Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Über eine gewisse Klasse von elliptischen Riemannschen Flächen.

Autor: Moppert, Karl-Felix

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19758

Über eine gewisse Klasse von elliptischen Riemannschen Flächen

Von Karl-Felix Moppert, Basel

Wir nennen eine Funktion von z, die im Innern des offenen Einheitskreises E_z der z-Ebene regulär ist und dort die Werte 0 und 1 nicht annimmt, eine p-Funktion. Sind weiter v_0 und v_1 zwei ganze Zahlen > 1, so nennen wir eine Funktion von z, die für $z \prec E_z$ regulär ist und die dort den Wert 0 nur in durch v_0-, den Wert 1 nur in durch v_1 teilbarer Mehrfachheit annimmt, eine m-Funktion (mit den charakteristischen Indizes v_0 und v_1). Wir fragen:

„Für welche Zahlenpaare v_0 und v_1 gibt es zwischen der zugehörigen m-Funktion und der p-Funktion eine rationale Funktion $m = R(p)$, die den folgenden Bedingungen genügt: setzt man für p irgendeine p-Funktion $p(z)$ ein, so wird $R(p(z))$ eine m-Funktion. Setzt man anderseits für m irgendeine m-Funktion $m(z)$ ein, so wird jede durch Auflösung der Relation $m = R(p)$ nach p entstehende Funktion eine p-Funktion."

Dieses Problem habe ich in meiner Dissertation[1]) mit elementaren Mitteln gelöst. Den Ausgangspunkt bildete eine von Herrn Ostrowski[2]) angegebene spezielle Relation der Form $m = R(p)$. Hier gehen wir davon aus, daß die Riemannsche Fläche, in die die schlichte p-Ebene durch die Relation $m = R(p)$ abgebildet wird, den folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen genügen muß:

1) sie hat an keiner von 0,1 und ∞ verschiedenen Stelle eine Verzweigung;

2) bei $m = 0$ liegen lauter genau $v_0 - 1$-fache, bei $m = 1$ lauter genau $v_1 - 1$-fache Verzweigungen übereinander;

3) die Punkte $p = 0$, $p = 1$, $p = \infty$, und nur diese, gehen in $m = \infty$ über.

---

[1]) „Über Relationen zwischen m- und p-Funktionen", Verh. d. nat. Ges. Basel, 1949.

[2]) *A. Ostrowski*, „Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt", Comm. Math. Helv. 5 (1933).

Zu diesen Bedingungen kommt man leicht, wenn man bedenkt, daß man zu jedem von 0 und 1 verschiedenen Wert P_0 bzw. M_0 eine p-Funktion $p(z)$ bzw. eine m-Funktion $m(z)$ bilden kann, die diesen Wert in E_z einfach annimmt, und daß man auch eine m-Funktion bilden kann, die in E_z den Wert 0 genau v_0-fach annimmt bzw. eine m-Funktion, die in E_z den Wert 1 genau v_1-fach annimmt.

Wir bilden nun die Riemannsche Fläche der Variabeln m topologisch auf die schlichte p-Ebene ab. Wir folgen dabei der Darstellung von Herrn Nevanlinna[3]), geben aber dem dort beschriebenen Speiserschen Streckenkomplex[4]) vor dem „Graph" den Vorzug.

Jeder $k-1$-fachen Verzweigung der Riemannschen Fläche mit der Variabeln m ist ein $2k$-Eck im Streckenkomplex in der p-Ebene eineindeutig zugeordnet. Insbesondere entspricht jedem regulären Punkt der m-Fläche, der als möglicher Verzweigungspunkt behandelt worden ist, im Streckenkomplex eine Doppelstrecke (Zweieck).

Nach 1) können wir also von der Annahme ausgehen, daß unsere Fläche über genau drei Grundpunkten verzweigt sei. Das bedeutet für den Streckenkomplex, daß von jedem seiner Eckpunkte genau drei Bögen ausgehen. Jeder Eckpunkt im Streckenkomplex entspricht einem Halbblatt der Riemannschen Fläche. Hat die Fläche n Blätter, ist e die Eckenzahl, k die Anzahl der Bögen, f die Anzahl der Polygone im Streckenkomplex, so folgt $e = 2n$, $k = 3n$, und damit aus der Eulerschen Polyederformel $f = n + 2$.

Wir bezeichnen nun die Polygone im Streckenkomplex mit 0, 1 oder ∞, je nachdem, ob das betreffende Polygon einer bei $m = 0$, $m = 1$ oder $m = \infty$ liegenden Verzweigung zugeordnet ist. Jedem mit 0 bezeichneten Polygon entspricht genau ein Punkt der p-Ebene, der durch $m = R(p)$ in $m = 0$ übergeht. Die entsprechende Bedeutung haben die mit 1 bzw. ∞ bezeichneten Polygone. Der Streckenkomplex enthält nach 2) offenbar $\frac{n}{v_0}\, 2v_0$-Ecke, $\frac{n}{v_1}\, 2v_1$-Ecke und nach 3) noch genau drei weitere Polygone, die mit ∞ bezeichnet sind. So folgt $f = \frac{n}{v_0} + \frac{n}{v_1} + 3 = n + 2$, oder

$$\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{n} = 1 \ ,$$

wo n durch v_0 und v_1 teilbar sein muß.

