Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Sur les bases du groupe alterné.

Autor: Piccard, Sophie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19756

Sur les bases du groupe alterné

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

Définition 1. Quel que soit l'entier $n \geq 4$, il existe des couples de substitutions du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ d'ordre $n!/2$, qui engendrent le groupe $\mathfrak{A}_n$ tout entier par composition finie alors que ce groupe ne saurait être engendré par une seule de ses substitutions. Nous appelons *base* du groupe $\mathfrak{A}_n$ tout couple de substitutions génératrices de ce groupe.

Soit n un entier ≥ 4, soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre $n!$, dont les substitutions permutent les éléments $1, 2, \ldots, n$, et soit $\mathfrak{A}_n$ le sous-groupe alterné de $\mathfrak{S}_n$.

Proposition 1. Quelle que soit la base S, T du groupe $\mathfrak{A}_n$ et quelle que soit la substitution non identique R du groupe $\mathfrak{S}_n$, R ne saurait être permutable aussi bien avec S qu'avec T.

Démonstration. Soit S, T une base quelconque de $\mathfrak{A}_n$ et soit R une substitution non identique quelconque de $\mathfrak{S}_n$.

Supposons, contrairement à ce qu'il s'agit de démontrer, que $RSR^{-1} = S$ et que $RTR^{-1} = T$. Comme S, T est une base de $\mathfrak{A}_n$, quelle que soit la substitution U de $\mathfrak{A}_n$, U s'obtient par composition finie de S et T. Soit $U = f(S,T)$. Mais alors $RUR^{-1} = Rf(S,T)R^{-1} = f(S,T)$, puisque R est permutable aussi bien avec S qu'avec T. Donc R est permutable avec toutes les substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$. Or, ceci est contradictoire. En effet, comme $R \neq 1$, par hypothèse, il existe deux éléments (au moins) a, b de la suite $1, 2, \ldots, n$, tels que R transforme a en b. Soient c et d deux nombres distincts quelconques de la suite $1, 2, \ldots, n$, différents de a et de b. Le groupe $\mathfrak{A}_n$ contient la substitution $V = (abc)$ et, comme R est permutable avec toutes les substitutions de $\mathfrak{A}_n$, on doit avoir $RVR^{-1} = V$. Et, comme R transforme a en b, R doit transformer b en c et c en a. Donc R contient le cycle (abc). La substitution $W = (ab)(cd)$ fait également partie du groupe $\mathfrak{A}_n$. D'après ce qui précède, R doit être permutable avec W. Or, $RWR^{-1} = (bc)(ad')$, d' désignant l'élément de la suite $1, \ldots, n$ que R substitue à d, donc $RWR^{-1} \neq W$, ce qui est contradictoire. Donc R ne saurait être permutable aussi bien avec S qu'avec T, c. q. f. d.

Proposition 2. Soit S, T une base du groupe $\mathfrak{A}_n$. S'il existe une substitution non identique R de groupe $\mathfrak{S}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$ et que $RTR^{-1} = S$, cette substitution R est du second ordre et elle est unique.

Démonstration. En effet, soit S, T une base du groupe $\mathfrak{A}_n$ et soit R une substitution de $\mathfrak{S}_n$, telle que 1) $RSR^{-1} = T$ et 2) $RTR^{-1} = S$.

De 1) on déduit, en composant à gauche avec R, à doite avec R^{-1} et en tenant compte de 2), 3) $R^2SR^{-2} = RTR^{-1} = S$

et de 2) on déduit, en composant à gauche avec R, à droite avec R^{-1} et en s'appuyant sur 1), 4) $R^2TR^{-2} = RSR^{-1} = T$.

Il ressort de 3) et 4) que R^2 est permutable aussi bien avec S qu'avec T, ce qui implique, d'après la proposition 1, que $R^2 = 1$. Et comme S, T est une base de $\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 4)$, on a $S \neq T$, donc $R \neq 1$ et, par conséquent toute substitution R du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui satisfait les relations 1) et 2) est bien du second ordre. Montrons maintenant que si une telle substitution R existe, elle est unique. En effet, soient R et R' deux substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui satisfont les relations 1), 2), 1') $R'SR'^{-1} = T$ et 2') $R'TR'^{-1} = S$. Composons les deux membres de 1) à gauche avec R' et à droite avec R'^{-1}. Il vient, en tenant compte de 2'), $R'RSR^{-1}R'^{-1} = S$ et, d'une façon analogue, on déduit de 2) et de 1') que $R'RTR^{-1}R'^{-1} = T$. Donc la substitution $R'R$ est permutable aussi bien avec S qu'avec T, ce qui implique, d'après la proposition 1, que 5) $R'R = 1$. Et comme, d'après ce qu'on a démontré plus haut, les deux substitutions R et R' sont du second ordre, il résulte de 5) que $R = R'$.

La proposition 2 est donc démontrée.

Remarque 1. S'il existe une base S, T du groupe $\mathfrak{A}_n$ et une substitution du second ordre R de $\mathfrak{S}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$, la substitution R peut faire partie du groupe $\mathfrak{A}_n$, mais elle peut aussi faire partie de l'ensemble $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$. En voici des exemples.

Exemple 1. $n = 5$, $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $T = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$. Ces deux substitutions constituent une base de $\mathfrak{A}_5$. La substitution du second ordre $R = (1\ 4)(3\ 5)$ fait partie du groupe $\mathfrak{A}_5$ et on a $RSR^{-1} = T$.

Exemple 2. $n = 5$, $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $T = (1\ 2\ 3\ 5\ 4)$. Ces deux substitutions constituent également une base de $\mathfrak{A}_5$. La substitution du second ordre $R = (4\ 5)$ fait partie de l'ensemble $\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{A}_5$ et on a $RSR^{-1} = T$.

Définitions 2. Nous dirons qu'une base S, T du groupe $\mathfrak{A}_n$ est *de première espèce*, s'il n'existe aucune substitution du second ordre R du groupe $\mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$ et nous dirons que la base S, T est de *seconde espèce* dans le cas contraire. Nous disons qu'une base de première espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$ est *du genre* 1 s'il n'existe aucune substitution du second ordre R de l'ensemble $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$ et nous dirons que la base S, T est du genre 2 dans le cas contraire.

Quelle que soit la base S, T du groupe $\mathfrak{A}_n$ et quelle que soit la substitution non identique R du groupe $\mathfrak{S}_n$, les deux substitutions $RSR^{-1} = S'$ et $RTR^{-1} = T'$ font partie du groupe $\mathfrak{A}_n$ et constituent une base de ce groupe. Nous dirons que la base S', T' est *la transformée* de la base S, T par la substitution R et nous dirons que les deux bases S, T et S', T' sont *dépendantes* si R fait partie de $\mathfrak{A}_n$. Par contre, nous dirons que deux bases S, T et S', T' du groupe $\mathfrak{A}_n$ sont *indépendantes*, s'il n'existe aucune substitution R du groupe $\mathfrak{A}_n$, telle que la base S', T' soit la transformée de la base S, T par R.

Proposition 3. Toute base de première espèce S, T du groupe $\mathfrak{A}_n$ possède $n!/2$ transformées distinctes au moyen des substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$.

Démonstration. En effet, soit S, T une base de première espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$. Il n'existe donc aucune substitution du second ordre R de $\mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$. Soient R', R'' deux substitutions distinctes quelconques du groupe $\mathfrak{A}_n$. Posons $R'SR'^{-1} = S'$, $R'TR'^{-1} = T'$, $R''SR''^{-1} = S''$, $R''TR''^{-1} = T''$. Montrons que les bases S', T' et S'', T'' sont distinctes, c'est-à-dire qu'elles diffèrent au moins par une substitution. En effet, supposons le contraire. Deux cas sont alors possibles : a) $S' = S''$, $T' = T''$ et b) $S' = T''$, $T' = S''$. Supposons d'abord qu'on a le cas a). Alors $R'SR'^{-1} = R''SR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R'SR'^{-1}R'' = S$, et $R'TR'^{-1} = R''TR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R'TR'^{-1}R'' = T$. Donc la substitution $R''^{-1}R'$ est permutable aussi bien avec S qu'avec T. Et comme S, T est une base de $\mathfrak{A}_n$, il s'ensuit, d'après la proposition 1, que $R''^{-1}R' = 1$, donc $R'' = R'$, ce qui est contraire à notre hypothèse sur ces deux substitutions. Le cas a) ne saurait donc se présenter. Supposons maintenant qu'on a le cas b). Alors $R''^{-1}R'SR'^{-1}R'' = T$ et $R''^{-1}R'TR'^{-1}R''^{-1} = S$. Comme $R' \neq R''$ et que R' et R'' sont deux substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$, $R''^{-1}R'$ est une substitution non identique du groupe $\mathfrak{A}_n$ qui transforme S en T et T en S. Mais alors la base S, T de $\mathfrak{A}_n$ est de seconde espèce, contrairement à notre hypothèse que c'est une base de première espèce. Le cas b) ne saurait donc également pas se présenter.

Il s'ensuit que les $n!/2$ transformées de la base S, T par les différentes substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$ sont bien distinctes, c. q. f. d.

Proposition 4. Quelle que soit la base S, T de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$, il existe $n!/4$ transformées distinctes de cette base par les substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$.

Démonstration. Soit S, T une base de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$. Il existe donc une substitution du second ordre et une seule R du groupe $\mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$. Soit R' une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{A}_n$. Posons $R'SR'^{-1} = S'$, $R'TR'^{-1} = T'$. Montrons qu'il existe une substitution $R'' \neq R'$ et une seule du groupe $\mathfrak{A}_n$ qui transforme également la base S, T en S', T'. En effet, comme $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$, donc aussi $RTR^{-1} = S$, on a $R'RSR^{-1}R'^{-1} = R'TR'^{-1} = T'$ et $R'RTR^{-1}R'^{-1} = R'SR'^{-1} = S'$. Posons $R'' = R'R$. On a donc $R''SR''^{-1} = T'$, $R''TR''^{-1} = S'$ et $R'' \neq R'$, puisque $R \neq 1$. Il existe donc bien une substitution R'' du groupe $\mathfrak{A}_n$, différente de R' et qui transforme la base S, T en S', T'. Montrons que cette substitution R'' est unique. A cet effet, supposons le contraire et soit R_1'' une seconde substitution de $\mathfrak{A}_n$, différente de R' et de R'', et qui transforme la base S, T et S', T'. Deux cas sont alors possibles:

a) $R_1''SR_1''^{-1} = S'$, $R_1''TR_1''^{-1} = T'$.

b) $R_1''SR_1''^{-1} = T'$, $R_1''TR_1''^{-1} = S'$.

