Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Die hydrodynamische Bedeutung der automorphen Funktionen (ebene Strömungen um Kreisbogenpolygone).

Autor: Matthieu, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19755

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die hydrodynamische Bedeutung der automorphen Funktionen
(ebene Strömungen um Kreisbogenpolygone)

Von P. Matthieu, Zürich

1. Einleitung[1])

Seit den klassischen Untersuchungen von Helmholtz, Kirchhoff und Joukowsky ist bekannt, daß zwischen der Funktionentheorie und der Hydrodynamik sehr enge Beziehungen bestehen. Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, systematisch zu untersuchen, welche Bedeutung in diesem Zusammenhange den automorphen Funktionen zukommt, ein Gedanke, der wegen den geometrischen Eigenschaften dieser Funktionen sehr naheliegend erscheint. Die Untersuchung soll jedoch beschränkt bleiben auf die symmetrischen automorphen Funktionen, d. h. auf diejenigen, die die Eigenschaft haben, daß sie ein gewisses Kreisbogenpolygon in der Ebene des Argumentes (und damit auch unendlich viele solche Polygone) konform abbilden auf die obere Bildhalbebene. Ein aus dem ersten durch Spiegelung an einer Seite hervorgehendes Polygon wird dann auf die untere Halbebene abgebildet, und beide Polygone zusammen bilden also einen Fundamentalbereich für die Funktion, die damit das Geschlecht Null hat.

Jeder derartigen automorphen Funktion bzw. der zu ihr gehörenden Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit reellen Koeffizienten entspricht, wie im dritten Abschnitt auseinandergesetzt wird, im wesentlichen eineindeutig eine ebene Potentialströmung, deren Strömungsbereich einfach zusammenhängend ist und von lauter Kreisbogen begrenzt wird. Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen vier Beispiele von solchen Strömungen, nämlich eine Strömung um ein Tragflügelprofil, das von drei Kreisbogen gebildet wird, eine Strömung um ein brückenpfeilerartiges Profil, eine Strömung um einen dreieckigen Stab, der in den Ecken kreisförmig abgerundet ist und eine Strömung gegen einen unendlich langen Damm, der an seinem Ende kreisförmig begrenzt ist.

---

[1]) Vgl. auch die Zusammenfassung am Schluß dieser Arbeit.

Dieser Zusammenhang kann nun einerseits benutzt werden zur Berechnung derartiger Strömungen aus den bekannten Eigenschaften der automorphen Funktionen. In einer Reihe von Fällen kann die Lösung in geschlossener Form dargestellt werden. Vor allem ist das der Fall beim umströmten Kreisbogendreieck und bei solchen Bereichen, die sich durch

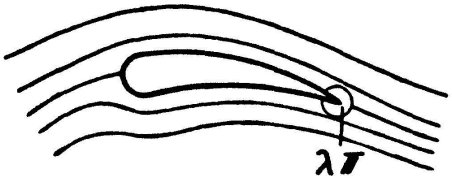

Abbildung 1

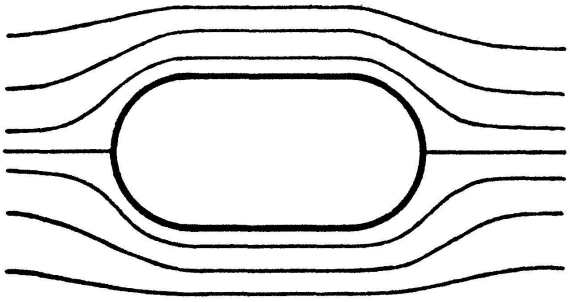

Abbildung 2

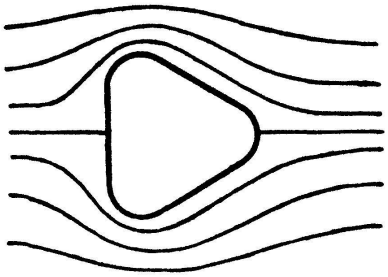

Abbildung 3

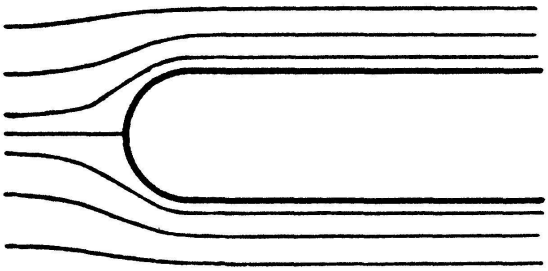

Abbildung 4

symmetrische Wiederholung aus einem Kreisbogendreieck ableiten lassen. In den übrigen Fällen gibt es rasch konvergierende und praktisch zu verwendende Näherungsmethoden, die es gestatten, jede solche Strömung mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Diese Methoden führen so bequem zum Ziel, daß es sich wahrscheinlich auch in den genannten Fällen, in denen eine Integration in geschlossener Form möglich ist, stets empfiehlt sie anzuwenden. Auf der andern Seite können diese Zusammenhänge benutzt werden, um aus einer ebenen Potentialströmung um ein Kreisbogenpolygon auf experimentellem Wege die zugehörige automorphe Funktion zu bestimmen bzw. die ihr entsprechende Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse zu lösen, ein Gedanke, der jedoch hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Die Arbeit ist so gegliedert, daß nach Aufstellung der Grundgleichungen im folgenden Abschnitt zunächst unter 3 die allgemeinen Gesichtspunkte für die Lösung behandelt sind. 4 ist dem besonders einfachen und wichtigen Fall des Kreisbogendreiecks gewidmet, während der folgende Abschnitt die Durchführung der Theorie für das allgemeine Polygon enthält. 6 befaßt sich mit Polygonen, die sich ins Unendliche er-

strecken, Abschnitt 7 enthält eine Reihe von Beispielen für die Berechnung von Strömungen, und schließlich sind die wichtigsten Resultate unter 8 nochmals kurz zusammengefaßt.

2. Aufstellung der Grundgleichungen

Der Zusammenhang zwischen Funktionentheorie und Hydrodynamik beruht bekanntlich darauf, daß die Strömungsgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0 \tag{1}$$

für eine ebene, stationäre, wirbel- und quellenfreie Strömung einer idealen, inkompressibeln Flüssigkeit übereinstimmen mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen der Funktionentheorie. Wir verlegen die Strömung im folgenden in eine komplexe z-Ebene. $z = x + iy$ ist dann der komplexe Aufpunkt. Bezeichnen wir ferner mit Φ das Geschwindigkeitspotential und mit Ψ die Stromfunktion, so ist das komplexe Potential $\Phi + i\,\Psi$ eine analytische Funktion $f(z)$ des Aufpunkts:

$$w = \Phi + i\,\Psi = f(z)\ . \tag{2}$$

Umgekehrt definiert in dieser Weise jede analytische Funktion eine Strömung. Sind ferner u und v die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ im Punkte z, so ist die komplexe Geschwindigkeit $u - i\,v$ gleich der Ableitung $f'(z)$:

$$w' = u - i\,v = f'(z)\ . \tag{3}$$

Besonders wichtig und im folgenden speziell behandelt ist der Fall eines von einer Flüssigkeit umströmten Profils. In diesem Falle lassen wir, wie das in der Theorie des unendlichen Tragflügels üblich ist, für $z = \infty$ einen einzigen Wirbelpunkt zu, was auf die Annahme einer Zirkulation um das Profil herauskommt. Es bestehen dann noch eine Reihe weiterer Beziehungen. Bezeichnet $\mathfrak{C}$ irgendeine das Profil umschließende Kurve, Γ die Zirkulation längs $\mathfrak{C}$ und G den Fluß durch die Kurve $\mathfrak{C}$, so besteht für die komplexe Zirkulation $\Gamma + i\,G$ die auch in allgemeineren Fällen gültige Beziehung

$$\Gamma + i\,G = \int_{\mathfrak{C}} \frac{dw}{dz}\,dz\ , \tag{4}$$

wobei das Integral in positivem Sinne über $\mathfrak{C}$ zu erstrecken ist. In unserem Fall ist dieser Wert immer reell, da nach den gemachten Voraussetzungen der Fluß G verschwindet.

Bezeichnen ferner K_x und K_y die Komponenten der auf das Profil ausgeübten Kraft, so gilt für die komplexe Kraft $K_x - i\,K_y$ die Formel

$$K_x - i\,K_y = \frac{i\,\varrho}{2} \int\limits_{\mathfrak{C}} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\ , \tag{5}$$

wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Gleichung (5) ist im wesentlichen mit der Auftriebsformel von Kutta-Joukowsky identisch. Schließlich gilt für das komplexe Moment $M_0 + i\,M_1$ bezüglich des Ursprungs die Beziehung

$$M_0 + i\,M_1 = -\frac{\varrho}{2} \int\limits_{\mathfrak{C}} z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\ , \tag{6}$$

Hier bedeutet M_0 das Drehmoment bezüglich des Ursprungs, während M_1 keine einfache physikalische Bedeutung hat. Die letzten drei Formeln sind unabhängig von der speziellen Wahl der Kurve $\mathfrak{C}$. Sie lassen sich noch in eleganter Weise durch die Residuensätze umformen, indem der Wert jedes Integrals im wesentlichen gleich dem Residuum des Integranden im Punkte ∞ ist. Wenn wir die Strömung im folgenden in üblicher Weise überall außerhalb der Profilkurve, insbesondere auch im Punkte ∞, als regulär voraussetzen, so haben wir für $\frac{dw}{dz}$ um den Punkt ∞ eine Entwicklung der Form

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots\ , \tag{7}$$

wobei die a_i komplexe Konstanten sind und wobei a_0 unmittelbar die Geschwindigkeit im Unendlichen ist. Die Formeln (4) bis (6) schreiben sich dann gemäß (7) in der Form

$$\Gamma = \quad 2\pi\,i\,a_1 \tag{8}$$

$$K_x - i\,K_y = -\,2\pi\,\varrho\,a_0\,a_1 \tag{9}$$

$$M_0 + i\,M_1 = -\,i\,\pi\,\varrho(2a_0\,a_2 + a_1^2)\ . \tag{10}$$

Aus (8) folgt noch, daß a_1 in unserem Fall stets rein imaginär sein muß.

Durch diese Formeln wird die Theorie der ebenen Potentialströmungen um ein Profil im wesentlichen erfaßt. Bei bekannter Funktion $f(z)$ ergeben sich durch (2) der Verlauf der Strömung, vor allem die Stromlinien, durch (3) die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte, durch (4) und (8) die Zirkulation um das Profil und durch (5), (6), (9) und (10) die auf dieses Profil wirkenden Kräfte und Momente.

