c_3 \geqq 0, \; c_2 - 2c_3 + c_4 \geqq 0, \; c_3 - 2c_4 + c_5 \geqq 0, \ldots$$

$$c_1 - 3c_2 + 3c_3 - c_4 \geqq 0, \; c_2 - 3c_3 + 3c_4 - c_5 \geqq 0, \ldots)$$

11. Une autre question intéressante est la suivante. Prenons une série

$$c_1 \cos t + c_2 \cos 2t + \cdots + c_n \cos n\, t + \cdots = f(t) \qquad (11.1)$$

pour laquelle la suite $\{c_n\}$ est simplement monotone, avec $c_1 > 0$, $\lim c_n = 0$; alors $f(t)$ a au moins un changement de signe dans l'intervalle $0 < t < \pi$, mais en pourra avoir tant qu'on voudra dans cet intervalle (p. e. $\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt$, si n est suffisamment grand). La même chose est vraie si $\{c_n\}$ est doublement monotone (p. e. $n \cos t + (n-1) \cos 2t + \cdots + \cos n\, t$). Si nous omettons pour un moment le cas de 3, nous pouvons constater que, si la suite $\{c_n\}$ est *quadruplement* monotone, la fonction a *un et un seul* changement de signe dans l'intervalle $0 < t < \pi$. En effet, une conséquence du fait que les sommes partielles de troisième ordre de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(x)$ sont toujours croissantes dans $-1 \leqq x \leqq +1$ est que notre fonction $f(t)$ sous (11.1) est toujours décroissante dans l'intervalle $0 < t < \pi$. Cela n'est pas vrai si la suite $\{c_n\}$ est seulement triplement monotone, pourtant le théorème suivant subsiste:

Si la suite des coefficients dans la série trigonométrique

$$c_1 \cos t + c_2 \cos 2t + \cdots + c_n \cos n\, t + \cdots = f(t) \qquad 0 < t < \pi \qquad (11.2)$$

est triplement monotone avec $c_1 > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$, *alors sa somme* $f(t)$ *a un et seulement un changement de signe dans l'intervalle* $0 < t < \pi$. *Ce théorème n'est pas vrai si l'on dit „doublement monotone" au lieu de „triplement monotone".*

Dans la démonstration de ce théorème j'emprunte un élément de démonstration du travail de *Szegö* dont j'ai parlé il y a un instant.

12. Après ces digressions un peu longues je retourne aux intégrales singulières (int. s.) en me restreignant à quelques remarques courtes. J'omets entièrement l'histoire si intéressante comment s'est glissé dans cette théorie l'idée de distinguer nettement entre intégrales singulières à noyau de signe changeant et de signe constant. Cette première classification des int. s. se trouve dans le Mémoire de *Lebesgue*, intitulé „Sur les intégrales singulières" et paru en 1910 dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (troisième s., T. I.). Dans un travail de *Lebesgue*, paru aussi en 1910 dans le Bulletin de la Société mathématique de France „Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz" il ajoute à la dernière page la remarque historique intéressante, que déjà *Ulisse Dini*, dans les nos. 23 et 24 de son ouvrage „Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzione di una variabile reale", paru en 1880 à Pise, a fait la distinction importante entre noyau de signe changeant et constant, en prononçant même certains théorèmes généraux de convergence sur quelques espèces d'intégrales singulières a noyau positif.

On sait que *Lebesgue* a fait (en 1905) la découverte que ce n'est pas le *signe* du noyau duquel dépend la question de la convergence ou divergence de l'intégrale singulière quand le paramètre entier n tend vers infini ; c'est plutôt *l'intégrale de la valeur absolue du noyau* qui est décisive dans cette question, si en outre le noyau satisfait a certaines autres conditions. Notamment si l'intégrale de la valeur absolue du noyau reste bornée pour toutes les valeurs entières de n, il y a *convergence* pour $n \to \infty$, mais si elle ne reste pas bornée, cette intégrale, il pourra être *divergence*. Mais il n'est pas ici le lieu de développer ces idées de *Lebesgue* ; je retourne à l'intégrale à noyau positif. Ce cas particulier, qui se présente très souvent dans l'analyse, est beaucoup plus élémentaire que le cas général mentionné à l'instant même. [2])