Dans le cas a), on a $R_1''SR_1''^{-1} = R''TR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R_1''SR_1''^{-1}R'' = T$, et $R_1''TR_1''^{-1} = R''SR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R_1''TR_1''^{-1}R'' = S$. Il s'ensuit, d'après la proposition 2 et les hypothèses faites sur la base S, T et la substitution R, que $R''^{-1}R_1'' = R$, d'où $R_1'' = R''R = R'R^2 = R'$, puisque $R^2 = 1$. Or, nous avons supposé que $R_1'' \neq R'$. On est ainsi conduit à une contradiction. Donc le cas a) ne saurait se présenter.

Supposons maintenant qu'on a le cas b). Donc $R'SR'^{-1} = R''SR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R_1'SR_1'^{-1}R'' = S$, et $R_1''TR_1''^{-1} = R''TR''^{-1}$, d'où $R''^{-1}R_1''TR_1''^{-1}R'' = T$. Donc la substitution $R''^{-1}R_1''$ est permutable aussi bien avec S qu'avec T, ce qui implique, d'après la proposition 1, que $R''^{-1}R_1'' = 1$, donc $R'' = R_1''$, contrairement à notre hypothèse sur ces deux substitutions. Le cas b) ne saurait donc également pas se présenter. R'' est donc bien la seule substitution $\neq R'$ du groupe $\mathfrak{A}_n$ qui transforme la base S, T et S', T'.

Cela étant quelle que soit la substitution R' de $\mathfrak{A}_n$, il s'ensuit que toute base de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$ possède bien $n!/4$ transformées distinctes au moyen des substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$, c. q. f. d.

Proposition 5. Quelle que soit la bas S, T de première espèce et du genre 1 du groupe $\mathfrak{A}_n$, le nombre total de transformées distinctes de cette base par les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$ est $n\,!$

Démonstration. En effet, soit S, T une base de première espèce et du genre 1 du groupe $\mathfrak{A}_n$ et soient R et R' deux substitutions distinctes quelconques du groupe $\mathfrak{S}_n$. Montrons que les transformées de la base S, T par les substitutions R et R' sont distinctes. En effet supposons le contraire et posons $RSR^{-1} = S'$, $RTR^{-1} = T'$, $R'SR'^{-1} = S''$, $R'TR'^{-1} = T''$. Deux cas sont alors possibles.

1) $S' = S''$, $T' = T''$. Mais alors $R'^{-1}RSR^{-1}R' = S$ et $R'^{-1}RTR^{-1}R' = T$. Donc, d'après la proposition 1, $R'^{-1}R = 1$ et $R = R'$, contrairement à notre hypothèse sur R et R'. Le cas 1) ne saurait donc se présenter.

2) $S' = T''$, $T' = S''$. Mais alors $R'^{-1}RSR^{-1}R' = T$ et $R'^{-1}RTR^{-1}R' = S$ et la base S, T est transformée en elle-même par la substitution $R'^{-1}R$ du groupe $\mathfrak{S}_n$. Elle est donc soit de seconde espèce, soit de première espèce et du genre 2, ce qui est contraire à notre hypothèse sur la base S, T. Le cas 2) ne saurait donc également pas se présenter.

Les bases S', T' et S'', T'' sont donc toujours distinctes. Il s'ensuit que la base S, T possède bien $n\,!$ transformées distinctes au moyen des substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$, c. q. f. d.

Proposition 6. Toute base de première espèce et du genre 2 de même que toute base de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$ possède $n\,!/2$ transformées distinctes au moyen des substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Soit d'abord S, T une base de première espèce et de genre 2 du groupe $\mathfrak{A}_n$. Il existe donc une substitution du second ordre et une seule R de l'ensemble $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$.

Soit R' une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{S}_n$ et soit $R'SR'^{-1} = S'$, $R'TR'^{-1} = T'$. Montrons qu'il existe une substitution R'' du groupe $\mathfrak{S}_n$ et une seule différente de R', et qui transforme la base S, T en S', T'. En effet, comme $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$, on a $R'RSR^{-1}R'^{-1} = RTR^{-1} = T'$ et $R'RTR^{-1}R'^{-1} = R'SR'^{-1} = S'$. Posons $R'' = R'R$. On a $R'' \neq R'$, puisque $R \neq 1$, et la substitution R'' transforme, d'après ce qui précède, la base S, T en S', T'. Supposons maintenant qu'il existe une seconde substitution $R_1'' \neq R'$ et $\neq R''$ du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui transforme la base S, T en S', T'. Deux cas sont alors possibles.

1) $R_1'' S R_1''^{-1} = S'$, $\quad R_1'' T R_1''^{-1} = T'$,

2) $R_1'' S R_1''^{-1} = T'$, $\quad R_1'' T R_1''^{-1} = S'$.

Dans le premier cas, on a $R_1'' S R_1''^{-1} = R'' T R''^{-1}$ et $R_1'' T R_1''^{-1} = R'' S R''^{-1}$, d'où $R''^{-1} R_1'' S R_1''^{-1} R'' = T$ et $R''^{-1} R_1'' T R_1''^{-1} R'' = S$, ce qui implique, d'après la proposition 2, que $R''^{-1} R_1'' = R$. Donc $R_1'' = R'' R = R' R^2 = R'$, puisque $R^2 = 1$. On voit donc que $R_1'' = R'$, contrairement à notre hypothèse sur R_1''. Donc le cas 1) ne saurait se présenter.

Et, dans le cas 2), on a $R_1'' S R_1''^{-1} = R'' S R''^{-1}$, $R_1'' T R_1''^{-1} = R'' T R''^{-1}$, d'où $R''^{-1} R_1'' S R_1''^{-1} R'' = S$ et $R''^{-1} R_1'' T R_1''^{-1} R'' = T$. Il s'ensuit, d'après la proposition 1, que $R''^{-1} R_1'' = 1$, donc $R_1'' = R''$, ce qui est contraire à notre hypothèse sur R_1''. Le cas 2) ne saurait donc également pas se présenter. Il s'ensuit que la substitution $R'' \neq R'$ du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui transforme la base S, T en S', T' est bien unique et, par conséquent, le nombre total de transformées distinctes de la base S, T par les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$ est bien $n!/2$, c. q. f. d.

Supposons maintenant que S, T est une base de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$. Il existe alors une substitution du second ordre et une seule R du groupe $\mathfrak{A}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui effectué dans le cas précédent, on démontre que, si une substitution R' du groupe $\mathfrak{S}_n$ transforme S en S' et T en T', il existe une substitution et une seule R'' du groupe $\mathfrak{S}_n$, distincte de R' et qui transforme aussi la base S, T en S', T', d'où il résulte que le nombre total de transformées distinctes de la base S, T par les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$ est, dans ce cas aussi, égal à $n!/2$, c. q. f. d.

Proposition 7. Le nombre total des bases du groupe $\mathfrak{A}_n$ est un multiple de $n!/2$, c'est-à-dire de l'ordre du groupe $\mathfrak{A}_n$.

Démonstration. Soit S_1, T_1 une base quelconque du groupe $\mathfrak{A}_n$. Transformons cette base par toutes les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$. D'après les propositions 5 et 6, on obtient ainsi $n!$ ou $n!/2$ bases distinctes du groupe $\mathfrak{A}_n$, suivant que la base S_1, T_1 est de première espèce et du genre 1 ou non. Soit H_1 l'ensemble des transformées distinctes de la base S_1, T_1 par les substitutions de $\mathfrak{S}_n$. Soit à présent m un entier ≥ 1 et supposons que nous ayons déjà défini les bases S_i, T_i de $\mathfrak{A}_n$, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, bases dont aucune n'est la transformée d'une autre par une substitution du groupe $\mathfrak{S}_n$, et soit H_i l'ensemble des transformées distinctes de la base S_i, T_i par les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$. D'après les propositions 5 et 6, l'ensemble H_i est de puissance $n!$ ou $n!/2$! Soit S_{n+1}, T_{n+1} (si elle existe) une base quelconque de $\mathfrak{A}_n$ qui ne fait pas partie de l'ensemble $H_1 + H_2 + \cdots + H_m$ et soit H_{m+1} l'ensemble des transformées distinctes de la base S_{m+1}, T_{m+1} par les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$. D'après les propositions 5 et 6, H_{m+1} est de puissance $n\,!$ ou $n\,!/2$. Comme le nombre total des bases du groupe $\mathfrak{A}_n$ est fini $\left(\text{il est en tout cas } < \binom{\frac{n\,!}{2}}{2} \right)$, après un nombre fini N d'opérations de ce genre, nous obtiendrons la suite 1) $S_1, T_1; S_2, T_2; \ldots; S_N, T_N$ de bases du groupe $\mathfrak{A}_n$, telles que, quels que soient les indices i et j $(1 \leq i < j \leq N)$, il n'existe aucune substitution R du groupe $\mathfrak{S}_n$, telle que la transformée par R de la base S_i, T_i soit la base S_j, T_j. A chaque base S_i, T_i $(1 \leq i \leq N)$ de la suite 1) correspond l'ensemble H_i des transformées distinctes de cette base par les substitutions de $\mathfrak{S}_n$. D'après les propositions 5 et 6, l'ensemble H_i est de puissance $n\,!$ ou $n\,!/2$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, N$. Montrons que, quels que soient les indices i et j $(1 \leq i < j \leq N)$, les ensembles H_i et H_j sont disjoints. En effet, supposons le contraire et admettons qu'il existe deux indices i et j $(1 \leq i < j \leq N)$ et deux substitutions R et R' du groupe $\mathfrak{A}_n$, tels que les bases RS_iR^{-1}, RT_iR^{-1} et $R'S_jR'$, $R'T_jR'^{-1}$ soient confondues. Deux cas sont alors possibles.

a) $RS_iR^{-1} = R'S_jR'^{-1}$, $RT_iR^{-1} = R'T_jR'^{-1}$, donc $R'^{-1}RS_iR^{-1}R' = S_j$ et $R'^{-1}RT_iR^{-1}R' = T_j$. Mais alors, comme $R'^{-1}R$ est une substitution de $\mathfrak{S}_n$, la base S_j, T_j fait partie de l'ensemble H_i, ce qui est contraire à la définition de la base S_j, T_j. Le cas a) ne saurait donc se présenter.

b) Ou bien $RS_iR^{-1} = R'T_jR'^{-1}$, $RT_iR^{-1} = R'S_jR'^{-1}$. Mais alors $R'^{-1}RT_iR^{-1}R' = T_j$, $R'^{-1}RT_iR^{-1}R' = S_j$ et, dans ce cas aussi, comme $R'^{-1}R$ est une substitution de $\mathfrak{S}_n$, la base S_j, T_j appartient à l'ensemble H_i, ce qui est contradictoire. On voit donc bien que les ensembles H_i et H_j sont disjoints.

Soit N' le nombre de bases de la suite 1) qui sont de première espèce et du genre 1. D'après ce qui précède, le nombre total de bases de $\mathfrak{A}_n$ est égal à $N'n\,! + (N - N')\frac{n\,!}{2} = [2N' + (N - N')]\frac{n\,!}{2}$. Ce nombre est donc bien un multiple de $n\,!/2$, c. q. f. d.