3. Strömungen um Kreisbogenpolygone

Wir führen vier komplexe Zahlebenen ein, deren Anordnung und Bezeichnung aus Abb. 5 zu ersehen ist. In der Z-Ebene denken wir uns den Einheitskreis als Profilkurve gegeben. Dann wird bekanntlich durch

$$w = U\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - \frac{i\,\Gamma}{2\pi} \lg Z \qquad (U,\ \Gamma \text{ reell},\ U > 0) \tag{11}$$

in der Z-Ebene eine Strömung mit der Zirkulation Γ um den Einheitskreis definiert, die im Unendlichen parallel zur Ξ-Achse verläuft und dort die Geschwindigkeit U hat. Wenn wir nun durch eine Funktion

$$z = \varphi(Z) \tag{12}$$

den Einheitskreis der Z-Ebene konform abbilden können auf ein Kreisbogenpolygon in der z-Ebene, was nach Riemann möglich ist, so wird

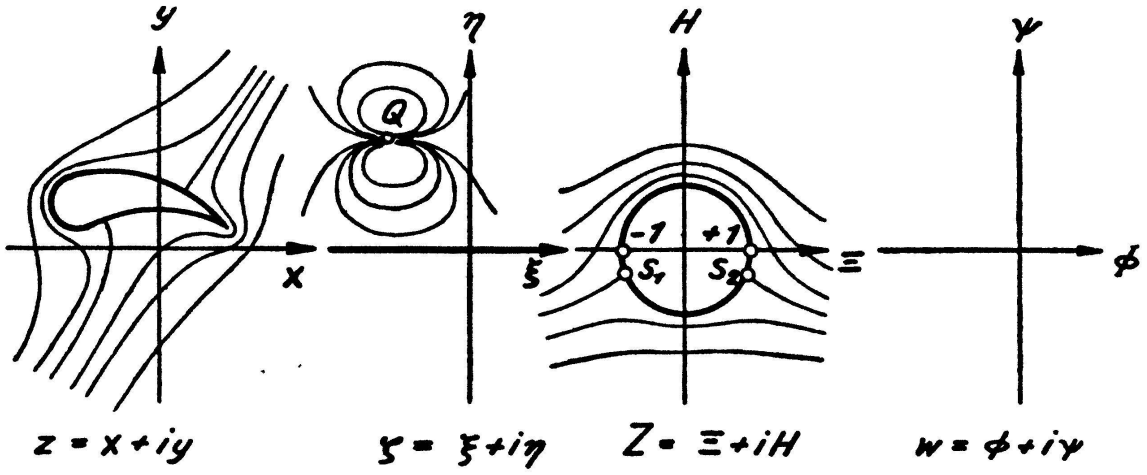

Abbildung 5

dadurch auch die Strömung um den Einheitskreis in der Z-Ebene abgebildet auf eine Strömung um das Kreisbogenpolygon in der z-Ebene. Die Stromlinien entsprechen sich einzeln und die Strömung wird beschrieben durch die aus (11) und (12) fließende Abhängigkeit zwischen z und w. Es handelt sich also nur um die Bildung von (12).

Dazu bilden wir zunächst das Äußere des Einheitskreises in der Z-Ebene — den Strömungsbereich — auf die obere ζ-Halbebene ab. Das wird geleistet durch

$$Z = \frac{(a + b\,i)\,\zeta + (c + di)}{(a - b\,i)\,\zeta + (c - di)} \qquad \zeta = \frac{(c - di)\,Z - (c + di)}{(-a + b\,i)\,Z + (a + b\,i)}, \tag{13}$$

wobei a, b, c, d vier reelle Zahlen mit der Nebenbedingung $ad > bc$ sind. Bei Nichtbestehen dieser letzteren würde der Strömungsbereich auf

die untere Halbebene abgebildet. Die obigen Konstanten können stets so normiert werden, daß die Beziehung

$$a\,d - b\,c = 1 \tag{14}$$

besteht, was im folgenden stets vorausgesetzt werden soll. Bei gegebener Funktion (13) werden a, b, c, d durch (14) bis auf zwei Möglichkeiten bestimmt, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und die deshalb im folgenden nicht als verschieden betrachtet werden sollen, so daß wir also sagen können, daß die obigen Konstanten durch die Normierung (14) eindeutig bestimmt sind.

Es handelt sich nun noch darum, die obere ζ-Halbebene abzubilden auf das Äußere des Polygons in der z-Ebene. Das kann aber geschehen durch (im allgemeinen mehrdeutige) automorphe Funktionen bzw. durch Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse. Im einfachsten Fall des Kreisbogendreiecks haben wir Schwarzsche Dreiecksfunktionen bzw. hypergeometrische Funktionen. Es sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse[2]) zwischen den Variabeln ζ und z^* gegeben mit n singulären Stellen (der Bestimmtheit). Diese letzteren seien mit $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ bezeichnet und die zugehörigen Exponenten mit $\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n', \alpha_n''$, wobei bekanntlich die Beziehung bestehen muß

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k' + \alpha_k'' = n - 2\,. \tag{15}$$

Alle singulären Stellen und Exponenten setzen wir als reell voraus und wir können auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ annehmen. Wenn wir ferner die singuläre Stelle $\zeta = a_n$ ins Unendliche verlegen, was im folgenden immer geschehen soll, hat die Gleichung die Form

$$\frac{d^2 z^*}{d\zeta^2} + p(\zeta)\frac{dz^*}{d\zeta} + q(\zeta)\,z^* = 0 \tag{16}$$

mit

$$p(\zeta) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \alpha_k' - \alpha_k''}{\zeta - a_k} \tag{17}$$

$$q(\zeta) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k'\,\alpha_k''}{(\zeta - a_k)^2} + \frac{G_{n-3}(\zeta)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)}\,. \tag{18}$$

---

[2]) Für die hier verwendeten Begriffe aus der Theorie der Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse vgl. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, oder Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, herausgegeben von O. Haupt, Berlin 1933.

Hierbei ist $G_{n-3}(\zeta)$ ein Polynom höchstens vom Grade $n-3$ mit ebenfalls reellen Koeffizienten, welch letztere die akzessorischen Parameter genannt werden und welche noch eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen, damit (16) im Unendlichen die Exponenten α_n' und α_n'' hat. Diese Bedingung ergibt sich leicht dadurch, daß man die Fundamentalgleichung für den Punkt ∞ aufstellt und verlangt, daß diese die Wurzeln α_n' und α_n'' hat. Bezeichnet man mit r_i das Residuum von (18) an der Stelle a_i, so lautet die Fundamentalgleichung für den Punkt ∞

$$\varrho(\varrho-1)+\left[2-\sum_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_k'-\alpha_k'')\right]\varrho+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k'\alpha_k''+a_k r_k)=0\ . \tag{19}$$

Setzt man hier für ϱ den Wert α_n' ein, so ergibt sich nach leichter Umformung

$$\alpha_n'^2-\left[n-2-\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k'+\alpha_k'')\right]\alpha_n'+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k'\alpha_k''+a_k r_k)=0\ , \tag{20}$$

und das ist die gesuchte Beziehung für die r_k und damit für die Koeffizienten von $G_{n-3}(\zeta)$. Hätte man in (19) statt α_n' den anderen Exponenten α_n'' eingesetzt, so wäre man zur selben Gleichung (20) gekommen. Man erkennt dies dadurch, daß gemäß (15) der Koeffizient von ϱ in der quadratischen Gleichung (19) stets den Wert $-(\alpha_n'+\alpha_n'')$ hat, so daß also α_n'' stets gleichzeitig mit α_n' Wurzel von (19) ist.

Sind nun z_1^* und z_2^* zwei beliebige linear unabhängige (nicht notwendig reelle) partikuläre Integrale einer gegebenen Gleichung (16), so weiß man, vor allem durch die klassischen Untersuchungen von Schwarz[3]), daß durch den Quotienten

$$\omega(\zeta)=\frac{z_1^*}{z_2^*} \tag{21}$$

die obere Halbebene abgebildet wird auf ein Kreisbogenpolygon der ω-Ebene. Die n singulären Stellen a_k gehen dabei über in die Ecken E_k des Polygons, welches dort bzw. die Winkel

$$|\alpha_k''-\alpha_k'|\,\pi=\alpha_k\pi \tag{22}$$

hat. Die Lage der Ecken hängt erstens ab von der Lage der n singulären Stellen, zweitens von den $n-3$ akzessorischen Parametern und drittens von den 6 reellen Konstanten im Quotienten (21). Von diesen $2n+3$ reellen Parametern sind jedoch drei unwesentlich, da man durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variabeln, welche den

[3]) Über diejenigen Fälle, in denen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Argumentes darstellt, Ges. Math. Abh., Bd. II, S. 211.

Charakter von (16) unverändert läßt, stets über drei von ihnen verfügen kann. Zum Beispiel kann man drei der singulären Stellen in drei beliebige Punkte der reellen Achse verlegen, wie dies im allgemeinen bei der hypergeometrischen Differentialgleichung gemacht wird. Demnach bleiben zur Bestimmung der Ecken noch $2n$ Parameter, wie dies auch auf Grund von geometrischen Überlegungen der Fall sein muß.

Ist umgekehrt in der z-Ebene ein beliebiges Kreisbogenpolygon gegeben, dessen Ecken in positivem Umlaufsinn in bestimmter Weise mit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ bezeichnet sind, so gibt es dazu unendlich viele Gleichungen (16), dergestalt, daß die obere ζ-Halbebene durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Partikulärintegrale auf das gegebene Kreisbogenpolygon abgebildet werden kann, und daß dabei dem singulären Punkte a_k die Ecke E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ entspricht. Sie stimmen alle überein in den Größen (22) und gehen bei gleichen Exponenten durch ganze lineare Transformationen der unabhängigen Variabeln auseinander hervor. Verlegen wir also durch eine solche Transformation die singulären Stellen a_1 und a_2 bzw. in die Punkte 0 und 1 der ζ-Ebene, so daß demnach jetzt die Beziehung besteht

$$a_1 = 0 < a_2 = 1 < a_3 < \cdots < a_n = \infty \tag{23}$$

und stellen wir noch die zusätzlichen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k' &= 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \alpha_k'' &\geqq a_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

so gehört zu jedem Kreisbogenpolygon eine und nur eine Differentialgleichung (16). Im folgenden denken wir uns die zu einem Kreisbogenpolygon gehörende Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse fast immer entweder in dieser oder dann in einer nächsten zu besprechenden zweiten Art normiert. Die Koeffizienten der auf die eben genannte Weise normierten Gleichung haben dann also die Form (17) und (18), und es bestehen ferner noch die zusätzlichen Bedingungen (15), (20), (23) und (24). Beachtenswert ist noch, daß infolge von (24) die Summe in (18) stets wegfällt.

Um nun diese Betrachtungen auf unsere hydrodynamische Problemstellung anzuwenden, denken wir uns bei gegebener Profilkurve zuerst die zugehörige (normierte) Gleichung (16) gebildet. Die Berechnung besteht in der Bestimmung der $n-3$ von $0, 1, \infty$ verschiedenen singulären Stellen und in derjenigen der $n-3$ akzessorischen Parameter (über die numerische Berechnung dieser Größen siehe Abschnitt 5). Ferner wählen wir für z_1^* und z_2^* in (21) zwei beliebige, aber dann stets fest-

gehaltene (in der obern Halbebene eindeutige) linear unabhängige Zweige aus. Bilden wir dann den Quotienten

$$z = \frac{e'\omega + f}{g\omega + h} = \frac{e' z_1^* + f z_2^*}{g z_1^* + h z_2^*} \tag{25}$$

mit den komplexen Konstanten e', f, g, h (wir bezeichnen die erste dieser Konstanten mit e' statt mit e, um sie von der später gleichzeitig auftretenden Basis der natürlichen Logarithmen zu unterscheiden), wobei im folgenden wieder die Beziehung

$$e' h - g f = 1 \tag{26}$$

vorausgesetzt werden soll, so können wir diese Konstanten wieder bis auf zwei Möglichkeiten so bestimmen, daß durch (25) die obere ζ-Halbebene abgebildet wird auf das gegebene Kreisbogenpolygon in der z-Ebene. Wie bei den Quotienten (13) sollen die beiden Möglichkeiten im folgenden nicht als verschieden betrachtet werden.

Die Umkehrfunktion von (25) ist dann eine zu dem gegebenen Kreisbogenpolygon gehörende (im allgemeinen mehrdeutige) automorphe Funktion. Sie ist so normiert, daß sie im Eckpunkt $z = E_k$ den Wert $\zeta = a_k$ annimmt, und wir bezeichnen sie deshalb als die zu dem Kreisbogenpolygon gehörende normierte automorphe Funktion. Sie bildet dieses stets auf die obere ζ-Halbebene ab. Wenn man das gegebene Kreisbogenpolygon an einer seiner Seiten spiegelt, so bilden das ursprüngliche und das durch Spiegelung entstandene Polygon zusammen einen Fundamentalbereich für diese Funktion.