13. Je le répète, on a divisé les intégrales singulières en deux classes depuis longtemps ; cependant, depuis 1900, cette classification a gagné certainement en accentuation, parce qu'on devait alors confronter l'int. s.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\,\frac{\sin\,(2\,n+1)\,\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{13.1}$$

qui représente la somme partielle, et l'autre

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\,(n+1)\,\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \tag{13.2}$$

qui représente la moyenne arithmétique des sommes partielles de la série de Fourier.

---

[2]) En ce qui concerne la littérature de ces dernières décades si riche en des résultats importants se rapportant aux différentes branches du sujet de notre conférence, je suis contraint à ne faire que mentionner — outre les noms déjà cités dans le texte — encore les suivants: *Borel, Bosanquet, Carslaw, Erdös, Hahn, Hobson, D. Jackson, Kaczmarcz, Ch. N. Moore, Plessner, Pólya, F. Riesz, M. Riesz, Rogosinski, Sansone, Schechter, Schlemper, Schlesinger, Shohat, Steinhaus, Titchmarsh, Tonelli, Turán, de la Vallée Poussin, Zygmund.*

Mais je m'ai posé la question suivante : peut-on aussi *classifier* la totalité des intégrales singulières a noyau positif, ou au moins une partie importante d'elles ? Au premier regard, elles se ressemblent comme les pinguins ; peut-on faire quand-même une distinction générale et utile ? La réponse est affirmative. Prenons p. e. une des intégrales à noyau positif la plus simple, à laquelle j'ai été conduit en 1925

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \cdot \frac{n}{(1+n\,t)^2}\,dt\ , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{13.3}$$

Calculant les derivées successives du noyau

$$k_n(t) = n(1 + n\,t)^{-2}\ , \tag{13.4}$$

nous trouvons

$$k_n'(t) = -\,2n^2(1+n\,t)^{-3}\ , \qquad k_n''(t) = 2\cdot 3\cdot n^3(1+n\,t)^{-4}, \ldots,$$
$$k_n^{(s)}(t) = (-\,1)^s\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(s+1)\,n^{s+1}(1+n\,t)^{-(s+2)}, \ldots \tag{13.5}$$

et nous voyons que $k_n^{(s)}(t)$ a le même signe pour chaque valeur de s dans l'intervalle de l'intégration et que ce signe constant est alternativement positif et négatif si s parcourt successivement les nombres entiers non-négatifs : $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Nous pouvons donc dire que dans ce cas le noyau $k_n(t)$ est *parfaitement décroissant* dans l'intervalle d'intégration $(0, +\infty)$, (comme $\frac{1}{1+t}$ dans le même intervalle). Etant d'autre part $\lim\limits_{n=\infty} k_n^{(s)}(t) = 0$, même uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$ après avoir fixé le nombre positif ε (en outre quelconque) et l'ordre s de la différentiation, on peut conclure

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{+\infty} \psi(t) \frac{n}{(1+n\,t)^2}\,dt = \psi\ , \tag{13.6}$$

si n'importe laquelle des conditions

$$\psi_0(t) = \psi(t) \to \psi\ , \qquad \psi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \psi(u)\,du \to \psi, \ldots,$$
$$\ldots \psi_s(t) = \frac{s}{t^s}\int_0^t \psi(u)\,(t-u)^{s-1}\,du \to \psi, \ldots \tag{13.7}$$

pour $t \to +0$ est remplie, c'est-à-dire la condition classique, ou celle de *Lebesgue* ou une condition de *Hardy-Littlewood*.