Proposition 8. Quel que soit l'entier $n \geq 4$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ possède des bases de première espèce et du genre 1.

Démonstration. Quel que soit l'entier pair $n \geq 4$, les deux substitutions $S = (1\,2 \ldots n-1)$, $T = (n-3\;n-2)(n-1\;n)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition 3, p. 18, et la remarque 3,

p. 41. de notre livre *Sur les bases du groupe symétrique*, II[1]), et cette base est de première espèce et du genre 1, puisque les deux substitutions S et T ne sont pas semblables. D'autre part, quel que soit le nombre impair $n \geq 5$, les deux substitutions $S = (1\,2\ldots n)$, $T = (1\,2\,3)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition 2, p. 12, de notre livre *Sur les bases du groupe symétrique*, I[2]), et cette base est également de première espèce et du genre 1, puisque les deux substitutions S et T ne sont pas semblables. La proposition 8 est donc démontrée.

Proposition 9. Quel que soit l'entier $n \geq 4$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ possède des bases de première espèce et du genre 2.

Démonstration. Supposons d'abord que n est pair ≥ 4. Soit $S = (1\,2\ldots n-2\;n-1)$, $T = (1\,2\ldots n-2\;n)$. Montrons que ces deux substitutions constituent une base de première espèce et de genre 2 de $\mathfrak{A}_n$. En effet, on a $ST^{-1} = (1\;n\;n-1)$. La substitution $(1\;n\;n-1)$ engendre, avec S, le groupe $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition 6, p. 21—22, *Bases*, I. Donc S, T est aussi une base de $\mathfrak{A}_n$. Et cette base est de première espèce et de genre 2 puisque la substitution $R = (n-1\;n)$ de $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ est du second ordre et telle que $RSR^{-1} = T$.

Supposons maintenant que n est impair ≥ 5. Posons alors $S = (1\,2\ldots n-2\;n-1\;n)$, $T = (1\,2\ldots n-2\;n\;n-1)$ et montrons que les deux substitutions S et T constituent une base de première espèce et de genre 2 de $\mathfrak{A}_n$. En effet, on a $ST^{-1} = (1\;n\;n-1)$ et cette dernière substitution forme avec S une base de $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition 5, p. 20, *Bases*, I. Donc S, T est aussi une base de $\mathfrak{A}_n$ et cette base est de première espèce et de genre 2, puisque la substitution $R = (n-1\;n)$ de $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ est du second ordre et transforme S en T. La proposition 9 est donc démontrée.

Proposition 10. Quel que soit l'entier $n \geq 4$, le groupe $\mathfrak{A}_n$ possède des bases de seconde espèce.

Démonstration. Soit d'abord n un nombre pair ≥ 4. Posons $S = (1\,2\ldots n-2\;n-1)$, $T = (1\,2\ldots n-4\;n-2\;n-3\;n)$. Montrons que S, T est une base de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$. En effet, on vérifie aisément que S, T est une base de $\mathfrak{A}_n$, si $n = 4$, 6 ou 8. Et, si $n \geq 10$, on a $ST^{-1} = (1\;n\;n-2\;n-3\;n-1)$ et cette substitution forme avec S une base de $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition 25, p. 55, *Bases*, I. Donc S, T est

---

[1]) Librairie Vuibert, Paris 1948 (ouvrage que nous citerons sous l'abréviation *Bases, II*.

[2]) Librairie Vuibert, Paris 1946 (*Bases, I*).

une base de $\mathfrak{A}_n$ et cette base est de seconde espèce quel que soit $n \geq 4$, puisque la substitution $R = (n - 3\ n - 2)(n - 1\ n)$ de $\mathfrak{A}_n$ est du second ordre et transforme S en T.

Supposons maintenant que n est impair ≥ 5. Posons $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (1\ 2 \ldots n-4\ n-2\ n-3\ n\ n-1)$. Montrons que S, T est une base de seconde espèce de $\mathfrak{A}_n$. En effet, on a $S^{-1}T = (n-1\ n\ n-2\ n-4\ n-3)$ et cette dernière substitution forme avec S une base de $\mathfrak{A}_n$, comme on le vérifie sans peine pour $n = 5$ et 7 et comme cela résulte de la proposition 23, p. 53, Bases I, pour $n \geq 9$. Donc S, T est également une base de $\mathfrak{A}_n$ et cette base est de seconde espèce puisque la substitution du second ordre $R = (n-3\ n-2)(n-1\ n)$ du groupe $\mathfrak{A}_n$ transforme S en T. La proposition 10 est donc démontrée.

Les bases des groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ et $\mathfrak{A}_7$

Notations. Soit $B = (S, T)$ une base de $\mathfrak{A}_n$, formée des deux substitutions S et T, et soit R une substitution quelconque de $\mathfrak{A}_n$. Posons $S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, $B' = (S', T') = RBR^{-1}$. Comme on sait, B' est aussi une base de $\mathfrak{A}_n$, les deux bases B et B' sont dépendantes et la base B' est la transformée de la base B par la substitution R de $\mathfrak{A}_n$.

Définition 3. Soit N un entier positif et soient $B_1, B_2, \ldots, B_N$ des bases du groupe $\mathfrak{A}_n$. Nous dirons que ces bases constituent un *système complet de représentants indépendants* des bases de $\mathfrak{A}_n$ si quels que soient les indices i et j $(1 \leq i < j \leq N)$, il n'existe aucune substitution R de $\mathfrak{A}_n$, telle que $RB_iR^{-1} = B_j$ (ce qui veut dire que les bases B_i et B_j sont indépendantes) et si, pour toute base B de $\mathfrak{A}_n$, il existe un indice i $(1 \leq i \leq N)$ et une substitution R de $\mathfrak{A}_n$, tels que $B = RB_iR^{-1}$.

Nous donnerons maintenant des critères permettant de reconnaître toutes les bases des groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ et $\mathfrak{A}_7$ et nous indiquerons, pour chacun de ces groupes, un système complet de représentants indépendants des bases de ce groupe.

Types des substitutions du groupe $\mathfrak{A}_n$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des entiers positifs, tels que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 2$ et que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq n$, et soit S une substitution du groupe $\mathfrak{A}_n$. Nous dirons que la substitution S est du type $a_1 . a_2 . \ldots . a_k$ si elle comprend au total k cycles d'ordre > 1 et si on peut ranger ces cycles en une suite $C_1, C_2, \ldots, C_k$, telle que le cycle C_i est d'ordre a_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$. Nous désignerons par 1 la substitution identique du groupe $\mathfrak{A}_n$.

Type d'un couple de substitutions de $\mathfrak{A}_n$. Soit S, T un couple de substitutions de $\mathfrak{A}_n$. Nous dirons que le couple S, T est du type $(a_1.a_2. \ldots . a_k, a'_1.a'_2. \ldots .a'_k)$ si l'une des substitutions S, T est du type $a_1.a_2. \ldots . a_k$ et si l'autre est du type $a'_1.a'_2. \ldots . a'_k$.

Remarque 2. Quel que soit l'entier $n \geq 4$, toutes les bases de première espèce et du genre 1 de même que toutes les bases de seconde espèce se répartissent en couples S, T et S', T', tels qu'il existe, pour chacun de ces couples, une substitution R de $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ satisfaisant les relations $RSR^{-1} = S'$, $RTR^{-1} = T'$. Cette remarque est vraie aussi pour les systèmes de représentants indépendants des bases du groupe $\mathfrak{A}_n$.

Remarque 3. Quelle que soit la base S, T de première espèce et de genre 2 ou de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_n$ et quelle que soit la relation de la forme $f(S, T) = 1$, où f désigne une composition finie déterminée de S et de T, on a aussi la relation $f(T, S) = 1$.

Remarque 4. Dans les tableaux des représentants indépendants des bases des groupes $\mathfrak{A}_i$ ($i = 4, 5, 6$ et 7), nous indiquons pour chaque base S, T de première espèce et du genre 2 ainsi que pour chaque base de seconde espèce, la substitution R de $\mathfrak{S}_n$, telle que $R^2 = 1$ et que $RSR^{-1} = T$.

Groupe $\mathfrak{A}_4$

Le groupe $\mathfrak{A}_4$ se compose de 8 substitutions du type 3, de 3 substitutions du type 2.2 et de la substitution identique. Il possède des bases de deux types: (3,3) et (3,2.2). Les deux critères suivants permettent de discerner toutes les bases du groupe $\mathfrak{A}_4$.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions S, T du type 3 constituent une base de $\mathfrak{A}_4$, c'est qu'elles soient connexes[3]).

2. Tout couple de substitutions du type (3,2.2) constitue une base de $\mathfrak{A}_4$.

Le groupe $\mathfrak{A}_4$ possède en tout 48 bases. 36 de ces bases sont de première espèce (il y en a 24 du genre 1 et 12 du genre 2) et 12 sont de seconde espèce. Il existe 5 représentants indépendants de ces bases, dont 3 sont de première espèce (2 du genre 1 et 1 du genre 2) et 2 sont de seconde espèce.

---

[3]) Voir définition 1, p. 133, *Bases, I.*

Système de représentants indépendants des bases du groupe $\mathfrak{A}_4$

Bases de première espèce et du genre 1

Bases du type (3, 2.2)

S	T
(1 2 3)	(1 2) (3 4)

1)

S'	T'
(1 3 2)	(1 2) (3 4)

2)

Bases de première espèce et du genre 2

Bases du type (3, 3)

S	T	R
(1 2 3)	(1 2 4)	(3 4)

3)

Bases de seconde espèce

Bases du type (3, 3)

S	T	R
(1 2 3)	(1 4 2)	(1 2) (3 4)

4)

S'	T'	R'
(1 3 2)	(1 2 4)	(1 2) (3 4)

5)

La base 2) est la transformée de la base 1) par la substitution (1 2) et, de même, la base 5) est la transformée de la base 4) par (1 2).

Nombre de bases du groupe $\mathfrak{A}_4$

Type de base	Nombre total de bases d'un type donné	Nombre de bases d'un type donné qui sont de			Nombre total de représentants indépendants des bases d'un type donné	Nombre de représentants indépendants des bases d'un type donné qui sont de		
		première espèce genre 1	première espèce genre 2	2me espèce		première espèce genre 1	première espèce genre 2	2me espèce
(3 , 3)	24	—	12	12	3	—	1	2
(3 , 2 . 2)	24	24	—	—	2	2	—	—
Totaux	48	24	12	12	5	2	1	2

Remarque 5. Deux substitutions du type 3 de $\mathfrak{A}_4$ ne sont pas toujours connexes, mais, si elles sont connexes, elles constitutent toujours une base de $\mathfrak{A}_4$. Tout couple de substitutions du type (3,2.2) de $\mathfrak{A}_4$ est connexe et il constitue toujours une base de $\mathfrak{A}_4$. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions S, T de $\mathfrak{A}_4$ constituent une base de ce groupe, c'est qu'elles soient connexes.