Damit sind wir im Prinzip am Ziel. Die gesuchte Funktion (12) wird geliefert durch (13) und (25) und die Strömung also dargestellt durch (11), (13) und (25). Bei der Abbildung des Einheitskreises der Z-Ebene auf das Kreisbogenpolygon in der z-Ebene muß noch der unendlich ferne Punkt wieder in den unendlich fernen Punkt übergehen. Ferner kann die Geschwindigkeit im Unendlichen der z-Ebene und also auch die komplexe Geschwindigkeit $V = \left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=\infty}$ beliebig gegeben sein. Das genügt gerade zur Bestimmung der Konstanten U in (11) und a, b, c, d in (13), über die bisher nicht verfügt wurde. Entspricht gemäß (25) dem Punkt $z = \infty$ der Punkt $\zeta = Q$ (Abb. 5), so müssen die Gleichungen bestehen

$$(a - b\,i)Q + (c - d\,i) = 0\ , \tag{27}$$

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=\infty} = \left[\frac{dw}{dZ}\,\frac{dZ}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz}\right]_{z=\infty} = U\left[\frac{\frac{dZ}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}}\right]_{\zeta=Q} = V\ . \tag{28}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich unter Beachtung von (14) eindeutig a, b, c, d und U berechnen, wie dies bereits aus dem Riemannschen Abbildungssatz folgt. Schließlich kann die Zirkulation um das Kreisbogenpolygon noch gegeben sein. Aus

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{dw}{dz}\, dz = \int_{\mathfrak{C}'} \frac{dw}{dZ}\, dZ \;, \tag{29}$$

wo $\mathfrak{C}$ eine das Kreisbogenpolygon in der z-Ebene und $\mathfrak{C}'$ eine den Einheitskreis in der Z-Ebene umschließende Kurve ist (die Integrale sind stets in positivem Sinne zu erstrecken), ergibt sich dann gemäß (4) und (11), daß die Zirkulation um das Kreisbogenpolygon gleich der Größe Γ in Gleichung (11) ist. Die Konstanten in den Gleichungen (11), (13) und (25) sind demnach alle wesentlich. Zusammenfassend können wir also sagen: *Die gesuchte Strömung wird dargestellt durch* (11), (13) *und* (25). *Die Konstanten in diesen Gleichungen bestimmen sich eindeutig aus den Daten des Problems, d. h. aus den geometrischen Eigenschaften des Kreisbogenpolygons, der Geschwindigkeit im Unendlichen und der Zirkulation der Strömung. Aus den geometrischen Eigenschaften ergeben sich zunächst unter Beachtung von* (26) e', f, g, h *in* (25). *Die Zirkulation um das Kreisbogenpolygon ist gleich* Γ *in* (11), *und schließlich bestimmen sich aus der Geschwindigkeit im Unendlichen gemäß* (26), (27) *und* (28) *die Größen* U, a, b, c, d.

Zur Wahl der Zirkulation Γ ist noch zu sagen, daß sich diese theoretisch beliebig wählbare Größe bei Tragflügelprofilen nach dem Vorgang von Joukowsky aus physikalischen Gründen so bestimmen muß, daß der hintere Staupunkt der Strömung in den Eckpunkt des Profils fällt. Durch diese Forderung wird Γ in der Tragflügeltheorie bestimmt.

Die Gleichung (16), aus der sich die Abbildungsfunktion (25) ergibt, läßt sich noch in einfacher Weise umformen[4]). Setzt man

$$z^{**} = z^{*}\, e^{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{p}{2}\, d\zeta} \;, \tag{30}$$

wobei ζ_0 eine beliebige Konstante ist, und wobei man unter dem Integral irgendeinen seiner Zweige verstehen kann (alle Zweige unterscheiden sich ja nur durch multiplikative Konstanten), so folgt aus (16) für z^{**} die Gleichung

$$\frac{d^2 z^{**}}{d\zeta^2} + J(\zeta)\, z^{**} = 0 \;, \tag{31}$$

---

[4]) Siehe dazu zum Beispiel Forsyth-Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Aufl., Braunschweig 1912, §§ 58—62.

wobei die sogenannte Invariante $J(\zeta)$ den Wert hat

$$J = q - \frac{1}{2}\frac{dp}{d\zeta} - \frac{p^2}{4} \quad . \tag{32}$$

Das ist die zweite, schon auf Seite 87 erwähnte Art, in der wir die zu einem Kreisbogenpolygon gehörende Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse normieren können. Sie eignet sich ganz besonders für die numerische Rechnung. Gemäß (30) kann man zu den früher gebrauchten Lösungen z_1^* und z_2^* von (16) stets zwei in der obern Halbebene ebenfalls eindeutige Lösungen z_1^{**} und z_2^{**} von (31) angeben, so daß die Beziehung besteht

$$\omega(\zeta) = \frac{z_1^*}{z_2^*} = \frac{z_1^{**}}{z_2^{**}} \quad . \tag{33}$$

Die Gleichungen (31) und (16) sind also in bezug auf unser Problem einander vollständig äquivalent, und wir können von der einen oder von der andern Form ausgehen. Es wird sich übrigens zeigen, daß für die meisten in den Anwendungen interessanten Fälle die beiden Formen übereinstimmen.

Für die Ableitung der Funktion (33) gilt die wichtige, leicht herzuleitende Formel[4])

$$\omega'(\zeta) = \frac{C}{z_2^{**2}} \quad , \tag{34}$$

wobei die Konstante C den Wert

$$C = z_2^{**}\, z_1^{**\prime} - z_1^{**}\, z_2^{**\prime} \tag{35}$$

hat. Sie kann gemäß (35) leicht berechnet werden, indem man in die rechte Seite dieser Gleichung, welche nicht von ζ abhängt, für diese letztere Größe einen beliebigen Zahlwert einsetzt. Ist umgekehrt irgendein partikuläres Integral z_2^{**} von (31) bekannt, so stellt gemäß (34) das Integral

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{z_2^{**2}} \quad , \tag{36}$$

wo ζ_0 eine beliebige Konstante ist, stets eine Abbildungsfunktion (33) dar, aus der sich (25) wieder als lineare Funktion ergibt.

Von besonderem physikalischem und technischem Interesse sind einerseits überall abgerundete Profile (Abb. 2 und 3) und anderseits Tragflügelprofile mit einem einzigen Punkt, in dem die Tangente nicht stetig verläuft (Abb. 1). Im zweiten Fall wählen wir diesen letzteren Punkt als Eckpunkt E_n, d. h. wir lassen ihm in der zugehörigen Differen-

tialgleichung (16) den Punkt $\zeta = a_n = \infty$ entsprechen. Dann haben aber für jeden im Endlichen gelegenen singulären Punkt a_k von (16) die zugehörigen Exponenten α_k' und α_k'' die Werte

$$\alpha_k' = 0 \qquad \alpha_k'' = 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1) \tag{37}$$

und daraus ergibt sich wieder, daß $p(\zeta)$ und der erste Summand in $q(\zeta)$ identisch verschwinden. Die Gleichung (16) nimmt dann also die besonders einfache Gestalt an

$$\prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k) \frac{d^2 z^*}{d\zeta^2} + G_{n-3}(\zeta)\, z^* = 0 \; . \tag{38}$$

Da in dieser auf die erste Art normierten Gleichung der Koeffizient der ersten Ableitung verschwindet, stimmt sie mit der zugehörigen zweiten Normierungsform (31) überein. Wenn wir schließlich noch die Forderung fallen lassen, daß $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ sein sollen und für diese Größen beliebige Werte zulassen, während wir alle andern Bedingungen für die beiden Normierungen beibehalten, so hat die gemeinsame Normierungsform (38) stets die Gestalt

$$G_{n-1}^*(\zeta) \frac{d^2 z^*}{d\zeta^2} + G_{n-3}^*(\zeta)\, z^* = 0 \; , \tag{39}$$

wobei $G_{n-1}^*(\zeta)$ und $G_{n-3}^*(\zeta)$ zwei reelle Polynome der Grade $n-1$ und $n-3$ sind. Umgekehrt entspricht jeder Gleichung der einfachen Form (39) stets ein Polynom mit höchstens einem Punkt, in dem die Tangente unstetig verläuft. Die genannten Fälle sind also dadurch ausgezeichnet, daß die beiden Normierungsformen einander gleich werden und die besonders einfache Gestalt (38) bzw. (39) annehmen.

Die beiden folgenden Abschnitte enthalten die Verwertung dieser Gedankengänge zur Berechnung von Strömungen. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit dem besonders einfachen und wichtigen Fall des Kreisbogendreiecks, während unter 5 das allgemeine Polygon behandelt ist.

4. Der Fall des Kreisbogendreiecks

Einige solche Strömungen sind zur Untersuchung der Strömungsverhältnisse in der Umgebung scharfer Eintrittskanten bei Tragflügelprofilen bereits von Wolff[5]) kurz behandelt worden. Indessen ergeben sich

[5]) Einfluß der Abrundung scharfer Eintrittskanten auf den Widerstand von Flügeln, Ingenieur-Archiv, Band IV (1933), S. 521.

von unserem allgemeinen Standpunkt aus gegenüber der sehr speziellen Problemstellung bei Wolff so viele neue Gesichtspunkte und Resultate, daß wir glauben, daß eine kurze Betrachtung dieses Falles trotzdem gerechtfertigt ist. Unsere Darstellung soll sich jedoch nur auf die Punkte erstrecken, die gegenüber dem allgemeinen, im nächsten Abschnitt behandelten Fall besonders hervorzuheben sind. Weiterhin soll hier der Einfachheit halber der am Schluß des letzten Abschnittes genannte besonders wichtige Spezialfall vorausgesetzt werden, daß höchstens ein Winkel des Dreiecks von π verschieden ist. Der allgemeine Fall läßt sich in ganz entsprechender Weise durchführen.

Im Falle des Kreisbogendreiecks vereinfachen sich die bisherigen Betrachtungen ganz wesentlich. Das beruht einerseits darauf, daß keine akzessorischen Parameter auftreten. Anderseits reduziert sich in diesem Falle die Gleichung (16) auf eine hypergeometrische Differentialgleichung. Man kann infolgedessen die ganze Theorie der hypergeometrischen Funktion zur Anwendung bringen. Insbesondere können die Probleme auch numerisch ziemlich bequem durch hypergeometrische Reihen berechnet werden.

Wenn man den von π verschiedenen Winkel des Strömungsbereiches mit $\lambda\pi$ bezeichnet (Abb. 1), so haben die Exponenten der Gleichung (16) gemäß (15) und (22) bis (24) die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_2' = 0 & \alpha_1'' &= \alpha_2'' = 1 \\ \alpha_3' &= \frac{-1-\lambda}{2} & \alpha_3'' &= \frac{-1+\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

und die Gleichung (38) nimmt (es kann jetzt $z^* = z^{**}$ gesetzt werden) gemäß (20) die Form an

$$\zeta(\zeta-1)\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} + \frac{1}{4}(1-\lambda^2)\,z^{**} = 0\ . \tag{41}$$

Das ist eine hypergeometrische Differentialgleichung. Sie entsteht aus der üblichen Schreibweise

$$\zeta(\zeta-1)\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} + [(\alpha+\beta+1)\,\zeta-\gamma]\frac{dz^{**}}{d\zeta} + \alpha\,\beta\,z^{**} = 0 \tag{42}$$

dadurch, daß man

$$\alpha = \frac{\lambda-1}{2} \qquad \beta = \frac{-\lambda-1}{2} \qquad \gamma = 0 \tag{43}$$

setzt.