---

[3]) *R. Nevanlinna*, „Eindeutige analytische Funktionen", Berlin, Julius Springer 1936, p. 278 ff.

[4]) *A. Speiser*, „Über Riemannsche Flächen", Comm. Math. Helv. 2 (1930).

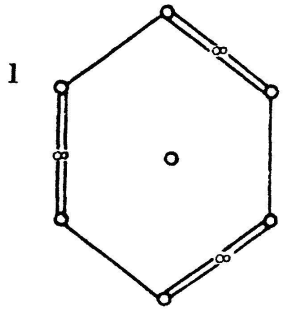
Gehen wir von der Annahme $v_1 \geq v_0$ aus, so hat die obige Gleichung nur die folgenden Lösungen:

A) $v_0 = v_1 = n = 3$,

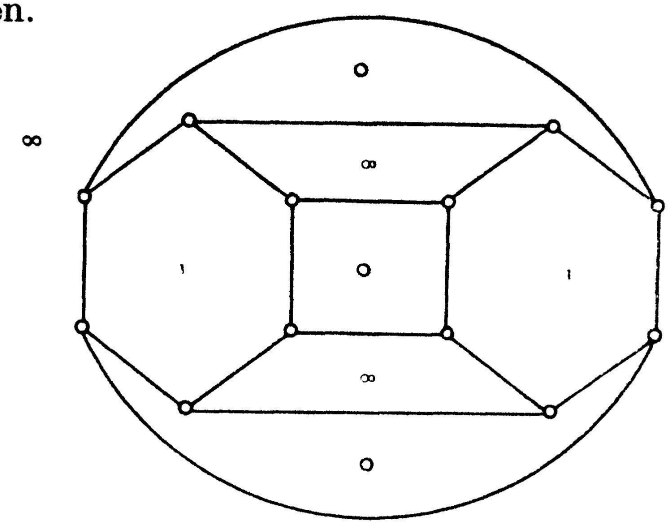
B) $v_0 = 2, \quad v_1 = 3, \quad n = 6,$

C) $v_0 = 2, \quad v_1 = 4, \quad n = 4.$

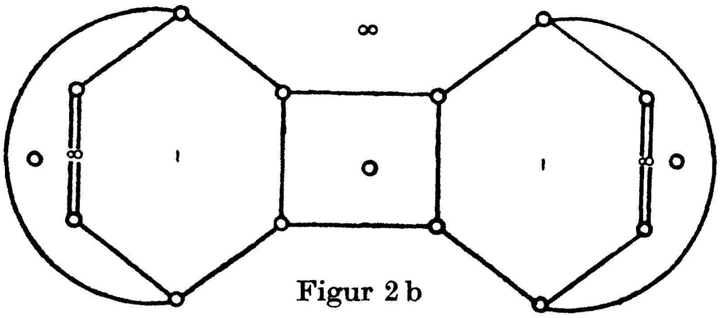
In jedem dieser Fälle konstruieren wir nun den Streckenkomplex und damit die Riemannsche Fläche. Wir kennen jedesmal e, f und k und wissen von allen Polygonen, außer jedesmal von drei derselben, wieviel Ecken sie haben. Daraus, daß von jedem Eckpunkt genau drei Bögen ausgehen, folgert man leicht, daß je zwei gleich bezeichnete Polygone zueinander punktfremd sein müssen.



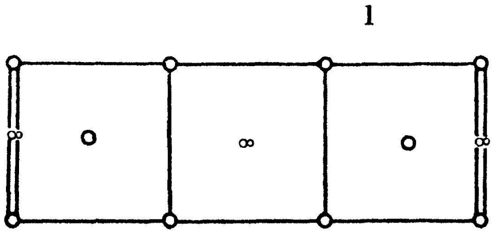
Figur 1



Figur 2 a



Figur 2 b



Figur 3

So reduziert sich die Aufgabe auf ein ebenes topologisches Problem. Im Falle A) ist die Lösung eindeutig (Fig. 1). Dem Punkt $m = \infty$ entsprechen drei Zweiecke, dort liegen die Blätter der Fläche schlicht übereinander. Im Falle B) haben wir zwei Lösungen (Fig. 2a und 2b). Die entsprechende Riemannsche Fläche hat das eine Mal bei $m = \infty$ drei einfache Verzweigungen, das andere Mal eine dreifache Verzweigung, während zwei Blätter dort schlicht übereinanderliegen. Im Falle C) ist die Lösung wieder eindeutig; bei $m = \infty$ hat die Fläche eine einfache Verzweigung und zwei schlicht übereinanderliegende Blätter.

(Eingegangen den 30. Dezember 1948.)