En général, on a :

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a \psi(t)\, k_n(t)\, dt = \psi \ , \qquad (a > 0) \ , \tag{13.8}$$

si

1) $\operatorname{sgn} \dfrac{d^\nu k_n(t)}{dt^\nu} = (-1)^\nu \quad$ pour $\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, s, \quad 0 \leqq t \leqq a,$

2) $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{d^\nu k_n(t)}{dt^\nu} = \lim\limits_{n=\infty} k_n^{(\nu)}(t) = 0$

uniformément dans l'intervalle $0 < \varepsilon \leqq t \leqq a$ *pour chaque choix du nombre positif* ε,

3) $\lim\limits_{n=\infty} \int_0^a k_n(t)\, dt = 1,$

4) $\psi(t)$ *est une fonction intégrable dans l'intervalle* $0 \leqq t \leqq a$ *pour laquelle au point* $t = +0$ *la condition généralisée de Lebesgue, c'est-à-dire la condition de Hardy-Littlewood*

$$\frac{s}{t^s} \int_0^t \psi(u)\,(t-u)^{s-1}\, du \to \psi \ , \qquad \text{pour} \quad t \to +0 \ , \tag{13.9}$$

est remplie.

La démonstration de ce théorème est d'une extrême simplicité. Si nous introduisons les valeurs moyennes intégrales $\psi(t) = \psi_0(t)$, $\psi_1(t), \ldots, \psi_s(t)$ définies tout-à-l'heure et si nous désignons le noyau, fonction toute régulière de t, par $k(t)$ (c'est-à-dire si nous omettons pour un instant l'indice n), nous obtenons par intégration par partie s-fois répétée la formule connue :

$$\int_0^a \psi(t)\, k(t)\, dt = \int_0^a \psi(t) \left(\sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu \frac{k^{(\nu)}(a)}{\nu\,!} (a-t)^\nu \right) dt$$
$$+ \int_0^a \psi_s(t)\,(-1)^s\, k^{(s)}(t)\, \frac{t^s}{s\,!}\, dt \ , \tag{13.10}$$

ou a est un nombre positif fixe. Posons $\psi(t) \equiv 1$ dans cette formule (13.10) ; nous obtenons

$$\int_0^a k(t)\, dt = \int_0^a \sum_{\nu=0}^{s-1} \left((-1)^\nu \frac{k^{(\nu)}(a)}{\nu\,!} (a-t)^\nu \right) dt + \int_0^a (-1)^s k^{(s)}(t)\, \frac{t^s}{s\,!}\, dt \ . \tag{13.11}$$

D'après la condition 1) les nombres

$$(-1)^0 k_n^{(0)}(a) \ , \qquad (-1)^1 k_n^{(1)}(a), \ldots \qquad (-1)^{s-1} k_n^{(s-1)}(a) \tag{13.12}$$

sont *non-négatifs* ; la fonction $(-1)^s k_n^{(s)}(t)$ est aussi *non-négative* dans l'intervalle $(0, a)$; enfin, la différence $(a - t)$ est évidemment *positive* dans l'intervalle $0<t<a$, donc tous les $s+1$ termes du second membre de l'équation (13.11) sont non-négatives, d'où résulte l'inégalité importante

$$\int_0^a (-1)^s k_n^{(s)}(t) \frac{t^s}{s\,!} dt \leqq \int_0^a k_n(t)\, dt < C \tag{13.13}$$

pour toutes les valeurs entières de n, en tenant compte aussi de la condition 3).

De la condition 2) nous concluons $\lim k_n^{(\nu)}(a) = 0$, pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots, s-1$; donc le premier terme du second membre de l'équation (13.10) tend vers 0 si $n \to \infty$.

Dans la condition 4) nous pouvons, sans restreindre la généralité, prendre $\psi = 0$, c'est-à-dire soumettre $\psi(t)$ à la condition

$$\lim_{t=+0} \psi_s(t) = \lim_{t=+0} \frac{s}{t^s} \int_0^t \psi(t)\,(t-u)^{s-1}\, du \to 0\ . \tag{13.14}$$