Groupe $\mathfrak{A}_5$

Le groupe $\mathfrak{A}_5$ se compose de 24 substitutions du type 5, 20 substitutions du type 3, 15 substitutions du type 2.2 et de la substitution 1 ; il possède des bases des cinq types suivants : (5,5), (5,3), (5,2.2), (3,3) et (3,2.2). Les critères suivants permettent de discerner toutes les bases du groupe $\mathfrak{A}_5$.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions S, T du type 5 de $\mathfrak{A}_5$ constituent une base de ce groupe, c'est que $T \neq S^i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Toute substitution S du type 5 de $\mathfrak{A}_5$ forme avec toute substitution T du type 3 de $\mathfrak{A}_5$ une base du groupe $\mathfrak{A}_5$.

3. Quelle que soit la substitution $S=(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ du type 5 de $\mathfrak{A}_5$, la condition nécessaire et suffisante pour que S forme avec une substitution T du type 2.2 de $\mathfrak{A}_5$ une base de $\mathfrak{A}_5$, c'est que $T \neq S^i (a_1 a_2)(a_3 a_5) S^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple S, T de substitutions de $\mathfrak{A}_5$ de l'un des deux types (5,3) ou (3,2.2) constitue une base du groupe $\mathfrak{A}_5$, c'est que les substitutions S et T soient connexes.

Le groupe $\mathfrak{A}_5$ possède au total 1140 bases, dont 960 sont de première espèce (840 du genre 1 et 120 du genre 2) et 180 sont de seconde espèce. Il existe 22 représentants indépendants de ces bases, dont 16 sont de première espèce (14 du genre 1 et 2 du genre 2) et 6 sont de seconde espèce.

Système de représentants indépendants des bases du groupe $\mathfrak{A}_5$

Bases de première espèce et du genre 1

Bases du type (5 , 3)

S	T		S'	T'	
(1 2 3 4 5)	(1 2 3)	1)	(1 3 4 5 2)	(1 2 3)	5)
(1 2 3 4 5)	(1 3 2)	2)	(1 3 4 5 2)	(1 3 2)	6)
(1 2 3 4 5)	(1 2 4)	3)	(1 3 4 5 2)	(1 2 4)	7)
(1 2 3 4 5)	(1 4 2)	4)	(1 3 4 5 2)	(1 4 2)	8)

Bases du type (5, 2.2)

S	T	
(1 2 3 4 5)	(1 2) (3 4)	9)
(1 2 3 4 5)	(1 3) (2 4)	10)

S'	T'	
(1 3 4 5 2)	(1 2) (3 4)	11)
(1 3 4 5 2)	(1 4) (2 3)	12)

Bases du type (3, 2.2)

S	T	
(1 2 3)	(1 4) (2 5)	13)

S	T	
(1 2 3)	(1 5) (2 4)	14)

Les bases 5), 6), 7), 8), 11), 12) sont respectivement les transformées des bases 1), 2), 3), 4), 9), 10) par la substitution (1 2) et la base 14) est la transformée de la base 13) par la substitution (4 5).

Bases de première espèce et du genre 2

Bases du type (5, 5)

S	T	R	
(1 2 3 4 5)	(1 2 3 5 4)	(4 5)	15)
(1 2 3 4 5)	(1 4 5 3 2)	(1 3)	16)

Bases de seconde espèce

Bases du type (5, 5)

S	T	R	
(1 2 3 4 5)	(1 3 4 2 5)	(1 4) (3 5)	17)
(1 2 3 4 5)	(1 5 2 4 3)	(1 5) (3 4)	18)

S'	T'	R'	
(1 3 4 5 2)	(1 5 2 3 4)	(2 4) (3 5)	19)
(1 3 4 5 2)	(1 4 3 2 5)	(2 5) (3 4)	20)

Bases du type (3, 3)

S	T	R	
(1 2 3)	(1 4 5)	(2 4) (3 5)	21)

S'	T'	R'	
(1 2 3)	(1 5 4)	(2 5) (3 4)	22)

Les bases 19) et 20) sont respectivement les transformées des bases 17) et 18) par la substitution (1 2) et la base 22) est la transformée de la base 21) par la substitution (4 5).

Nombre de bases du groupe $\mathfrak{A}_5$.

Type de base	Nombre total de bases d'un type donné	Nombre de bases d'un type donné qui sont de			Nombre total de représentants indépendants des bases d'un type donné	Nombre de représentants indépendants des bases d'un type donné qui sont de		
		première espèce		2 me espèce		première espèce		2 me espèce
		genre 1	genre 2			genre 1	genre 2	
(5 , 5)	240	—	120	120	6	—	2	4
(5 , 3)	480	480	—	—	8	8	—	—
(5 , 2 . 2)	240	240	—	—	4	4	—	—
(3 , 3)	60	—	—	60	2	—	—	2
(3 , 2 . 2)	120	120	—	—	2	2	—	—
Totaux	1140	840	120	180	22	14	2	6

Remarque 6. Tout couple S, T de substitutions du type (5,3) de $\mathfrak{A}_5$ sont connexes et constituent une base de $\mathfrak{A}_5$. Si le couple S, T est de l'un des types (5,5) ou (5,2.2), les substitutions S et T sont toujours connexes, mais elles ne constituent pas toujours une base de $\mathfrak{A}_5$. Enfin, si le couple S, T est de l'un des types (3,3) ou (3,2.2) S et T ne sont pas toujours connexes, mais, si elles sont connexes, elles constituent toujours une base de $\mathfrak{A}_5$.

Groupe $\mathfrak{A}_6$

Le groupe $\mathfrak{A}_6$ comprend 144 substitutions du type 5, 90 substitutions du type 4.2, 40 substitutions du type 3.3, 45 substitutions du type 2.2, 40 substitutions du type 3 et la substitution identique.

Le groupe $\mathfrak{A}_6$ possède des bases des dix types suivants : (5,5), (5,4.2), (5,3.3), (5,3), (5,2.2), (4.2,4.2), (4.2,3.3), (4.2,3), (4.2,2.2) et (3.3,2.2).

Les critères suivants permettent de discerner toutes les bases de $\mathfrak{A}_6$.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions S, T du type 5 de $\mathfrak{A}_6$ constituent une base de ce groupe, c'est qu'elles soient connexes et que, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ désignant une permutation des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, telle que $S = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$, on ait $T \neq S^i (a_1 a_2 a_6 a_3 a_4)^j S^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $j = 1, 2, 3, 4$.

2. Toute substitution S du type 5 de $\mathfrak{A}_6$ forme avec toute substitution du type 4.2 de $\mathfrak{A}_6$ une base du groupe $\mathfrak{A}_6$.

3. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)$ du type 3.3 de $\mathfrak{A}_6$ forme avec une substitution T du type 5 de $\mathfrak{A}_6$ une base du groupe $\mathfrak{A}_6$, c'est que $T = RUR^{-1}$, où U

est l'une des quatre substitutions $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5)$, $(a_1\,a_2\,a_4\,a_3\,a_5)$, $(a_1a_3a_2a_5a_4)$, $(a_1a_3a_5a_2a_4)$ et R est l'une des 18 substitutions du groupe $\mathfrak{S}_6$ qui transforment la substitution S en elle-même.

4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1a_2a_3a_4a_5)$ du type 5 de $\mathfrak{A}_6$ forme avec une substitution T du type 2.2 de $\mathfrak{A}_6$ une base du groupe $\mathfrak{A}_6$, c'est que S et T soient connexes et que, a_6 désignant le nombre de la suite $1, 2, 3, 4, 5, 6$ qui n'est pas permuté par S, on ait $T \neq S^iUS^{-i}$, où U est l'une des deux substitutions $(a_1a_3)(a_2a_6)$, $(a_1a_2)(a_4a_6)$ et $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

5. Si S, T est un couple de substitutions de $\mathfrak{A}_6$, de l'un des types (4.2, 4.2), (4.2, 3.3), (4.2,3) ou (4.2, 2.2), la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions S et T constituent une base du groupe $\mathfrak{A}_6$, c'est qu'elles soient connexes et primitives.

6. Si S, T est un couple de substitutions de $\mathfrak{A}_6$ de l'un des types (5,3) ou (3.3,3), la condition nécessaire et suffisante pour que S, T soit une base de $\mathfrak{A}_6$, c'est que les substitutions S et T soient connexes.

Le groupe $\mathfrak{A}_6$ possède au total 38 160 bases, dont 36 000 sont de première espèce (35 280 du genre 1 et 720 du genre 2) et 2160 sont de seconde espèce. Il existe 112 représentants indépendants de ces bases, dont 100 sont de première espèce (98 du genre 1 et 2 du genre 2) et 12 sont de seconde espèce.

Système de représentants indépendants des bases du groupe $\mathfrak{A}_6$

Bases de première espèce et du genre 1

Bases du type (5, 5)

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4 5)	(1 2 4 6 3)	(1 2 3 4 5)	(1 2 5 3 6)	(3 5 6 4)
(1 2 3 4 5)	(1 3 2 6 4)	(1 2 3 4 5)	(1 3 2 5 6)	(2 3) (4 5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 3 4 2 6)	(1 2 3 4 5)	(1 4 2 3 6)	(2 4 3) (5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 3 6 4 2)	(1 2 3 4 5)	(1 5 2 4 6)	(2 5 6 3)
(1 2 3 4 5)	(1 2 3 6 4)	(1 3 4 5 2)	(1 3 6 4 2)	(1 2)
(1 2 3 4 5)	(1 2 6 4 3)	(1 3 4 5 2)	(1 6 4 3 2)	(1 2)
(1 2 3 4 5)	(1 3 6 2 4)	(1 3 4 5 2)	(1 4 2 3 6)	(1 2)

Dans ce tableau les bases sont réparties par couples S, T et S', T'. Dans une même ligne, la base S', T' est la transformée de la base S, T par la substitution R.

Bases du type $(5, 4.2)$

$S = (1\,2\,3\,4\,5)$,

T = l'une des 18 substitutions $(1\,a\,b\,c)\,(d\,e)$, où l'ensemble $\{a, b, c\} = \{2, 3, 4\}$ et $(d\,e) = (5\,6)$ ou bien $\{a, b, c\} = \{2, 3, 6\}$ et $(d\,e) = (4\,5)$ ou encore $\{a, b, c\} = \{2, 4, 6\}$ et $(d\,e) = (3\,5)$,

$S' = (1\,2\,3\,4\,6)$,

T' = l'une des 18 substitutions $(1\,a\,b\,c)(d\,e)$, où $\{a, b, c\} = \{2, 3, 4\}$ et $(d\,e) = (5\,6)$ ou bien $\{a, b, c\} = \{2, 3, 5\}$ et $(d\,e) = (4\,6)$ ou encore $\{a, b, c\} = \{2, 4, 5\}$ et $(d\,e) = (3\,6)$.