Um zunächst die Abbildungsfunktion (25) zu berechnen, bieten sich vor allem drei Wege dar. Erstens kann man die 24 Kummerschen Parti-

kulärintegrale[6]) von (41) bilden, d. h. im wesentlichen die sechs Fundamentallösungen dieser Gleichung. Diese ergeben sich in Form von hypergeometrischen Reihen, zu welchen bei ganzzahligen Exponentendifferenzen noch logarithmische Glieder hinzutreten können. In unserem Fall hat sowohl für $\zeta = 0$ wie auch für $\zeta = 1$ die Exponentendifferenz den Wert 1. Diese 24 Integrale können unter Benützung der Formeln

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1 \qquad F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\Pi(\gamma - \beta - 1)} \tag{44}$$

nach bekannten Regeln leicht ineinander fortgesetzt werden[6]), wobei F in bekannter Weise die hypergeometrische Reihe und Π die Gaußsche Π-Funktion bezeichnet. Jedes dieser 24 Integrale konvergiert in einem gewissen Bereiche der ζ-Ebene, und alle diese Bereiche überdecken die ζ-Ebene lückenlos. Man kann also auf diese Weise den Gesamtverlauf zweier Lösungen z_1^{**} und z_2^{**} und damit denjenigen der zugehörigen Funktion (33) in der ganzen ζ-Ebene bestimmen.

In unserem Fall ist es am bequemsten, für z_1^{**} und z_2^{**} die nicht logarithmischen Fundamentallösungen um die Punkte $\zeta = 1$ und $\zeta = 0$ zu wählen[6]) und demgemäß

$$\left.\begin{aligned} z_1^{**} &= (1 - \zeta) F\left(\frac{\lambda + 1}{2}, \frac{-\lambda + 1}{2}, 2; 1 - \zeta\right) \\ z_2^{**} &= \zeta F\left(\frac{\lambda + 1}{2}, \frac{-\lambda + 1}{2}, 2; \zeta\right) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

zu setzen. Unter Berücksichtigung von (43) erhält man daraus für (33)

$$\omega(\zeta) = \frac{(1 - \zeta) F(\alpha + 1, -\alpha, 2; 1 - \zeta)}{\zeta F(\alpha + 1, -\alpha, 2; \zeta)} . \tag{46}$$

Diese Darstellungen gelten zunächst nur für die Konvergenzgebiete der obigen Reihen, d. h. für die Kreise $|\zeta| < 1$ und $|1 - \zeta| < 1$ bzw. für deren gemeinsames Konvergenzgebiet, lassen sich aber nach dem dargestellten Prinzip auf die ganze ζ-Ebene analytisch fortsetzen.

Vermittelst des obigen Fortsetzungsprinzips[6]) läßt sich nun leicht zeigen, daß der Quotient (46) die obere ζ-Halbebene auf das in Abb. 6 dargestellte schraffierte Kreisbogendreieck mit den Ecken

$$\omega(0) = \infty \qquad \omega(1) = 0 \qquad \omega(\infty) = e^{i\pi(\alpha+1)} \tag{47}$$

---

[6]) Vergleiche Forryth-Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 6. Kapitel, sowie die unter Fußnote 5 genannte Literaturangabe.

abbildet, welches in diesen Punkten bzw. die Winkel π, π und $\lambda\pi = (2\alpha + 1)\pi$ hat. Da aber alle Kreisbogendreiecke mit gleichen Winkeln kreisverwandt sind, kann man weiterhin die Konstanten in (25) sofort so bestimmen, daß das Dreieck der Abb. 6 auf den gegebenen Strömungsbereich abgebildet wird. Die Funktion (25) kann also auf diese Weise durch hypergeometrische Reihen dargestellt werden. Es ist dies im Prinzip der von Wolff eingeschlagene Weg zur Bestimmung der Funktion (25).

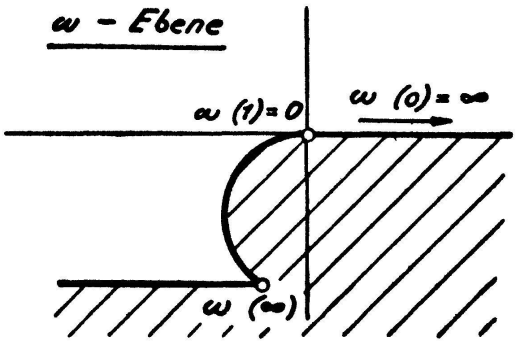

Abbildung 6

Eine zweite Berechnungsmethode ergibt sich aus der Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale[7]). Man rechnet auf Grund dieser Darstellung leicht aus, daß in unserem Fall der Quotient (46) die für die ganze ζ-Ebene gültige Gestalt

$$\omega(\zeta) = \frac{1-\zeta}{\zeta} \frac{\int_0^1 t^\alpha (1-t)^{-\alpha} [1-(1-\zeta)t]^\alpha \, dt}{\int_0^1 t^\alpha (1-t)^{-\alpha} (1-\zeta t)^\alpha \, dt} \tag{48}$$

hat. Der Vorteil dieser Schreibweise liegt neben ihrem theoretischen Wert hauptsächlich in ihrer Geschlossenheit und Einheitlichkeit. Für die numerische Berechnung ist sie jedoch weit weniger geeignet als die erste und eine gleich zu besprechende dritte Lösungsform. Die Ableitungen von (46) und (48) können leicht ausgerechnet werden gemäß der Gleichung (34).

Der dritte Weg schließlich, der wahrscheinlich meistens der einfachste ist, besteht darin, daß die Lösungsmethoden des nächsten Abschnitts für die allgemeine Gleichung sehr gut auch auf den Fall des Kreisbogendreiecks angewandt werden können. Sie vereinfachen sich hier noch wesentlich dadurch, daß die zu einem gegebenen Dreieck gehörende Gleichung (31) von vornherein bekannt ist. Im übrigen sei auf die Entwicklungen des nächsten Abschnitts verwiesen.

Durch diese drei Methoden kann also zu einem gegebenen Kreisbogendreieck sofort eine zugehörige Funktion (33) sowie deren Ableitung und damit auch die zugehörige Funktion (25) und deren Ableitung berechnet werden.

---

[7]) Vgl. zum Beispiel Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion.

Es handelt sich nun noch um die Bestimmung von (11) und (13), d. h. um die Berechnung der in diesen Funktionen auftretenden Konstanten. Diese hat gemäß den Formeln (27) und (28) zu erfolgen. Dazu ist es vor allem notwendig, die Größe Q zu kennen, d. h. denjenigen Punkt der ζ-Ebene, der dem Punkt $z = \infty$ entspricht (Abb. 5). Die Berechnung von Q gemäß Gleichung (25) (vgl. die dadurch entstehende Gleichung (73) im folgenden Abschnitt) kann nun numerisch sehr rasch und genau erfolgen vermittelst der für $\omega(\zeta)$ gefundenen Darstellungen und deren Ableitungen. Man braucht nur von einem Näherungswert auszugehen und kann dann durch das Newtonsche Näherungsverfahren den Wert von Q in wenigen Schritten rasch und genau bestimmen. Die Anwendung des Newtonschen Verfahrens empfiehlt sich hier deshalb, weil mit der Berechnung von $\omega(\zeta)$ gleichzeitig im wesentlichen auch die Ableitung dieser Funktion bekannt wird. Nachdem nunmehr Q bekannt ist, stellen (27) und (28) ein Gleichungssystem dar, aus dem eindeutig a, b, c, d und U berechnet werden können (für die Durchführung der Rechnung vgl. man die Formeln (74) bis (76) im nächsten Abschnitt). Schließlich handelt es sich noch um die Bestimmung der Zirkulation. Wenn wir diese Größe gemäß der Bemerkung auf Seite 89 bestimmen wollen, so müssen wir nur sehen, welcher Punkt auf dem Einheitskreis in der Z-Ebene dem Eckpunkt des Profils, also dem Punkt $\zeta = \infty$, entspricht. Gemäß (13) ist das der Punkt

$$Z = \frac{a + b\,i}{a - b\,i} = e^{i\varphi} \,, \tag{49}$$

wo φ das Argument der Größe (49) darstellt. Die Strömung in der Z-Ebene muß dann in diesem gleichen Punkt ihren hinteren Staupunkt haben. Bezeichnen wir den hinteren Staupunkt der durch (11) dargestellten Strömung durch S_2 (Abb. 5), so muß also die Gleichung bestehen

$$S_2 = e^{i\varphi} \,. \tag{50}$$

Die Staupunkte einer Strömung sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen die Geschwindigkeit verschwindet. (50) führt also auf die Forderung, daß die Ableitung von (11) für $Z = e^{i\varphi}$ verschwinden muß, und aus dieser Bedingung bestimmt sich Γ. Die Ausrechnung ergibt

$$\Gamma = 4\pi\, U \sin\varphi \,. \tag{51}$$

Die damit bekannten Funktionen (11), (13) und (25) stellen nun die gesuchte Strömung dar. Die Geschwindigkeit ergibt sich als Ableitung der aus diesen Gleichungen fließenden Abhängigkeit zwischen z und w.

Am einfachsten ist es, weil durch (46) bzw. (48) ω unmittelbar als Funktion von ζ bestimmt wird, die Geschwindigkeit als Funktion von ζ auszudrücken. Die Ausrechnung ergibt

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dZ}\,\frac{dZ}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\omega}\,\frac{d\omega}{d\zeta}}\,, \tag{52}$$

wobei alle in (52) auftretenden Differentialquotienten als Funktionen von ζ auszudrücken sind. Damit kann nun, ausgehend von einem beliebigen Punkt der ζ-Ebene, zunächst gemäß (25) der zugehörige Punkt der Strömungsebene und dann gemäß (52) in diesem die Geschwindigkeit berechnet werden.

Die Stromlinien ergeben sich dadurch, daß man den Imaginärteil von (11) gleich einer willkürlichen Konstanten setzt, was die Stromlinien in der Z-Ebene liefert. Aus diesen ergeben sich dann diejenigen in der z-Ebene gemäß (13), (46), (48) und (25). Die Zirkulation Γ bestimmt sich nach Gleichung (51). Aus Γ und aus der Geschwindigkeit im Unendlichen ergibt sich ferner nach dem Satz von Kutta-Joukowsky sofort der Auftrieb, den das Profil erfährt. Schließlich kann noch das komplexe Moment gemäß (7) und (10) berechnet werden, indem man $\frac{d\omega}{dz}$ um den Punkt $z = \infty$ in eine Reihe entwickelt. Infolge der etwas komplizierten Gestalt (52) für die komplexe Geschwindigkeit (der Punkt $z = \infty$ entspricht dabei dem Punkt $\zeta = Q$) ist es aber einfacher, die Geschwindigkeit längs des Profils zu berechnen, was besonders leicht geschehen kann, weil längs des Profils die Größe ζ in (46) bzw. (48) reell ist. Das komplexe Moment ergibt sich dann gemäß (6). Schließlich kann aus der Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils auch noch die Grenzschicht berechnet werden. Alle diese Rechnungen können, wie im nächsten Abschnitt ausführlich dargelegt wird, auch numerisch sehr gut durchgeführt werden. Man vergleiche dazu auch die durchgerechneten Beispiele in Abschnitt 7.

Durch die Methoden dieses Abschnittes können auch solche Strömungen berechnet werden, deren Strömungsbereich sich durch symmetrische

Abbildung 7

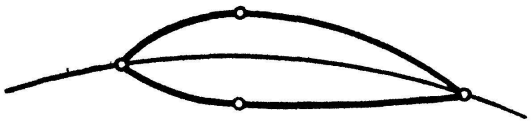

Abbildung 8

Wiederholung aus einem Kreisbogendreieck ableiten läßt. In erster Linie ist hier der Fall des symmetrischen Kreisbogenvierecks zu nennen, durch den sich sehr viele und wichtige Formen von Tragflügelprofilen erfassen

lassen. In den Abb. 7 und 8 sind zwei solche Profile dargestellt, von denen das erste symmetrisch in bezug auf eine Gerade, das zweite symmetrisch in bezug auf einen Kreis ist.