Alors, si δ désigne un nombre positif, nous pouvons prendre a si petit que $|\psi_s(t)| \leqq \delta$ pour $0 \leqq t \leqq a$. La valeur de a étant ainsi choisie et fixée, nous obtenons pour le second terme du second membre de l'équation (13.10), en tenant compte de *la positivité de* $(-1)^s k_n^{(s)}(t)$ dans l'intervalle $0<t<a$, que sa valeur absolue est

$$\leqq \delta \int_0^a (-1)^s k_n^{(s)}(t) \frac{t^s}{s\,!} dt\ , \tag{13.15}$$

ce qui est, en vertu de (13.13),

$$\leqq \delta C\ . \tag{13.16}$$

Donc de l'équation (13.10) il s'ensuit immédiatement que

$$\left| \int_0^a \psi(t)\, k_n(t)\, dt \right| \leqq \delta + \delta C = (1+C)\,\delta\ , \tag{13.17}$$

si n est suffisamment grand, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \int_0^a \psi(t)\, k_n(t)\, dt = 0\ , \tag{13.18}$$

et notre théorème est démontré.

14. Autres types d'int. s., encore plus importantes, sont

$$\int_0^\pi \psi(t)\, k_n(x)\, dt\ , \qquad x = \cos t\ , \tag{14.1}$$

$$\int_0^\pi \psi(t)\, k_n(x) \sin t\, dt\ , \qquad x = \cos t\ , \tag{14.2}$$

où $k_n(x)$ est une fonction rationelle entière de degré n en x, positive avec quelques dérivées d'ordre superieur par rapport à x, dans l'intervalle $-1 < x < +1$, ces dérivées tendant uniformément vers zéro dans l'intervalle $-1 \leqq x < 1 - \varepsilon$, si $n \to \infty$. *Ces deux types d'intégrales jouent un rôle important dans la théorie de la sommabilité par les moyennes arithmétiques de la série de Fourier et de la série de Laplace*; pour chacun d'eux un théorème analogue à celui du no. 13 est valable.

15. Nous ne voulons pas ici développer plus loin ce sujet, seulement faire, pour terminer, deux remarques, dans lesquelles s'exprime l'essence de la tendence de mes recherches, exposées dans ces lignes.

1) Si la fonction est *continue* à un point du cercle d'unité, ou à celui de la sphère d'unité, quelles sont, parmi les moyennes arithmétiques d'ordre entier et d'ordre autant petit que possible, *les plus simples*? La réponse est la suivante : dans la théorie de la série de *Fourier*, ce sont les moyennes d'ordre *un*, dans celle de la série de *Laplace*, les moyennes d'ordre *deux*.

2) Mais quelle est la réponse, si dans le cas de la série de Fourier de la fonction $f(u)$ c'est *la condition de Lebesgue*

$$\frac{1}{2h} \int_{u-h}^{u+h} f(t)\, dt \to f \; , \qquad \text{si} \quad h \to +0 \; , \tag{15.1}$$

qui *est remplie* et si aussi dans le cas de la série de *Laplace* c'est la condition analogue à celle de *Lebesgue* qui est remplie?

Nous avons la réponse suivante : ce ne sont pas les moyennes d'ordre deux[3]), ce sont les moyennes d'ordre *trois* (de la série de *Fourier*) resp. celles d'ordre *quatre* (de la série de *Laplace*) qui sont les plus simples, si, je le répète, c'est la condition de *Lebesgue*, à laquelle la fonction développée est soumise.

(Reçu le 15 août 1948.)

[3]) En 1912, au Congrès international des Mathématiciens à Cambridge (Angleterre) j'ai eu le plaisir de parler avec M. *Montel* sur les moyennes de la série de Fourier. Il m'avait dit, que le théorème de *Lebesgue* se rapportant aux moyennes arithmétiques de *deuxième* ordre de la série de Fourier (dont s'est occupé aussi *Fatou*) est particulièrement simple, et en même temps d'une portée plus générale que celle de premier ordre. En continuant dans ma conférence une conversation mathématique tenue il y a 36 ans, nous voyons maintenant que les moyennes d'ordre *trois* sont encore *plus simples* que celles d'ordre deux, parce que leur noyau est non seulement *positif*, mais en même temps *monotone*, dans tout l'intervalle d'intégration.