Les 18 bases S', T' sont les transformées des bases S, T par la substitution $(5\,6)$.

Bases du type $(5, 3.3)$

S	T	S'	T'	R
(1 2 3) (4 5 6)	(1 2 3 4 5)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 2 4 5 6)	(1 4) (2 5) (3 6)
(1 2 3) (4 5 6)	(1 2 4 3 5)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 6 2 4 5)	(1 4) (2 5) (3 6)
(1 2 3) (4 5 6)	(1 3 2 5 4)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 4 6 5 2)	(1 4) (2 5) (3 6)
(1 2 3) (4 5 6)	(1 3 5 2 4)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 4 6 2 5)	(1 4) (2 5) (3 6)

Bases du type $(5, 3)$

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4 5)	(1 2 6)	(1 3 2 4 5)	(1 3 6)	(2 3)
(1 2 3 4 5)	(1 6 2)	(1 3 2 4 5)	(1 6 3)	(2 3)
(1 2 3 4 5)	(1 3 6)	(1 3 2 4 5)	(1 2 6)	(2 3)
(1 2 3 4 5)	(1 6 3)	(1 3 2 4 5)	(1 6 2)	(2 3)

Bases du type $(5, 2.2)$

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4 5)	(1 2) (3 6)	(1 3 4 5 2)	(1 2) (3 6)	(1 2)
(1 2 3 4 5)	(1 2) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(1 2) (5 6)	(1 2)
(1 2 3 4 5)	(1 3) (4 6)	(1 3 4 5 2)	(2 3) (4 6)	(1 2)
(1 2 3 4 5)	(1 3) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(2 3) (5 6)	(1 2)

Bases du type $(4.2, 4.2)$

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 5 3) (4 6)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 6 3) (4 5)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 5 2 6) (3 4)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 6 2 5) (3 4)	(5 6)

Bases du type (4.2, 3.3)

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 3) (4 6 5)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 2) (4 5 6)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 2) (4 6 5)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 5 2) (3 4 6)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 5) (3 6 4)	(1 3) (2 4) (5 6)

Bases du type (4.2,3)

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 5)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2 6)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 5 2)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 6 2)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 5 6)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 6 5)	(5 6)

Bases du type (4.2, 2.2)

S	T	S'	T'	R
(1 2 3 4) (5 6)	(1 2) (3 5)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2) (3 6)	(5 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 2) (4 5)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 2) (4 6)	(5 6)

Bases du type (3.3,3)

S	T	S'	T'	R
(1 2 3) (4 5 6)	(1 2 4)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 4 5)	(1 4) (2 5) (3 6)
(1 2 3) (4 5 6)	(1 4 2)	(1 2 3) (4 5 6)	(1 5 4)	(1 4) (2 5) (3 6)

Bases de première espèce et du genre 2

Bases du type (5.5)

S	T	R
(1 2 3 4 5)	(1 2 3 4 6)	(5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 6 4 3 2)	(1 4) (2 3) (5 6)

Bases de seconde espèce

Bases du type (5,5)

S	T	R	S'	T'	R'
(1 2 3 4 5)	(1 2 4 3 6)	(3 4) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(1 4 3 6 2)	(3 4) (5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 3 4 6 2)	(1 2) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(1 2 3 4 6)	(1 2) (5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 4 3 2 6)	(2 4) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(1 6 2 4 3)	(1 4) (5 6)
(1 2 3 4 5)	(1 4 6 3 2)	(1 3) (5 6)	(1 3 4 5 2)	(1 2 4 6 3)	(2 3) (5 6)

Dans chaque ligne de ce dernier tableau, la base S', T' est la transformée de S, T par la substitution (1 2).

Bases du type (4.2, 4.2)

S	T	R	S'	T'	R'
(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 5 2) (4 6)	(1 2) (4 5)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 6 2) (4 5)	(1 2) (4 6)
(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 2 5) (4 6)	(2 3) (4 5)	(1 2 3 4) (5 6)	(1 3 2 6) (4 5)	(2 2) (4 6)

Dans les deux lignes de ce tableau, la base S', T' est la transformée de S, T par la substitution (5 6).

Nombre de bases de $\mathfrak{A}_6$.

Type de base	Nombre total de bases d'un type donné	Nombre de bases d'un type donné qui sont de: première espèce, genre 1	première espèce, genre 2	2 me espèce	Nombre total de représentants indépendants des bases d'un type donné	Nombre de représentants indépendants des bases d'un type donné qui sont de: première espèce, genre 1	première espèce, genre 2	2 me espèce
(5 , 5)	7 200	5 040	720	1440	24	14	2	8
(5 , 4 . 2)	12 960	12 960	—	—	36	36	—	—
(5 , 3 . 3)	2 880	2 880	—	—	8	8	—	—
(5 , 3)	2 880	2 880	—	—	8	8	—	—
(5 , 2 . 2)	2 880	2 880	—	—	8	8	—	—
(4 . 2 , 4 . 2)	2 160	1 440	—	720	8	4	—	4
(4 . 2 , 3 . 3)	2 160	2 160	—	—	6	6	—	—
(4 . 2 , 3)	2 160	2 160	—	—	6	6	—	—
(4 . 2 , 2 . 2)	1 440	1 440	—	—	4	4	—	—
(3 . 3 , 3)	1 440	1 440	—	—	4	4	—	—
Totaux	38 160	35 280	720	2160	112	98	2	12

Remarque 7. Si le couple S, T de substitutions de $\mathfrak{A}_6$ est du type (5,4.2), les substitutions S et T sont toujours connexes et elles constituent toujours une base de $\mathfrak{A}_6$. Si le couple S, T est de l'un des types (5,3) ou (3.3,3), S et T ne sont pas toujours connexes, mais, si elles sont connexes, elles constituent toujours une base de $\mathfrak{A}_6$. Si le couple S, T est de l'un des types (5,5), (5,3.3), (5,2.2), (4.2, 4.2), (4.2, 3.3), (4.2, 2.2) ou (4.2,3), S et T ne sont pas toujours connexes et, même si elles sont connexes, elles ne constituent pas toujours une base de $\mathfrak{A}_6$.

Les bases du groupe $\mathfrak{A}_7$

Le groupe $\mathfrak{A}_7$ se compose de 720 substitutions du type 7, de 210 substitutions du type 3.2.2, de 504 substitutions du type 5, de 630 substitutions du type 4.2, de 280 substitutions du type 3.3, de 70 substitutions du type 3, de 105 substitutions du type 2.2 et de la substitution identique 1.

Le groupe $\mathfrak{A}_7$ possède des bases des 24 types suivantes : (7,7), (7,3.2.2), (7,5), (7,4.2), (7,3.3), (7,3), (7,2.2), (3.2.2, 3.2.2), (3.2.2,5), (3.2.2,4.2), (3.2.2,3.3), (3.2.2,3), (3.2.2,2.2), (5,5), (5, 4.2), (5,3.3), (5,3), (5,2.2), (4.2,4.2), (4.2,3.3), (4.2,3), (4.2,2.2), (3.3,3.3), (3.3,3).

Les critères suivants permettent de discerner toutes les bases du groupe $\mathfrak{A}_7$.

1. Tout couple S, T de substitutions de $\mathfrak{A}_7$ de l'un des types (7,3.2.2), (7,5) ou (7,3) constitue une base du groupe $\mathfrak{A}_7$.

2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple S, T de substitutions de $\mathfrak{A}_7$ de l'un des types (3.2.2,3.2.2), (3.2.2,5), (3.2.2,4.2), (3.2.2,3.3), (3.2.2,3), (3.2.2,2.2), (5.5), (5,4.2), (5,3.3), (5,3), (5,2.2), (4.2,3) ou (3.3,3) constitue une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que les substitutions S et T soient connexes.

3. La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions S et T du type 7 de $\mathfrak{A}_7$ constituent une base de ce groupe, c'est que, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ désignant la permutation des nombres $1, 2, \ldots, 7$, telle que $S = (a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$, on ait $T \neq S^i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ et $T \neq S^iU^jS^{-i}$, où U est l'une des deux substitutions $(a_1a_2a_3a_6a_7a_5a_4)$, $(a_1a_2a_3a_7a_6a_4a_5)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

4. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$ du type 7 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une substitution T du type 4.2 de $\mathfrak{A}_7$ une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T \neq S^iU^jS^{-i}$, où U est l'une des six substitutions $(a_1a_2a_3a_5)(a_6a_7)$, $(a_1a_2a_5a_3)(a_4a_6)$, $(a_1a_3a_2a_5)(a_4a_7)$, . $(a_1a_2a_3a_6)(a_4a_5)$, $(a_1a_2a_6a_3)(a_4a_7)$, $(a_1a_3s_2a_6)(a_5a_7)$, $j = \pm 1$ et $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

5. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6)$ du type 3.3 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une substitution T du type 7 de $\mathfrak{A}_7$ une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = [RUR^{-1}]^i$, où U est l'une des six substitutions $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$, $(a_1a_2a_3a_4a_6a_5a_7)$, $(a_1a_2a_3a_4a_6a_7a_5)$, $(a_1a_2a_3a_4a_7a_6a_5)$, $(a_1a_2a_3a_7a_4a_6a_5)$, $(a_1a_2a_7a_4a_5a_3a_6)$, R est l'une des 18 substitutions du groupe $\mathfrak{S}_7$ qui transforme S en elle-même et $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

6. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7)$ du type 7 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une substitution T du type 2.2 de $\mathfrak{A}_7$ une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = S^i U S^{-i}$, où U est l'une des neuf substitutions $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $(a_1 a_2)(a_3 a_7)$, $(a_1 a_2)(a_4 a_5)$, $(a_1 a_2)(a_4 a_6)$, $(a_1 a_3)(a_4 a_6)$, $(a_1 a_3)(a_4 a_7)$, $(a_1 a_3)(a_2 a_4)$, $(a_1 a_4)(a_2 a_5)$, $(a_1 a_4)(a_2 a_6)$ et $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

7. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_6)(a_7)$ du type 4.2 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une seconde substitution T du type 4.2 de $\mathfrak{A}_7$ une base de $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = R U^i R^{-1}$, où U est l'une des quatre substitutions $(a_1 a_3 a_5 a_6)(a_4 a_7)$, $(a_1 a_5 a_2 a_7)(a_3 a_4)$, $(a_1 a_2 a_5 a_7)(a_3 a_6)$, $(a_1 a_2 a_7 a_5)(a_4 a_6)$, $i = \pm 1$ et R est l'une des huit substitutions du groupe $\mathfrak{S}_7$ qui transforment S en elle-même.

8. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)(a_7)$ du type 3.3 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une substitution T du type 4.2 de $\mathfrak{A}_7$ une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = R U^i R^{-1}$, où U est l'une des neuf substitutions $(a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_7)$, $(a_1 a_2 a_3 a_4)(a_6 a_7)$, $(a_1 a_2 a_4 a_5)(a_3 a_7)$, $(a_1 a_2 a_4 a_7)(a_5 a_6)$, $(a_1 a_2 a_7 a_4)(a_5 a_6)$, $(a_1 a_2 a_7 a_4)(a_3 a_5)$, $(a_1 a_4 a_2 a_7)(a_3 a_5)$, $(a_1 a_2 a_4 a_7)(a_3 a_6)$, $(a_1 a_7 a_2 a_4)(a_3 a_6)$, $i = \pm 1$ et R est l'une des 18 substitutions du groupe $\mathfrak{S}_7$ qui transforment la substitution S en elle-même.

9. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3 a_4)(a_5 a_6)(a_7)$ du type 4.2 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une substitution T du type 2.2 une base du groupe $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = R U R^{-1}$, où U est l'une des deux substitutions $(a_1 a_5)(a_3 a_7)$, $(a_1 a_5)(a_6 a_7)$ et R est l'une des huit substitutions du groupe $\mathfrak{S}_7$ qui transforment la substitution S en elle-même.

10. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution $S = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)(a_7)$ du type 3.3 de $\mathfrak{A}_7$ forme avec une seconde substitution T du type 3.3 de $\mathfrak{A}_7$ une base de $\mathfrak{A}_7$, c'est que $T = [(a_i a_{i+1} a_j)(a_{j+1} a_{j+2} a_7]^{\pm 1}$, i désignant un nombre quelconque de l'un des deux ensembles $\{1, 2, 3\}$ ou $\{4, 5, 6\}$ et j désignant un nombre quelconque du second de ces deux ensembles.

Le groupe $\mathfrak{A}_7$ possède au total 2 308 320 bases, dont 2 270 520 sont de première espèce (2 177 280 du genre 1 et 93 240 du genre 2) et 37 800 sont de seconde espèce et il existe 931 représentants indépendants de ces bases, dont 901 sont de première espèce (869 du genre 1 et 37 du genre 2) et 30 sont de seconde espèce.

Système de représentants indépendants des bases du groupe $\mathfrak{A}_7$

Bases de première espèce et du genre 1

Bases du type (7,7)

S = (1 2 3 4 5 6 7)
T = l'une des 18 substitutions
(1 2 3 4 6 7 5), (1 2 3 5 7 6 4), (1 2 3 6 5 7 4),
(1 2 4 5 7 3 6), (1 2 4 6 3 7 5), (1 2 4 6 7 5 3), (1 2 4 7 5 6 3),
(1 2 4 7 6 3 5), (1 2 5 4 7 6 3), (1 2 5 7 4 3 6), (1 2 5 7 6 4 3),
(1 2 6 5 7 4 3), (1 3 2 5 7 4 6), (1 3 5 2 4 7 6), (1 3 5 2 7 6 4),
(1 3 6 2 5 7 4), (1 3 7 2 6 5 4), (1 4 3 7 6 2 5).

S' = (1 3 4 5 6 7 2).
T' = l'une des 18 substitutions (1 3 4 6 7 5 2), (1 3 5 7 6 4 2),
(1 3 6 5 7 4 2), (1 4 5 7 3 6 2), (1 4 6 3 7 5 2), (1 4 6 7 5 3 2),
(1 4 7 5 6 3 2), (1 4 7 6 3 5 2), (1 5 4 7 6 3 2), (1 5 7 4 3 6 2),
(1 5 7 6 4 3 2), (1 6 5 7 4 3 2), (1 5 7 4 6 2 3), (1 4 7 6 2 3 5),
(1 7 6 4 2 3 5), (1 5 7 4 2 3 6), (1 6 5 4 2 3 7), (1 5 2 4 3 7 6).
Les 18 bases S', T' sont les transformées des 18 bases précédentes S, T par la substitution (1 2).

S = (1 2 3 4 5 6 7).
T = l'une des 14 substitutions (1 2 3 5 7 4 6), (1 2 4 3 6 7 5),
(1 2 4 5 3 7 6), (1 2 4 6 7 3 5), (1 2 4 7 3 6 5), (1 2 4 7 5 3 6),
(1 2 4 7 6 5 3), (1 2 5 4 7 3 6), (1 2 5 7 4 6 3), (1 2 6 4 7 5 3),
(1 2 6 5 4 7 3), (1 3 2 6 5 7 4), (1 3 5 2 7 4 6), (1 3 7 6 2 5 4).

S' = (1 2 3 4 5 6 7).
T' = l'une des 14 substitutions (1 2 3 6 4 7 5), (1 2 4 3 7 5 6),
(1 2 5 3 4 7 6), (1 2 6 3 7 4 5), (1 2 5 3 7 6 4), (1 2 6 3 5 7 4),
(1 2 7 3 6 5 4), (1 2 6 4 3 7 5), (1 2 7 5 3 6 4), (1 2 7 4 6 3 5),
(1 2 7 5 4 3 6), (1 3 2 7 5 4 6), (1 4 2 6 3 7 5), (1 5 2 7 6 4 3).

Les 14 dernières bases S', T' sont respectivement les transformées des 14 bases S, T précédentes par les substitutions (4 6 7 5),
(3 4) (5 7 6), (3 5 4) (6 7), (3 6 4) (5 7), (3 5 7 4), (3 6 7 4),
(3 7 4) (5 6), (3 6 7 5), (3 7 4 5), (3 7 5 6), (3 7 6) (4 5),
(2 3) (4 7 6), (2 4 6 7 5 3), (2 5 6 4 7 3).

Bases du type (7,3.2.2)

S = (1 2 3 4 5 6 7).

T = l'une des 30 substitutions (1 2 3) (4 5) (6 7), (1 2 3) (4 6) (5 7), (1 2 3)(4 7)(5 6), (1 3 2)(4 5)(6 7), (1 3 2)(4 6)(5 7), (1 3 2)(4 7)(5 6), (1 2 4)(3 5)(6 7), (1 2 4)(3 6)(5 7), (1 2 4)(3 7)(5 6), (1 4 2)(3 5)(6 7), (1 4 2)(3 6)(5 7), (1 4 2)(3 7)(5 6), (1 2 5)(3 4)(6 7), (1 2 5)(3 6)(4 7), (1 2 5)(3 7)(4 6), (1 5 2)(3 4)(6 7), (1 5 2)(3 6)(4 7), (1 5 2)(3 7)(4 6), (1 2 6)(3 4)(5 7), (1 2 6)(3 5)(4 7), (1 2 6)(3 7)(4 5), (1 6 2)(3 4)(5 7), (1 6 2)(3 5)(4 7), (1 6 2)(3 7)(4 5), (1 3 5)(2 4)(6 7), (1 3 5)(2 6)(4 7), (1 3 5)(2 7)(4 6), (1 5 3)(2 4)(6 7), (1 5 3)(2 6)(4 7), (1 5 3)(2 7)(4 6),

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$ où $R = (1\ 2)$ et S, T est l'une des 30 bases précédentes.

Bases du type (7,5)

S = (1 2 3 4 5 6 7).

T = l'une des 72 substitutions $(1\ a\ b\ c\ d)$, où $a\ b\ c\ d$ est une permutation quelconque de l'un des trois groupes de nombres 2, 3, 4, 5 ; 2, 3, 4, 6 ou 2, 3, 5, 6.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$ où $R = (1\ 2)$ et S, T est l'une des 72 bases précédentes.

S = (1 2 3 4 5 6 7).

T = l'une des 78 substitutions (1 2 3 4) (5 6), (1 2 4 3) (5 6),
(1 3 2 4) (5 6), (1 3 4 2) (5 6), (1 4 2 3) (5 6), (1 4 3 2) (5 6),
(1 2 3 4) (5 7), (1 2 4 3) (5 7), (1 3 2 4) (5 7), (1 3 4 2) (5 7),
(1 4 2 3) (5 7), (1 4 3 2) (5 7), (1 2 3 4) (6 7), (1 2 4 3) (6 7),
(1 3 2 4) (6 7), (1 3 4 2) (6 7), (1 4 2 3) (6 7), (1 4 3 2) (6 7),
(1 2 3 5) (4 6), (1 3 2 5) (4 6), (1 5 2 3) (4 6), (1 5 3 2) (4 6),
(1 2 3 5) (4 7), (1 2 5 3) (4 7), (1 3 5 2) (4 7), (1 5 3 2) (4 7),
(1 2 5 3) (6 7), (1 3 2 5) (6 7), (1 3 5 2) (6 7), (1 5 2 3) (6 7),
(1 2 3 6) (4 7), (1 3 2 6) (4 7), (1 6 2 3) (4 7), (1 6 3 2) (4 7),
(1 2 3 6) (5 7), (1 2 6 3) (5 7), (1 3 6 2) (5 7), (1 6 3 2) (5 7),
(1 2 6 3) (4 5), (1 3 2 6) (4 5), (1 3 6 2) (4 5), (1 6 2 3) (4 5),
(1 2 4 5) (3 6), (1 2 5 4) (3 6), (1 4 2 5) (3 6), (1 4 5 2) (3 6),
(1 5 2 4) (3 6), (1 5 4 2) (3 6), (1 2 4 5) (3 7), (1 2 5 4) (3 7),
(1 4 2 5) (3 7), (1 4 5 2) (3 7), (1 5 2 4) (3 7), (1 5 4 2) (3 7),
(1 2 4 5) (6 7), (1 2 5 4) (6 7), (1 4 2 5) (6 7), (1 4 5 2) (6 7),
(1 5 2 4) (6 7), (1 5 4 2) (6 7), (1 2 4 6) (3 5), (1 2 6 4) (3 5),
(1 4 2 6) (3 5), (1 4 6 2) (3 5), (1 6 2 4) (3 5), (1 6 4 2) (3 5),
(1 2 4 6) (3 7), (1 2 6 4) (3 7), (1 4 2 6) (3 7), (1 4 6 2) (3 7),
(1 6 2 4) (3 7), (1 6 4 2) (3 7), (1 2 4 6) (5 7), (1 2 6 4) (5 7),
(1 4 2 6) (5 7), (1 4 6 2) (5 7), (1 6 2 4) (5 7), (1 6 4 2) (5 7).

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$ où $R = (1\ 2)$ et S, T est l'une des 78 bases précédentes.

Bases du type (7,3.3)

$S = (1\ 2\ 3)\,(4\ 5\ 6)$.

$T =$ l'une des 26 substitutions $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)^i$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 5)^i$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 6\ 5)^i$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 7)^j$, $(1\ 2\ 3\ 7\ 4\ 6\ 5)^j$, $(1\ 2\ 6\ 3\ 4\ 5\ 7)^k$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 6$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (1\ 4)\,(2\ 5)\,(3\ 6)$ et S, T est l'une des 26 bases précédentes.

Bases du type (7,3)

$S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.