Um eine solche Aufgabe zu lösen, muß man nur die zu einem derartigen Strömungsbereich gehörende Abbildungsfunktion (25) bzw. deren automorphe Umkehrfunktion $\zeta = A(z)$ vergleichen mit einer Schwarzschen Dreiecksfunktion $\zeta_1 = s(z)$, welche die Elementardreiecke des Strömungsbereiches auf die obere bzw. die untere ζ-Halbebene abbildet. $s(z)$ ist dann eine rationale Funktion von $A(z)$, deren Grad gleich der Anzahl der Elementardreiecke ist, aus denen sich der Strömungsbereich zusammensetzt, und die man am besten dadurch bestimmt, daß man in der zu $\zeta_1 = s(z)$ gehörenden hypergeometrischen Gleichung ζ_1 als rationale Funktion von ζ ansetzt und dann die Koeffizienten dieser rationalen Funktion so bestimmt, daß die entstehende Differentialgleichung dem Strömungsbereiche entspricht. Damit kann aber die Abbildungsfunktion (25) ausgedrückt werden durch die genannte Dreiecksfunktion, so daß man auf den in diesem Abschnitt behandelten Fall zurückkommt. Im wichtigsten Fall des symmetrischen Kreisbogenvierecks (Abb. 7 und 8) wird bei geeigneter Normierung der Funktionen $A(z)$ und $s(z)$ die letztere einfach gleich dem Quadrat der ersteren. Im zweiten Beispiel in Abschnitt 7 ist eine derartige Strömung behandelt.

5. Das allgemeine Kreisbogenpolygon

Beim allgemeinen Kreisbogenpolygon ergeben sich gegenüber dem im letzten Abschnitt behandelten Fall des Kreisbogendreiecks zwei wesentliche Schwierigkeiten. Erstens ist es nicht mehr möglich, die zugehörigen Differentialgleichungen, die jetzt mehr als drei singuläre Punkte enthalten, durch verhältnismäßig einfache analytische Ausdrücke zu integrieren, wie dies im hypergeometrischen Fall geschehen konnte. Zweitens ist es bei gegebenem Kreisbogenpolygon zunächst nicht einmal mehr möglich, die zugehörige Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse vollständig anzugeben, denn wenn wir uns diese wieder in einer der beiden früher angegebenen Weisen normiert denken, so treten in ihr neben den Exponenten als weitere Parameter noch die $n - 3$ von $0, 1, \infty$ verschiedenen singulären Stellen und die $n - 3$ akzessorischen Parameter, also im ganzen $2n - 6$ weitere Konstanten auf, und über die Beziehung dieser letzteren zum gegebenen Kreisbogenpolygon ist nichts bekannt.

Es wird jedoch gelingen, diese beiden Schwierigkeiten durch verhältnismäßig einfache Näherungsmethoden zu überwinden. Was zunächst den zweiten Punkt betrifft, so lassen sich verschiedene interessante Beziehun-

gen aufstellen zwischen den genannten $2n - 6$ Parametern und der Gestalt des Kreisbogenpolygons, die sich auch für die numerische Rechnung verwerten lassen. Jedoch hat sich gezeigt, daß es viel praktischer ist, einen andern Weg zu beschreiten. Wir werden nächstens zeigen, daß eine gegebene Gleichung (31) sehr leicht und rasch soweit integriert werden kann, bis die Gestalt des zu ihr gehörenden Kreisbogenpolygons bekannt wird. Infolgedessen kann man, ausgehend von einer Näherungslösung, die noch nicht bestimmten $2n - 6$ Parameter so lange variieren, bis das zugehörige Kreisbogenpolygon beliebig genau mit einer gegebenen Form übereinstimmt, wobei man zwischen den entstehenden Polygonen linear interpolieren wird. Eine Näherungsform für die Differentialgleichung läßt sich immer finden, entweder durch Probieren oder auf experimentellem Wege. Sehr häufig verhält es sich auch so, daß es sich darum handelt, eine ganze Reihe von Profilformen zu untersuchen, die alle angenähert die gleiche Gestalt haben. Beispielsweise ist das oft der Fall bei Tragflügelprofilen. Im dritten Beispiel in Abschnitt 7 ist ein derartiger Fall behandelt. Nach der Erfahrung des Verfassers ist es bei nicht zu hoher Eckenzahl sehr rasch und gut möglich, auf diesem Wege die zu einem gegebenen Polygon gehörende Gleichung (31) zu bestimmen.

Damit das gegebene und die gemäß dem obigen Verfahren eventuell zu verschiedenen Gleichungen (31) gehörenden Polygone (diese letzteren sind ja nur bis auf eine Kreisverwandtschaft bestimmt) miteinander verglichen werden können, ist es noch nötig, sie in bestimmter Weise zu normieren. Das kann z. B. dadurch geschehen, daß man verschiedene Polygone durch Kreisverwandtschaften so umformt, daß drei bestimmte Eckpunkte mit drei gegebenen Punkten der Ebene zusammenfallen, z. B. mit den Punkten $0, 1, \infty$. Eine andere Methode der Normierung besteht darin, daß man die Polygone so umformt, daß zwei bestimmte aneinandergrenzende Seiten, die einen von null verschiedenen Winkel einschließen, auf zwei gegebene Geraden fallen, die sich unter dem gleichen Winkel schneiden. In Beispiel 3 in Abschnitt 7 ist diese Normierung verwendet. Beide Methoden können äußerst einfach und praktisch auf graphischem Wege durchgeführt werden. Im Prinzip kommen beide auf die Aufgabe heraus, eine Kreisverwandtschaft anzugeben, welche drei gegebene Punkte A, B, C bzw. in drei andere gegebene Punkte D, E, F überführt (bei der zweiten Methode wird ein Polygoneckpunkt in den Schnittpunkt der Geraden und der andere Schnittpunkt derselben Polygonseiten in den unendlichfernen Punkt übergeführt). Nun läßt sich jede Kreisverwandtschaft erhalten durch sukzessive Ausführung von Translationen, Drehstreckungen und Spiegelungen an Kreisen. Umgekehrt führt die

wiederholte Anwendung dieser Operationen stets zu einer Kreisverwandtschaft. Es handelt sich also nur darum, eine Folge der genannten Operationen anzugeben, welche A, B, C in D, E, F überführt. Wenn wir etwa den ungünstigsten Fall betrachten, daß alle Punkte im Endlichen gelegen sind (Abb. 9), so führen wir zunächst A, B, C durch Spiegelung an einem Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt A (Abb. 9; dieser wird am besten so gewählt, daß er gleichzeitig auch noch durch einen andern Punkt geht) in die drei Punkte A_1, B_1, C_1 über, wobei A_1 im Unendlichen liegt. In ganz entsprechender Weise verfahren wir mit den Punkten D, E, F durch Spiegelung am Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt D. Wenn wir nun die Ebene der Punkte A, B, C zuerst an K_1 spiegeln, nachher durch eine Translation und eine Drehstreckung so verschieben, daß B_1 in E_1 und C_1 in F_1 übergeht, und schließlich an K_2 spiegeln, so stellt die Aufeinanderfolge dieser Operationen die gewünschte Umformung dar. Wenn einer oder zwei Punkte im Unendlichen liegen, vereinfacht sich das Verfahren entsprechend. Natürlich können die gleichen Operationen auch in verschiedenen Modifikationen auf rechnerischem Wege durchgeführt werden.

Es handelt sich nun weiterhin vor allem um die Angabe eines einfachen Integrationsverfahrens zur Lösung von Gleichungen der Form (31).

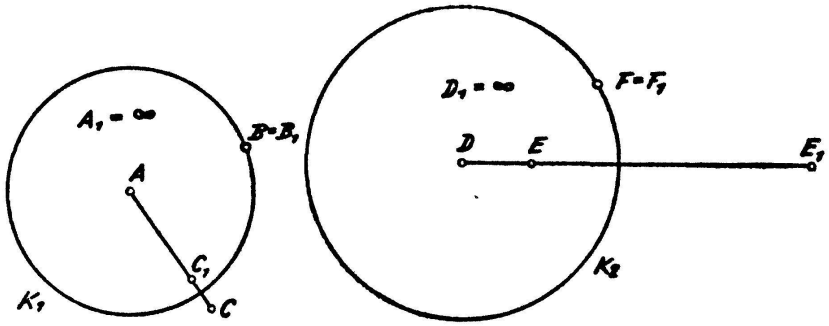

Abbildung 9

Solche Gleichungen sind tatsächlich in verschiedener Hinsicht außerordentlich geeignet zur numerischen Integration. Wir werden zeigen, daß es vor allem zwei Wege gibt, auf denen die Integration rasch und mit beliebiger Genauigkeit vorgenommen werden kann, von denen sich vor allem der zweite als praktisch sehr gut und rasch durchführbar erwiesen hat.

Die erste Integrationsmethode beruht darauf, daß man die gegebene Gleichung (31) durch die Substitution

$$u = \frac{d}{d\zeta}(\lg z^{**}) \tag{53}$$

überführen kann in die Riccatische Gleichung

$$\frac{du}{d\zeta} = -J(\zeta) - u^2 , \tag{54}$$

welche sich zur numerischen Integration außerordentlich gut eignet. Vor allem ist das der Fall hinsichtlich des Verfahrens von Runge und Kutta[8]), was darauf beruht, daß die rechte Seite von (54) in zwei Summanden zerfällt, von denen der erste nur von ζ, der zweite dagegen nur von u abhängt. Die Größen k_1, k_2, k_3, k_4[9]) nehmen dann, wenn man von den Anfangswerten ζ_0 und u_0 ausgeht und dem Argument den Zuwachs h erteilt, die Gestalt an

$$\begin{aligned} k_1 &= [-J(\zeta_0) - u_0^2]\,h \\ k_2 &= \left[-J\left(\zeta_0 + \frac{h}{2}\right) - \left(u_0 + \frac{k_1}{2}\right)^2\right] h \\ k_3 &= \left[-J\left(\zeta_0 + \frac{h}{2}\right) - \left(u_0 + \frac{k_2}{2}\right)^2\right] h \\ k_4 &= [-J(\zeta_0 + h) \;\; - (u_0 + k_3)^2]\,h \end{aligned} \tag{55}$$

und für den zu h gehörenden Zuwachs k der Lösung gilt bei nicht zu großem h mit außerordentlich guter Annäherung

$$k = \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\ . \tag{56}$$

Die Größe h kann dabei irgendeine komplexe Zahl sein, und man kann also gemäß (55) und (56) die Lösungen von (54) längs irgendeines komplexen Integrationsweges berechnen, der nur die singulären Stellen vermeidet. Es ist dazu nur nötig, die Funktion $-J(\zeta)$ längs des betreffen-

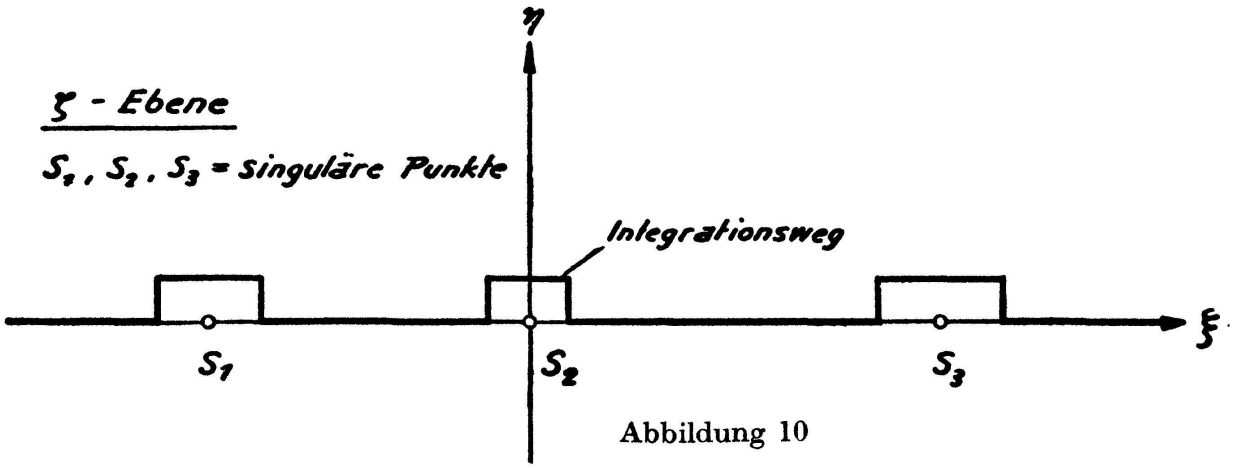

Abbildung 10

den Integrationsweges zu kennen. Die Bestimmung von $-J(\zeta)$ kann durch direkte Ausrechnung erfolgen, was jedoch im allgemeinen etwas umständlich ist. Ganz besonders einfach läßt sich die Bestimmung von

[8]) Vergleiche Kamke, Differentialgleichungen, 2. Auf., Leipzig 1943, oder Runge und König, Numerisches Rechnen, Berlin 1925.