$T =$ l'une des 10 substitutions $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 4)$, $(1\ 4\ 2)$, $(1\ 2\ 5)$, $(1\ 5\ 2)$, $(1\ 2\ 6)$, $(1\ 6\ 2)$, $(1\ 3\ 5)$, $(1\ 5\ 3)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (1\ 2)$ et S, T est l'une des dix bases précédentes.

Bases du type (7,2.2)

$S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.

$T =$ l'une des neuf substitutions $(1\ 2)\,(3\ 4)$, $(1\ 2)\,(3\ 7)$, $(1\ 2)\,(4\ 5)$, $(1\ 2)\,(4\ 6)$, $(1\ 3)\,(4\ 6)$, $(1\ 3)\,(4\ 7)$, $(1\ 3)\,(2\ 4)$, $(1\ 4)\,(2\ 5)$, $(1\ 4)\,(2\ 6)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (1\ 2)$ et S, T est l'une des neuf bases précédentes.

Bases du type (3.2.2,3.2.2)

$S = (1\ 2\ 3)\,(4\ 5)\,(6\ 7)$, $T = (1\ 4\ 6)\,(2\ 3)\,(5\ 7)$.

$S' = S$, $T' = (1\ 5\ 6)\,(2\ 3)\,(4\ 7)$.

La base S', T' est la transformée de S, T par la substitution $(4\ 5)$.

Bases du type (3.2.2,5)

$S = (1\ 2\ 3)\,(4\ 5)\,(6\ 7)$.

$T =$ l'une des 19 substitutions $(1\ 2\ 3\ 4\ 6)$, $(1\ 2\ 4\ 3\ 6)$, $(1\ 4\ 3\ 2\ 6)$, $(1\ 6\ 4\ 3\ 2)$, $(1\ 2\ 4\ 5\ 6)$, $(1\ 2\ 4\ 6\ 5)$, $(1\ 2\ 6\ 4\ 5)$, $(1\ 4\ 2\ 5\ 6)$, $(1\ 4\ 2\ 6\ 5)$, $(1\ 4\ 5\ 2\ 6)$, $(1\ 4\ 5\ 6\ 2)$, $(1\ 4\ 6\ 2\ 5)$, $(1\ 4\ 6\ 5\ 2)$, $(1\ 6\ 2\ 4\ 5)$, $(1\ 6\ 4\ 2\ 5)$, $(1\ 6\ 4\ 5\ 2)$, $(1\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $(1\ 4\ 6\ 5\ 7)$, $(1\ 4\ 6\ 7\ 5)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (4\ 5)$ et S, T est l'une des 19 bases précédentes.

Bases du type $(3.2.2, 4.2)$

$S = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$.

$T =$ l'une des 23 substitutions $(1\,2\,4\,6)\,(3\,5)$, $(1\,4\,2\,6)\,(3\,5)$, $(1\,4\,6\,2)\,(3\,5)$, $(1\,4\,5\,6)\,(2\,3)$, $(1\,4\,6\,5)\,(2\,3)$, $(1\,6\,4\,5)\,(2\,3)$, $(1\,2\,4\,6)\,(3\,7)$, $(1\,4\,2\,6)\,(3\,7)$, $(1\,4\,6\,2)\,(3\,7)$, $(1\,4\,5\,6)\,(2\,7)$, $(1\,4\,6\,5)\,(2\,7)$, $(1\,6\,4\,5)\,(2\,7)$, $(1\,2\,4\,6)\,(5\,7)$, $(1\,4\,2\,6)\,(5\,7)$, $(1\,4\,6\,2)\,(5\,7)$, $(1\,4\,5\,6)\,(3\,7)$, $(1\,4\,6\,5)\,(3\,7)$, $(1\,6\,4\,5)\,(3\,7)$, $(1\,2\,3\,4)\,(5\,6)$, $(1\,3\,2\,4)\,(5\,6)$, $(1\,2\,4\,5)\,(3\,6)$, $(1\,4\,2\,5)\,(3\,6)$, $(1\,4\,5\,2)\,(3\,6)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (4\,5)$ et S, T est l'une des 23 bases précédentes.

Bases du type $(3.2.2, 3.3)$

$S = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$.

$T =$ l'une des onze substitutions $(1\,2\,4)\,(3\,5\,6)$, $(1\,4\,2)\,(3\,5\,6)$, $(1\,2\,4)\,(3\,6\,5)$, $(1\,4\,2)\,(3\,6\,5)$, $(1\,2\,4)\,(3\,6\,7)$, $(1\,4\,2)\,(3\,6\,7)$, $(1\,2\,4)\,(5\,6\,7)$, $(1\,4\,2)\,(5\,6\,7)$, $(1\,4\,5)\,(2\,6\,7)$, $(1\,4\,6)\,(2\,5\,7)$, $(1\,6\,4)\,(2\,5\,7)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (4\,5)$ et S, T est l'une des onze bases précédentes.

Bases du type $(3.2.2, 3)$

$S = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$, $T = (1\,4\,6)$.

$S' = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$, $T' = (1\,5\,6)$.

La base S', T' est la transformée de S, T par la substitution $(4\,5)$.

Bases du type $(3.2.2, 2.2)$.

$S = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$, $T = (1\,4)\,(2\,6)$ ou $(1\,4)\,(5\,6)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (4\,5)$ et S, T est l'une des deux bases précédentes.

Bases du type $(5,5)$

$S = (1\,2\,3\,4\,5)$.

$T =$ l'une des huit substitutions $(1\,2\,6\,3\,7)$, $(1\,2\,6\,7\,3)$, $(1\,3\,6\,2\,7)$, $(1\,6\,2\,3\,7)$, $(1\,6\,2\,7\,3)$, $(1\,6\,3\,2\,7)$, $(1\,6\,3\,7\,2)$, $(1\,6\,2\,4\,7)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (6\,7)$ et S, T est l'une des huit bases précédentes.

Bases du type (5,4.2)

S = (1 2 3 4) (5 6).

T = l'une des 42 substitutions (1 $a\,b\,c\,d$), (1 2 5 6 7), (1 2 5 7 6), (1 2 7 5 6), (1 5 2 6 7), (1 5 2 7 6), (1 5 6 2 7), (1 5 6 7 2), (1 5 7 2 6), (1 5 7 6 2), (1 7 2 5 6), (1 7 5 2 6), (1 7 5 6 2), (1 3 5 6 7), (1 3 5 7 6), (1 5 3 7 6), (1 5 6 3 7), (1 5 7 3 6), (1 7 5 6 3), où $abcd$ est une permutation quelconque des nombres 2, 3, 5, 7.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où R = (5 6) et S, T est l'une des 42 bases précédentes.

Bases du type (5,3.3)

S = (1 2 3) (4 5 6).

T = l'une des 20 substitutions (1 2 3 4 7), (1 2 3 7 4), (1 2 4 3 7), (1 2 7 3 4), (1 3 2 4 7), (1 3 2 7 4), (1 3 4 2 7), (1 3 7 2 4), (1 2 4 5 7), (1 2 4 7 5), (1 2 5 4 7), (1 2 5 7 4), (1 2 7 5 4), (1 4 7 2 5), (1 4 7 5 2), (1 5 2 4 7), (1 5 2 7 4), (1 5 4 2 7), (1 5 4 7 2), (1 5 7 2 4).

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où R = (1 4) (2 5) (3 6) et S, T est l'une des 20 bases précédentes.

Bases du type (5,3)

S = (1 2 3 4 5), T = (1 6 7).

$S' = S$, T' = (1 7 6).

La base $S'T'$ est la transformée de la base S, T par la substitution (6 7).

Bases du type (5,2.2)

S = (1 2 3 4 5), T = (1 6) (2 7) ou (1 6) (3 7).

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où R = (6 7) et S, T est l'une des deux bases précédentes.

Bases du type (4.2, 4.2)

S = (1 2 3 4) (5 6).

T = l'une des 22 substitutions (1 5 2 3) (4 7), (1 2 3 5) (6 7), (1 2 5 3) (6 7), (1 3 2 5) (6 7), (1 3 5 2) (6 7), (1 5 2 3) (6 7), (1 5 3 2) (6 7), (1 5 2 6) (3 7), (1 5 2 6) (4 7), (1 5 3 6) (2 7), (1 2 5 7) (3 4), (1 2 7 5) (3 4), (1 5 7 2) (3 4), (1 7 5 2) (3 4), (1 2 7 5) (3 6), (1 5 2 7) (3 6), (1 7 2 5) (3 6), (1 5 2 7) (4 6), (1 7 2 5) (4 6), (1 5 7 6) (2 3), (1 7 5 6) (2 3), (1 7 5 6) (2 4).

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (5\ 6)$ et S, T est l'une des 22 bases précédentes.

Bases du type (4.2, 3.3)

$S = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)$.

$T =$ l'une des 18 substitutions $(1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 7)$, $(1\ 4\ 3\ 2)\ (5\ 7)$, $(1\ 2\ 3\ 4)\ (6\ 7)$, $(1\ 4\ 3\ 2)\ (6\ 7)$, $(1\ 2\ 4\ 5)\ (3\ 7)$, $(1\ 5\ 4\ 2)\ (3\ 7)$, $(1\ 2\ 7\ 4)\ (3\ 5)$, $(1\ 4\ 7\ 2)\ (3\ 5)$, $(1\ 4\ 2\ 7)\ (3\ 5)$, $(1\ 7\ 2\ 4)\ (3\ 5)$, $(1\ 2\ 4\ 7)\ (3\ 6)$, $(1\ 7\ 4\ 2)\ (3\ 6)$, $(1\ 7\ 2\ 4)\ (3\ 6)$, $(1\ 4\ 2\ 7)\ (3\ 6)$, $(1\ 2\ 4\ 7)\ (5\ 6)$, $(1\ 7\ 4\ 2)\ (5\ 6)$, $(1\ 2\ 7\ 4)\ (5\ 6)$, $(1\ 4\ 7\ 2)\ (5\ 6)$.

$S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, où $R = (1\ 4)\ (2\ 5)\ (3\ 6)$ et S, T est l'une des 18 bases précédentes.

Bases du type (4.2,3)

$S = (1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6)$, $T = (1\ 5\ 7)^{\pm 1}$.

$S' = S$, $T' = (1\ 6\ 7)^{\pm 1}$.

Les deux bases S', T' sont les transformées des deux bases précédentes S, T par la substitution $(5\ 6)$.

Bases du type (4.2,2.2)

$S = (1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6)$, $T = (1\ 5)\ (3\ 7)$ ou $(1\ 5)\ (6\ 7)$.

$S' = S$, $T' = (1\ 6)\ (3\ 7)$ ou $(1\ 6)\ (5\ 7)$.

Les deux bases S', T' sont les transformées des deux bases S, T par $(5\ 6)$.

Bases du type (3.3,3)

$S = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)$, $T = (1\ 4\ 7)$.

$S' = S$, $T' = (1\ 7\ 4)$.

La base S', T' est la transformée de S, T par la substitution $(1\ 4)\ (2\ 5)\ (3\ 6)$.