[9]) Wir folgen dabei der allgemeinen üblichen Schreibweise, siehe dazu etwa die unter Fußnote 8 genannten Literaturangaben.

$-J(\zeta)$ und anschließend die Lösung der Gleichung (54) durchführen, wenn der Integrationsweg aus lauter Strecken zusammengesetzt ist, die entweder zur reellen oder zur imaginären Achse parallel sind. In Abb. 10 ist ein solcher Integrationsweg dargestellt, wie er etwa zweckmäßigerweise verwendet werden kann. Für solche Integrationswege läßt sich der Verlauf der Funktion $-J(\zeta)$ vermittelst gewisser Grundfunktionen sofort angeben. In der Tat setzt sich ja $-J(\zeta)$ additiv aus lauter Termen zusammen, welche eine der beiden Formen

$$\frac{p}{\zeta - q} \qquad \frac{r}{(\zeta - s)^2} \tag{57}$$

haben, wobei p, q, r, s reelle Konstanten sind. Führt man nun die beiden Funktionen

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t} \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t^2} \tag{58}$$

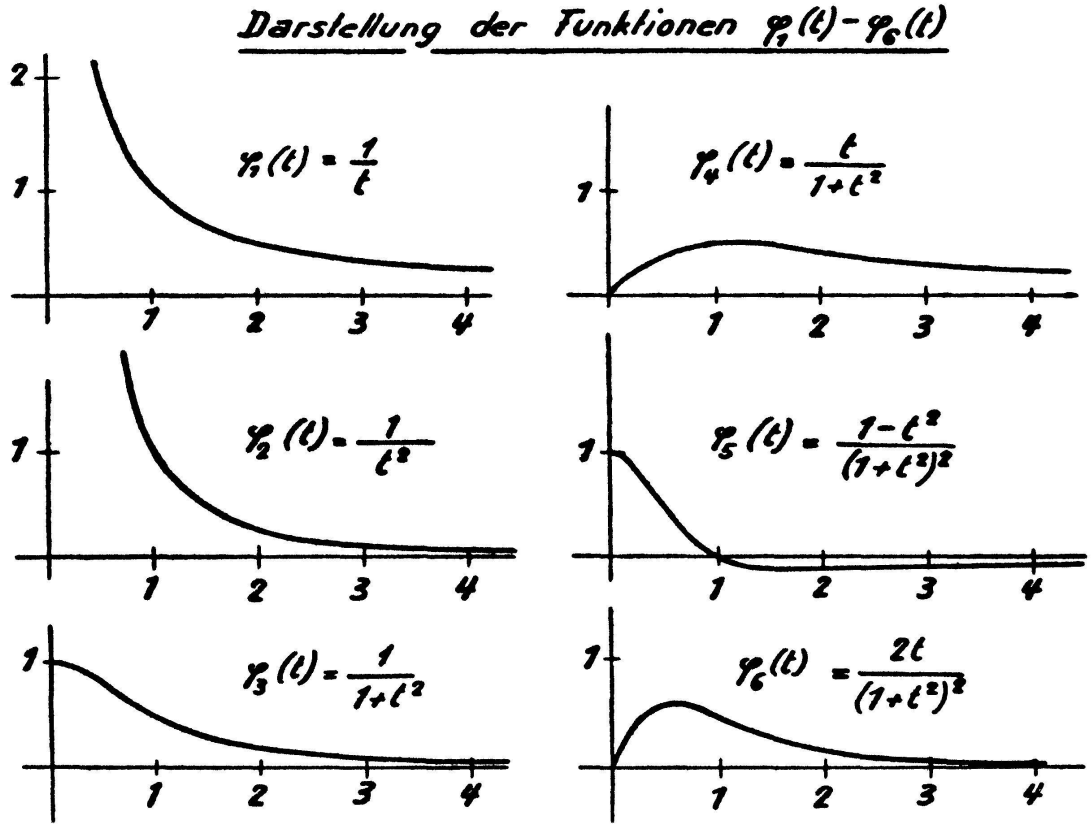

Abbildung 11

der reellen Variabeln t ein (Abb. 11), so nehmen die Ausdrücke (57), zunächst längs der reellen Achse, die Gestalt an

$$p\,\varphi_1(\xi - q) \qquad r\,\varphi_2(\xi - s)\ , \tag{59}$$

wobei wie früher $\zeta = \xi + i\,\eta$ gesetzt ist, so daß also, wenn die Funktionen (58) etwa graphisch oder tabellarisch gegeben sind, der Verlauf

der Ausdrücke (57) längs der reellen Achse sofort abgelesen werden kann, wodurch dann auch $-J(\zeta)$ bekannt wird. In ähnlicher Weise ergeben sich für den Verlauf der Terme (57) längs der Geraden $\xi = v =$ konst., wobei v nur nicht mit der Abszisse eines singulären Punktes zusammenfallen soll, die Ausdrücke

$$\frac{p}{(v-q)+i\eta} \qquad \frac{r}{[(v-q)+i\eta]^2}\,, \tag{60}$$

die sich unter Verwendung der reellen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3(t) &= \frac{1}{1+t^2} & \varphi_4(t) &= \frac{t}{1+t^2} \\ \varphi_5(t) &= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} & \varphi_6(t) &= \frac{2t}{(1+t^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

(Abb. 11) auch in der Form schreiben lassen

$$\frac{p}{v-q}\left[\varphi_3\left(\frac{\eta}{v-q}\right)-i\,\varphi_4\left(\frac{\eta}{v-q}\right)\right] \qquad \frac{r}{(v-s)^2}\left[\varphi_5\left(\frac{\eta}{v-s}\right)-i\,\varphi_6\left(\frac{\eta}{v-s}\right)\right]. \tag{62}$$

Schließlich erhält man in vollständig analoger Weise für die Summanden (57) auf der Geraden $\eta = w =$ konst. $(w \neq 0)$ die Ausdrücke

$$\frac{p}{w}\left[\varphi_4\left(\frac{\xi-q}{w}\right)-i\,\varphi_3\left(\frac{\xi-q}{w}\right)\right] \qquad \frac{r}{w^2}\left[-\varphi_5\left(\frac{\xi-s}{w}\right)-i\,\varphi_6\left(\frac{\xi-s}{w}\right)\right]. \tag{63}$$

Vermittelst der Formeln (59), (62) und (63) kann also der Verlauf der Funktion $-J(\zeta)$ längs aller Integrationswege von der Art des in Abb. 10 dargestellten sofort berechnet werden aus demjenigen der Funktionen $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Diese letzteren sind in Abb. 11 dargestellt. Sie können leicht berechnet und tabelliert werden und dann als Grundlage dienen zur Lösung aller derartiger Probleme. Nachdem $-J(\zeta)$ bekannt ist, kann die Gleichung (54) gelöst werden, wobei man die Rechnungen mit großem Vorteil in graphischer Form durchführt. Um diese Lösungen noch für andere Werte von ζ zu berechnen, kann man in gleicher Weise vorgehen längs Integrationswegen derselben Art, die vom ersten abzweigen.

Es sei nun $u^*(\zeta)$ eine beliebige Partikulärlösung der Gleichung (54), die, in bekannter Weise von einem Anfangspunkt ausgehend, nach dem obigen Verfahren berechnet wurde. Dann ist nach (53) der Ausdruck

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} u^*(\zeta)\,d\zeta\,, \tag{64}$$

der sich numerisch sehr leicht berechnen läßt (die Integration kann jetzt längs des gewählten Integrationsweges ohne weiteres ausgeführt werden), und in dem ζ_0 eine beliebige Konstante bedeutet, ein partikuläres Integral von (31), womit unser Ziel erreicht ist.

Um zur Abbildungsfunktion (25) zu gelangen, könnte man in gleicher Weise noch eine zweite partikuläre Lösung bestimmen und dann den Quotienten (33) bilden. Viel einfacher ist es jedoch, den Ausdruck

$$\omega^*(\zeta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta} e^{-2\int_{\zeta_0}^{\zeta} u^*(\zeta)\,d\zeta}\, d\zeta \,, \tag{65}$$

wobei ζ_1 wieder eine beliebige Konstante ist, zu bilden, der längs des Integrationsweges auch leicht berechnet werden kann, und der gemäß (36) eine Funktion (33) darstellt, so daß sich also die Abbildungsfunktion (25) als lineare Funktion von (65) ergibt. Ausgehend von einer beliebigen Lösung $u^*(\zeta)$ der Gleichung (54) kann man also durch Bildung von (65) im wesentlichen bereits zu der gesuchten Funktion (25) gelangen.

Die zweite Integrationsmethode schließt sich eng an die erste an. Ihr wesentlicher Unterschied gegenüber dieser letzteren besteht darin, daß die Rechnungen fast vollständig im reellen Zahlgebiet durchgeführt werden können, was für die praktische Ausrechnung eine große Vereinfachung ist. Sie geht ebenfalls aus von der zu einer gegebenen Gleichung (31) gehörenden Riccatischen Gleichung (54). Aber statt die singulären Punkte auf Integrationswegen der in Abb. 10 dargestellten Gestalt zu umgehen, verwendet sie in diesen Reihenentwicklungen für die Lösungen. Es sei $\zeta = S$ zunächst eine endlich singuläre Stelle der Gleichung (54), also ein Pol der Invariante $J(\zeta)$. Dann besitzt dort (54) stets mindestens eine Lösung $u^*(\zeta)$, welche um den Punkt $\zeta = S$ eine reelle Reihenentwicklung der Form

$$u^*(\zeta) = \frac{a_{-1}}{(\zeta - S)} + a_0 + a_1(\zeta - S) + a_2(\zeta - S)^2 + \cdots \tag{66}$$

hat. Einer Lösung dieser Form entspricht bei der zugehörigen Gleichung (31) gemäß (53) eine Fundamentallösung, in welcher keine logarithmischen Glieder auftreten. Im allgemeinen besitzt also (54) sogar zwei Lösungen der Form (66). Nur wenn (31) für $\zeta = S$ eine ganzzahlige Exponentendifferenz hat, kann es vorkommen, daß nur ein derartiges Integral existiert. Man kann also mit dem Ansatz (66) in die Gleichung (54) hineingehen und auf diese Weise die Koeffizienten a_i $(i = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ berechnen. Dazu ist es zunächst notwendig, die Funktion

$-J(\zeta)$ nach Potenzen von $\zeta - S$ zu entwickeln, was, da $-J(\zeta)$ sich aus lauter Summanden der beiden Formen (57) zusammensetzt, in elementarer Weise geschehen kann durch Anwendung der beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\zeta \mp 1} &= 1 \pm \zeta + \zeta^2 \pm \zeta^3 + \zeta^4 \\ \frac{1}{(\zeta \mp 1)^2} &= 1 \pm 2\zeta + 3\zeta^2 \pm 4\zeta^3 + 5\zeta^4 \,. \end{aligned}\right\} . \tag{67}$$