Bases de première espèce et du genre 2

Bases du type (7,7)

$S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.

$T =$ l'une des 17 substitutions $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 6)$, $(1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 6\ 5)$, $(1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 4)$, $(1\ 2\ 3\ 7\ 5\ 6\ 4)$, $(1\ 2\ 5\ 7\ 6\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 6\ 5\ 7\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 6\ 7\ 5\ 4\ 3)$, $(1\ 2\ 7\ 5\ 6\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 5\ 4\ 7\ 6)$, $(1\ 3\ 2\ 5\ 7\ 6\ 4)$, $(1\ 3\ 2\ 7\ 6\ 5\ 4)$, $(1\ 3\ 6\ 2\ 4\ 7\ 5)$, $(1\ 3\ 6\ 2\ 7\ 5\ 4)$, $(1\ 3\ 6\ 5\ 7\ 4\ 2)$, $(1\ 3\ 7\ 6\ 4\ 2\ 5)$, $(1\ 3\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 3\ 7\ 6\ 5\ 2)$.

Les substitutions R correspondant à ces 17 bases et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement (6 7), (5 7), (1 5) (2 6) (3 7), (4 7), (1 3) (2 4) (6 7), (1 3) (2 4) (5 6), (1 6) (2 7) (3 5), (1 5) (2 6) (3 4), (2 3) (4 5) (6 7), (1 5) (3 6) (2 7), (2 3) (4 7) (5 6), (1 4) (3 5) (2 7), (1 6) (3 7) (4 5), (1 6) (3 7) (2 5), (1 4) (3 5) (6 7), (1 2) (4 7) (5 6), (1 2) (3 4) (5 7).

Bases du type (3.2.2,3.2.2)

S = (1 2 3) (4 5) (6 7).

T = l'une des trois substitutions (1 4 6) (2 7) (3 5), (1 4 2) (3 6) (5 7), (4 5 6) (1 2) (3 7).

Les substitutions R correspondant à ces tros bases et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement (2 4) (3 6) (5 7), (1 2) (3 4) (5 6) et (1 4) (2 5) (3 6).

Bases du type (5,5)

S = (1 2 3 4 5).

T = l'une des six substitutions (1 3 2 6 7), (1 3 6 7 2), (1 6 7 3 2), (1 4 6 2 7), (1 6 4 2 7), (1 6 4 7 2).

Les substitutions correspondantes R du second ordre qui transforment chacune de ces six bases en elle-même sont respectivement (2 3)(4 6)(5 7), (1 2) (4 6) (5 7), (1 3) (4 6) (5 7), (2 4) (3 6) (5 7), (1 4) (5 6) (3 7) et (1 2) (3 6) (5 7).

Bases du type (4.2, 4.2)

S = (1 2 3 4) (5 6).

T = l'une des 9 substitutions (1 3 2 5) (4 7), (1 3 5 2) (4 7), (1 5 3 2) (4 7), (1 5 7 2) (3 6), (1 7 5 2) (4 6), (1 5 3 7) (4 6), (1 5 6 7) (2 3), (1 5 7 6) (2 4), (1 7 5 6) (3 4).

Les substitutions R correspondant à ces 9 bases et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement (2 3) (4 5) (6 7), (1 2) (4 5) (6 7), (1 3) (4 5) (6 7), (1 2) (3 5) (4 7), (1 2) (3 7) (4 5), (1 3) (2 7) (4 5), (2 5) (3 6) (4 7), (2 5) (4 6) (3 7), (2 7) (3 5) (4 6).

Bases du type (3.3, 3.3)

S = (1 2 3) (4 5 6).

T = l'une des deux substitutions (1 2 4) (5 6 7), (1 4 2) (5 7 6).

Les substitutions correspondantes R, telles que $R^2 = 1$, $RSR^{-1} = T$ sont respectivement (1 5) (2 6) (3 7) et (1 6) (2 5) (3 7).

Bases de seconde espèce

Bases du type (7,7)

$S = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$.

$T =$ l'une des 9 substitutions $(1\,2\,3\,5\,4\,7\,6)$. $(1\,2\,3\,6\,7\,4\,5)$, $(1\,2\,3\,7\,6\,5\,4)$, $(1\,2\,4\,3\,5\,7\,6)$, $(1\,2\,6\,7\,4\,5\,3)$, $(1\,2\,7\,6\,5\,4\,3)$, $(1\,3\,2\,4\,7\,6\,5)$, $(1\,3\,7\,5\,2\,6\,4)$, $(1\,4\,3\,2\,7\,6\,5)$.

$S' = R_1SR_1^{-1}$, $T' = R_1TR_1^{-1}$, où $R_1 = (1\,2)$ et S, T est l'une des 9 bases précédentes.

Les substitutions R correspondant aux neuf bases S, T, telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement $(4\,5)\,(6\,7)$, $(4\,6)\,(5\,7)$, $(4\,7)\,(5\,6)$, $(3\,4)\,(6\,7)$, $(1\,4)\,(2\,5)$, $(3\,7)\,(4\,6)$, $(2\,3)\,(5\,7)$, $(1\,5)\,(3\,6)$, $(2\,4)\,(5\,7)$.

Bases du type (3.2.2, 3.2.2)

$S = (1\,2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)$.

$T =$ l'une des deux substitutions $(1\,4\,6)\,(2\,5)\,(3\,7)$, $(1\,2\,4)\,(3\,6)\,(5\,7)$.

$S' = R_1SR_1^{-1}$, $T' = R_1TR_1^{-1}$, où $R_1 = (4\,5)$ et S, T est l'une des deux bases précédentes.

Les substitutions R correspondant aux deux bases S, T et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement $(2\,4)\,(3\,6)$ et $(3\,4)\,(5\,6)$·

Bases du type (5,5)

$S = (1\,2\,3\,4\,5)$.

$T =$ l'une des deux substitutions $(1\,2\,3\,6\,7)$ ou $(1\,2\,6\,4\,7)$.

$S' = R_1SR_1^{-1}$, $T' = R_1TR_1^{-1}$, où $R_1 = (6\,7)$ et S, T est l'une des deux bases précédentes.

Les substitutions R correspondant aux deux bases S, T et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement $(4\,6)\,(5\,7)$ et $(3\,6)\,(5\,7)$.

Bases du type (4.2, 4.2)

$S = (1\,2\,3\,4)\,(5\,6)$.

$T =$ l'une des deux substitutions $(1\,2\,3\,5)\,(4\,7)$, $(1\,5\,3\,7)\,(2\,6)$.

$S' = R_1SR_1^{-1}$, $T' = R_1TR_1^{-1}$, où $R_1 = (5\,6)$ et S, T est l'une des deux bases précédentes.

Les substitutions R correspondant aux deux bases S, T et telles que $R^2 = 1$ et $RSR^{-1} = T$ sont respectivement $(4\,5)(6\,7)$ et $(4\,6)(5\,7)$.

Nombre de bases du groupe $\mathfrak{A}_7$

Type de base	Nombre total de bases d'un type donné	Nombre de bases d'un type donné qui sont de première espèce genre 1	première espèce genre 2	2 me espèce	Nombre total de représentants indépendants des bases d'un type donné	Nombre de représentants indépendants des bases d'un type donné qui sont de première espèce genre 1	première espèce genre 2	2 me espèce
(7,7)	226800	161280	42840	22680	99	64	17	18
(7,3.2.2)	151200	151200	—	—	60	60	—	—
(7,5)	362880	362880	—	—	144	144	—	—
(7,4.2)	393120	393120	—	—	156	156	—	—
(7,3.3)	131040	131040	—	—	52	52	—	—
(7,3)	50400	50400	—	—	20	20	—	—
(7,2.2)	45360	45360	—	—	18	18	—	—
(3.2.2,3.2.2)	17640	5040	7560	5040	9	2	3	4
(3.2.2,5)	95760	99760	—	—	38	38	—	—
(3.2.2,4.2)	115920	115920	—	—	46	46	—	—
(3.2.2,3.3)	55440	55440	—	—	22	22	—	—
(3.2.2,3)	5040	5040	—	—	2	2	—	—
(3.2.2,2.2)	10080	10080	—	—	4	4	—	—
(5,5)	60480	40320	15120	5040	26	16	6	4
(5,4.2)	211680	211680	—	—	84	84	—	—
(5,3.3)	100800	100800	—	—	40	40	—	—
(5,3)	5040	5040	—	—	2	2	—	—
(5,2.2)	10080	10080	—	—	4	4	—	—
(4.2,4.2)	138600	110880	22680	5040	57	44	9	4
(4.2,3.3)	90720	90720	—	—	36	36	—	—
(4.2,3)	10080	10080	—	—	4	4	—	—
(4.2,2.2)	10080	10080	—	—	4	4	—	—
(3.3,3.3)	5040	—	5040	—	2	—	2	—
(3.3,3)	5040	5040	—	—	2	2	—	—
Totaux	2308320	2177280	93240	37800	931	864	37	30

Remarque 8. Si le couple S, T de substitutions de $\mathfrak{A}_7$ est de l'un des types (7,3.2.2), (7,5), (7,3), les substitutions S et T sont toujours connexes et elles constituent toujours une base de $\mathfrak{A}_7$.

Si le couple S, T est de l'un des types (3.2.2,3.2.2), (3.2.2,5), (3.2.2,4.2), (3.2.2,3.3), (3.2.2,3), (3.2.2,2.2), (5,5), (5,4.2), (5,3.3), (5,3), (5,2.2), (4.2,3) ou (3.3,3), les substitutions S et T ne sont pas toujours connexes, mais, si elles sont connexes, elles constituent toujours une base de $\mathfrak{A}_7$.

Si le couple S, T est de l'un des types (7,7), (7,4.2), (7,3.3), (7,2.2), les substitutions S et T, bien que toujours connexes, ne constituent pas toujours une base de $\mathfrak{A}_7$.

Enfin, si le couple S, T est de l'un des types (4.2,4.2), (4.2,3.3), (4.2,2.2), (3.3,3.3), S et T ne sont pas toujours connexes et, même si elles sont connexes, elles ne constituent pas toujours une base de $\mathfrak{A}_7$.

Tableau récapitulatif des nombres de bases des groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ et $\mathfrak{A}_7$

Groupe	Nombre total de bases	Nombre de bases de			Nombre de représentants indépendants des bases	Nombre de représentants indépendants de		
		première espèce		seconde espèce		première espèce		seconde espèce
		genre 1	genre 2			genre 1	genre 2	
$\mathfrak{A}_4$	48	24	12	12	5	2	1	2
$\mathfrak{A}_5$	1 140	840	120	180	22	14	2	6
$\mathfrak{A}_6$	38 160	35 280	720	2 160	112	98	2	12
$\mathfrak{A}_7$	2 308 320	2 177 280	93 240	37 800	931	864	37	30

(Reçu le 30 juin 1948.)