Die auf diese Weise erhaltene Entwicklung von $-J(\zeta)$ um den Punkt $\zeta = S$ sei

$$-J(\zeta) = \frac{A_{-2}}{(\zeta-S)^2} + \frac{A_{-1}}{(\zeta-S)} + A_0 + A_1(\zeta-S) + A_2(\zeta-S)^2 + \cdots \tag{68}$$

und daraus erhält man durch Einsetzen von (66) in (54) für die Koeffizienten a_i die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} a_{-1}^2 - a_{-1} &= A_{-2} \\ a_0 &= \frac{A_{-1}}{2a_{-1}} \\ a_1 &= \frac{A_0 - a_0^2}{1 + 2a_{-1}} \\ a_2 &= \frac{A_1 - 2a_0 a_1}{2 + 2a_{-1}} \\ a_3 &= \frac{A_2 - a_1^2 - 2a_0 a_2}{3 + 2a_{-1}} \\ a_4 &= \frac{A_3 - 2a_1 a_2 - 2a_0 a_3}{4 + 2a_{-1}} \end{aligned}\right\} . \tag{69}$$

Aus der ersten quadratischen Gleichung ergeben sich zwei Möglichkeiten für a_{-1}, die im allgemeinen beide verwendet werden können. Einzig bei ganzzahligen Exponentendifferenzen führt im allgemeinen nur eine Lösung zu einem möglichen Resultat, und zwar die größere. In jedem Fall ist es also möglich, eine reelle Lösung in der Form (66) anzugeben. Diese Lösung kann in der Umgebung der Stelle $\zeta = S$, wo nur wenige Glieder der Reihe (66) zu berücksichtigen sind, sehr rasch berechnet werden, wobei man für die praktische Rechnung das Hornersche Schema[10]) und ähnliche Hilfsmittel verwenden wird.

Aus der so erhaltenen Lösung $u^*(\zeta)$ läßt sich nun aber gemäß (65) sofort eine zur gegebenen Gleichung gehörende Abbildungsfunktion bil-

[10]) Vgl. das unter Fußnote 8 genannte Werk von Runge und König.

den. Indem man die mit -2 multiplizierte Reihe (66) zuerst integriert und nachher die Exponentialfunktion dieses Integrals bildet, erhält man für den Integranden in (65) bei geeigneter Wahl von ζ_0 die Entwicklung

$$\frac{1}{(\zeta - S)^{2a_{-1}}}\Bigg[1 - 2a_0(\zeta - S) + (2a_0^2 - a_1)(\zeta - S)^2 + \left(-\frac{4}{3}a_0^3 + 2a_0 a_1 - \frac{2}{3}a_2\right)(\zeta - S)^3 + \left(\frac{2}{3}a_0^4 - 2a_0^2 a_1 + \frac{4}{3}a_0 a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{a_3}{2}\right)(\zeta - S)^4 \ldots\Bigg], \quad (70)$$

durch welche dieser in der Umgebung von $\zeta = S$ wieder sehr rasch und genau berechnet werden kann. Schließlich muß (70) noch integriert werden. Falls $2a_{-1}$ keine positive ganze Zahl ist, erhält man bei geeigneter Wahl von ζ_1 für die Abbildungsfunktion (65) in der Umgebung von $\zeta = S$ sofort die Entwicklung

$$\omega^*(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - S)^{2a_{-1}}}\Bigg[\frac{1}{1 - 2a_{-1}}(\zeta - S) - \frac{2a_0}{2 - 2a_{-1}}(\zeta - S)^2 + \frac{2a_0^2 - a_1}{3 - 2a_{-1}}(\zeta - S)^3 + \frac{-\frac{4}{3}a_0^3 + 2a_0 a_1 - \frac{2}{3}a_2}{4 - 2a_{-1}}(\zeta - S)^4 + \frac{\frac{2}{3}a_0^4 - 2a_0^2 a_1 + \frac{4}{3}a_0 a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}a_3}{5 - 2a_{-1}}(\zeta - S)^5 + \cdots\Bigg], \quad (71)$$

wobei für die Potenz vor der eckigen Klammer etwa derjenige Zweig angenommen werden soll, der für positive Werte von $\zeta - S$ wieder positiv wird. Falls dagegen $2a_{-1}$ eine positive ganze Zahl ist, ersetzt sich in leicht ersichtlicher Weise ein Summand in der Entwicklung (71) durch ein logarithmisches Glied.

Indem man diese gleichen Operationen, die numerisch sehr leicht und rasch durchgeführt werden können, nicht nur für den singulären Punkt $\zeta = S$, sondern für alle singulären Punkte der Differentialgleichung durchführt (es ist dies in ganz entsprechender Weise auch möglich, wenn S im Unendlichen liegt), erhält man längs der ganzen reellen Achse soviele zu der gegebenen Gleichung (31) gehörende Abbildungsfunktionen (65) als singuläre Punkte vorhanden sind. Ferner behält die Formel (71) ohne weiteres ihre Gültigkeit bei, wenn S ein regulärer Punkt der Differentialgleichung ist. Sie vereinfacht sich in diesem Fall dadurch noch

wesentlich, daß der Koeffizient a_{-1} in der Entwicklung (66) verschwindet und daß $a_0 = 1$ gesetzt werden kann, während sonst alle andern Überlegungen unverändert bleiben. Es ist also demgemäß auf elementare Weise möglich, Abbildungsfunktionen in der Form (71) längs der reellen Achse in beliebiger Anzahl zu bilden. Praktisch wird es meist vollauf genügen, außer den singulären Punkten eine einzige für jedes Intervall zwischen zwei singulären Punkten zu verwenden. Es handelt sich nun nur noch darum, diese verschiedenen Funktionen (65) zu einer Gesamtlösung $\omega(\zeta)$ zusammenzusetzen. Das kann aber ebenfalls in recht einfacher Weise geschehen, da ja jede dieser Funktionen eine lineare Funktion jeder andern ist. Sind etwa $\omega_1^*(\zeta)$ und $\omega_2^*(\zeta)$ zwei benachbarte derartige Abbildungsfunktionen, die also längs eines gemeinsamen Stückes der reellen Achse definiert sind, so besteht eine Gleichung der Form

$$\omega_2^* = \frac{\varepsilon\,\omega_1^* + \zeta}{\eta\,\omega_1^* + \vartheta}\,, \tag{72}$$

wobei ε, ζ, η, ϑ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmte komplexe Konstanten sind, die dadurch berechnet werden können, daß man verlangt, daß (72) für irgend drei ζ-Werte des gemeinsamen Definitionsbereiches erfüllt ist. Indem man in gleicher Weise mit den übrigen erhaltenen Lösungen (65) verfährt, erhält man schließlich den Gesamtverlauf einer Abbildungsfunktion $\omega(\zeta)$ längs der reellen Achse, aus der sich dann auch sofort (25) ergibt. Ausgehend von den Lösungen (65) kann man dann wieder wie bei der ersten Integrationsmethode ins komplexe Gebiet vorstoßen, indem man Integrationswege verwendet, die aus lauter waagrechten und senkrechten Strecken bestehen, wobei man wieder die Funktionen $\varphi_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ benutzen wird.

Die Zusammensetzung zweier benachbarter Funktionen (65) kann wieder außerordentlich einfach nach dem S. 98 bis 99 beschriebenen Verfahren, am bequemsten auf graphischem Wege, vorgenommen werden, da es sich ja auch hier darum handelt, eine Kreisverwandtschaft anzugeben, die drei gegebene Punkte in drei andere gegebene Punkte überführt. Man braucht dazu nur im gemeinsamen Definitionsbereich zweier benachbarter Funktionen (65) drei beliebige Punkte auszuwählen, in diesen die Funktionswerte zu berechnen und mit diesen letzteren gemäß dem S. 98 bis 99 beschriebenen Verfahren zu operieren. Durch Verwendung dieser Methoden, welche noch durch viele praktisch wertvolle Modifikationen ergänzt werden können (vor allem sei nochmals auf das Hornersche Schema zur Berechnung von Potenzreihen hingewiesen) kann nun eine gegebene Gleichung (31) sehr rasch und leicht soweit ge-

löst werden, daß die Gestalt des zu ihr gehörenden Polygons ersichtlich wird. Weiterhin kann dann, falls die zu einem gegebenen Polygon gehörende Gleichung (31) genügend genau bestimmt ist, eine zu dieser letzteren gehörende Abbildungsfunktion $\omega(\zeta)$ in ihrem Gesamtverlauf beliebig genau ermittelt werden. Gleichzeitig mit $\omega(\zeta)$ wird stets auch $\omega'(\zeta)$ bekannt. Diese zweite Integrationsmethode stellt nach der Erfahrung des Verfassers die beste und rascheste Methode dar zur Lösung solcher Probleme.

Zur vollständigen Berechnung der Strömung, wie sie im Prinzip bereits im dritten Abschnitt angegeben wurde, ist es nun zunächst vor allem nötig, den Punkt Q (vgl. S. 88) gemäß der aus (25) fließenden Gleichung

$$\omega(Q) = -\frac{h}{g} \tag{73}$$

(die Nenner in [25] müssen für $\zeta = Q$ verschwinden) zu berechnen. Das kann in genau gleicher Weise wie im Fall des Kreisbogendreiecks durch das Newtonsche Verfahren geschehen, wobei mit großem Vorteil die genannten Integrationsmethoden für komplexe Integrationswege verwendet werden können. Aus Q ergibt sich ferner sofort die Größe $\omega'(Q)$.

Weiterhin handelt es sich wieder um die Berechnung von (11) und (13). Die in diesen Funktionen auftretenden Konstanten a, b, c, d und U ergeben sich aus den Gleichungen (27) und (28). Die zweite dieser Gleichungen läßt sich noch vereinfachen. Indem man $\frac{dZ}{d\zeta}$ gemäß (13) und $\frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}}$ gemäß (25) ausrechnet und die beiden Ausdrücke unter Berücksichtigung von (73) um den Punkt $\zeta = Q$ in Potenzreihen entwickelt, nimmt (28) bei Beachtung von (14) und (26) die Gestalt an

$$-2i\, g^2\, U\, \omega'(Q) = V(a - b\, i)^2 \,. \tag{74}$$

Aus (74), (27) und (14) ergeben sich nun a, b, c, d und U in recht einfacher Weise. Führt man die Abkürzungen ein

$$W = g\sqrt{\frac{2i\,\omega'(Q)}{V}} \qquad \text{(Vorzeichen der Wurzel beliebig)} \tag{75}$$

$$\mathfrak{J}(W) = E \qquad \mathfrak{R}(W) = F \qquad -\mathfrak{J}(QW) = G \qquad -\mathfrak{R}(QW) = H$$

so ergeben sich, wie man sofort durch Einsetzen bestätigt, für die gesuchten Konstanten die Werte

$$U = \frac{1}{EH - FG} \qquad a = E\sqrt{U} \qquad b = F\sqrt{U} \qquad c = G\sqrt{U} \qquad d = H\sqrt{U}\,, \tag{76}$$

wobei das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ wieder beliebig gewählt werden kann. Als letzte Größe bestimmt sich schließlich Γ aus der Gleichung (51). Damit sind die Funktionen (11), (13) und (25) vollständig bestimmt und also unser Problem gelöst.

Die Strömungsgeschwindigkeit, die durch die obigen Formeln bestimmt ist, läßt sich wie beim Kreisbogendreieck am besten als Funktion von ζ ausdrücken. Die Ausrechnung gemäß Formel (52) ergibt, wenn man noch die Abkürzungen

$$p = a\,\zeta + c \qquad q = b\,\zeta + d \tag{77}$$

einführt

$$\frac{dw}{dz} = \frac{[g\,\omega(\zeta) + h]^2}{\omega'(\zeta)}\,\frac{8\,U\,p\,q - \dfrac{\Gamma}{\pi}\,(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2}\,. \tag{78}$$

Diese Formel läßt sich auf Grund von (34) auch in der Gestalt

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{C}\,(g\,z_1^{**} + h\,z_2^{**})^2\,\frac{8\,U\,p\,q - \dfrac{\Gamma}{\pi}\,(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2} \tag{79}$$

schreiben.

Durch (78) und (79) in Verbindung mit (25) läßt sich, von einem beliebigen Punkt der ζ-Ebene ausgehend, zuerst nach (25) der zugehörige Punkt der z-Ebene und dann gemäß (78) in diesem die Strömungsgeschwindigkeit berechnen. Insbesondere ergibt sich dadurch leicht die Geschwindigkeitsverteilung auf der Profilkurve, da dieser letzteren in der ζ-Ebene die reelle Achse entspricht. Nachdem die Geschwindigkeit bekannt ist, können auch die übrigen wichtigen Größen der Strömung in genau gleicher Weise berechnet werden wie dies auf S. 96 für den Fall des Kreisbogendreiecks entwickelt wurde.

Zum Schluß sollen die verschiedenen Schritte bei der Lösung eines solchen Problems noch einmal in tabellarischer Übersicht zusammengestellt werden:

A. *Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung.*

1. Bestimmung einer angenäherten Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse in der normierten Form (31).
2. Lösung dieser Gleichung nach einer der auf S. 99 bis 107 genannten Integrationsmethoden soweit, bis man die durch den zugehörigen Quotienten (33) vermittelte Abbildung erkennt, was ziemlich bald der Fall ist.

3. Vergleich dieses Kreisbogenpolygons mit dem gegebenen, durch Normierung in der auf S. 98 bis 99 beschriebenen Weise. Untersuchung, wie sich die Abbildung verändert, wenn sich die noch nicht bestimmten Parameter verändern, was am besten durch Probieren geschieht.
4. Bestimmung der verbesserten Parameter durch lineare Interpolation und eventuelle Wiederholung des Verfahrens zur nochmaligen Verbesserung der Parameter.
5. Vollständige Lösung der verbesserten Gleichung nach einer der genannten Methoden. Bestimmung des Quotienten (33), dessen Ableitung und der Abbildungsfunktion (25).

B. *Berechnung der Strömung.*

1. Bestimmung des Punktes Q in der ζ-Ebene als Lösung der Gleichung (73). Die Berechnung kann leicht erfolgen vermittelst der verschiedenen oben genannten Näherungsmethoden. Aus Q ergibt sich ferner sofort der Wert von $\omega'(Q)$.
2. Berechnung der Konstanten a, b, c, d, U, Γ in den Funktionen (11) und (13) gemäß (75), (76) und (51).
3. Die Geschwindigkeit der Strömung wird am besten vermittelst der Formeln (77) bis (79) und (25) bestimmt. Die übrigen wichtigen Größen der Strömung ergeben sich in genau gleicher Weise wie dies S. 96 für den Fall des Kreisbogendreiecks beschrieben wurde, wobei wieder die im 5. Abschnitt entwickelten Methoden mit großem Vorteil verwendet werden können.

6. Strömungen um Kreisbogenpolygone, die sich ins Unendliche erstrecken

Neben den bisher betrachteten Strömungen um vollständig im Endlichen gelegene Kreisbogenpolygone gibt es unter den gemachten Voraussetzungen noch einen zweiten Fall, der von technischem und physikalischem Interesse ist. Es sind dies Strömungen um Kreisbogenpolygone, die einen Eckpunkt (oder auch sonst einen Punkt der Berandung) im Unendlichen besitzen, wobei wieder vorausgesetzt werden soll, daß die Strömung überall im Endlichen regulär verläuft. Diese Strömungen sollen im vorliegenden Abschnitt betrachtet werden, wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall des Kreisbogendreiecks beschränken wollen. Das allgemeine Polygon bietet wie früher keine prinzipiellen Schwierigkeiten, erfordert dagegen etwas längere Rechnungen.

Der wesentliche Unterschied der hier zu betrachtenden gegenüber den bisherigen Strömungen besteht darin, daß der einzig vorhandene, nach unserer Voraussetzung im Unendlichen liegende singuläre Punkt auf die Berandung des Polygons fällt. Es folgt daraus auch sofort, daß dieser Punkt nicht wie bisher gleichzeitig auch Wirbelpunkt sein kann, so daß bei diesen Strömungen nirgends eine Zirkulation auftreten kann. Im

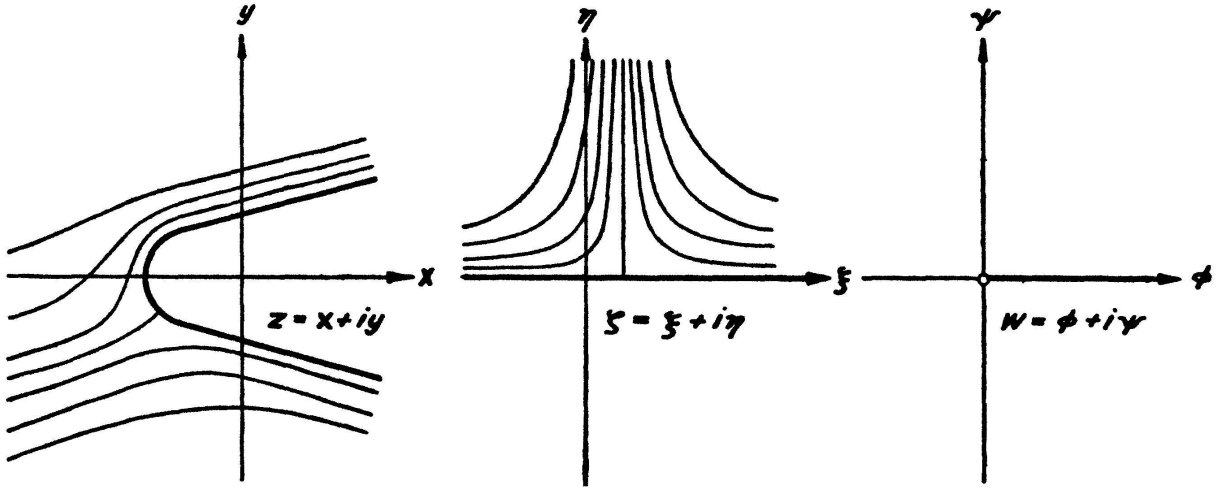

Abbildung 12

übrigen sind die Betrachtungen denen der drei letzten Abschnitte sehr analog. Wir führen, entsprechend wie in Abb. 5, die drei in Abb. 12 dargestellten komplexen Zahlebenen ein. Da nirgends eine Zirkulation vorhanden ist, ist das Geschwindigkeitspotential eine eindeutige Funktion, und es handelt sich einfach darum, den Strömungsbereich in der z-Ebene konform abzubilden auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene w-Ebene, wobei jedoch der Punkt ∞ wieder in den Punkt ∞ übergehen muß. Die Gesamtheit dieser Abbildungen ergibt gerade die Gesamtheit der möglichen Strömungen um das gegebene Polygon. Das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion sind dabei so normiert, daß sie im Staupunkt der Strömung verschwinden.

Um diese Abbildung zu bewerkstelligen, gehen wir ganz entsprechend vor wie im vierten Abschnitt. Es soll auch die dort gemachte Voraussetzung beibehalten werden, daß nur ein Winkel von π verschieden ist. Der allgemeine Fall läßt sich in genau entsprechender Weise erledigen. Der von π verschiedene Winkel des Strömungsbereiches (bei der in Abb. 12 dargestellten Strömung liegt er im Unendlichen) sei wie früher mit $\lambda\pi$ bezeichnet. Dann können wir wieder die zu diesem Winkel gehörende hypergeometrische Gleichung (41) aufstellen und die zugehörige Abbildungsfunktion (46) bzw. (48) bilden. Diese Funktion $\omega(\zeta)$ bildet dann die obere ζ-Halbebene wieder auf das in Abb. 6 dargestellte Dreieck ab, und wie früher handelt es sich weiterhin noch darum, dieses

letztere durch die lineare Funktion (25) auf den gegebenen Strömungsbereich abzubilden, wodurch dann (25) bestimmt wird. Der Strömungsbereich ist damit konform bezogen auf die obere ζ-Halbebene. Seinen Eckpunkten entsprechen dabei die Punkte 0, 1, ∞ der ζ-Ebene, insbesondere entspricht dem Punkt $\zeta = \infty$ derjenige Eckpunkt, an dem das Dreieck einen von π verschiedenen Winkel hat. Die obere ζ-Halbebene muß nun noch auf die geschlitzte w-Ebene abgebildet werden, wobei noch die erwähnte Bedingung zu berücksichtigen ist, daß das Unendliche der z-Ebene durch die Abbildung in das Unendliche der w-Ebene übergehen soll. Bezeichnen wir wieder durch $\zeta = Q$ denjenigen Punkt der ζ-Ebene, der dem Punkt $z = \infty$ entspricht (Q liegt jetzt auf der reellen Achse), so wird die genannte Abbildung geleistet durch die Funktion

$$w = \left(\frac{a\,\zeta + b}{\zeta - Q}\right)^2, \tag{80}$$

wobei a und b reelle Konstanten sind, deren Werte wie früher noch aus den Daten des Problems zu bestimmen sind. Ist $Q = \infty$, was in sehr vielen Fällen, z. B. auch bei der in Abb. 12 dargestellten Strömung der Fall ist, so ersetzt sich (80) durch die einfachere Funktion

$$w = (a\,\zeta + b)^2\,. \tag{81}$$

Für die numerische Berechnung bedeutet das eine wesentliche Vereinfachung. Im allgemeinen Fall kann Q wieder in wenigen Schritten vermittelst des Näherungsverfahrens von Newton berechnet werden, was jetzt deshalb noch wesentlich einfacher ist als früher, weil die sämtlichen Rechnungen im reellen Zahlgebiet verlaufen. Aus (46) bzw. (48), (25) und (80) bzw. (81) ergibt sich ferner die komplexe Geschwindigkeit in der (52) entsprechenden Form

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\dfrac{dw}{d\zeta}}{\dfrac{dz}{d\omega}\,\dfrac{d\omega}{d\zeta}} \tag{82}$$

Schließlich handelt es sich noch um die Bestimmung der Konstanten a und b. Prinzipiell entspricht jeder Wahl dieser Konstanten eine mögliche Strömung, und wir können sie aus irgendwelchen Daten des Problems bestimmen. Bei den umströmten Profilen war die wichtigste Bestimmungsart die, daß das Verhalten der Strömung im Unendlichen gegeben war. Im jetzigen Fall ist diese Bestimmung nicht mehr sinngemäß, da die Geschwindigkeit im Unendlichen ebenfalls unendlich wird. Man erkennt dies leicht an Hand der Potenzreihenentwicklung um den

Punkt $z = \infty$. Hingegen kann etwa die Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte des Strömungsbereiches nach Größe und Richtung vorgeschrieben sein, oder es kann verlangt sein, daß der Staupunkt eine bestimmte Lage hat und daß außerdem noch die Geschwindigkeit in einem gegebenen Punkte des Strömungsbereiches eine bestimmte Größe hat. Beide Bestimmungsarten führen gemäß den aufgestellten Gleichungen für $w(z)$ und $w'(z)$ wie früher auf leicht anzugebende Bedingungsgleichungen für a und b.

Durch die Berechnung der zu einem gegebenen Strömungsbereich gehörenden Funktionen (46) bzw. (48), (25) und (80) bzw. (81) ist nun unser Problem gelöst. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten vergleiche man das erste Beispiel in Abschnitt 7.

Neben dem in Abb. 12 dargestellten Fall gibt es noch eine Reihe weiterer interessanter Strömungen um Kreisbogendreiecke mit einem im Un-

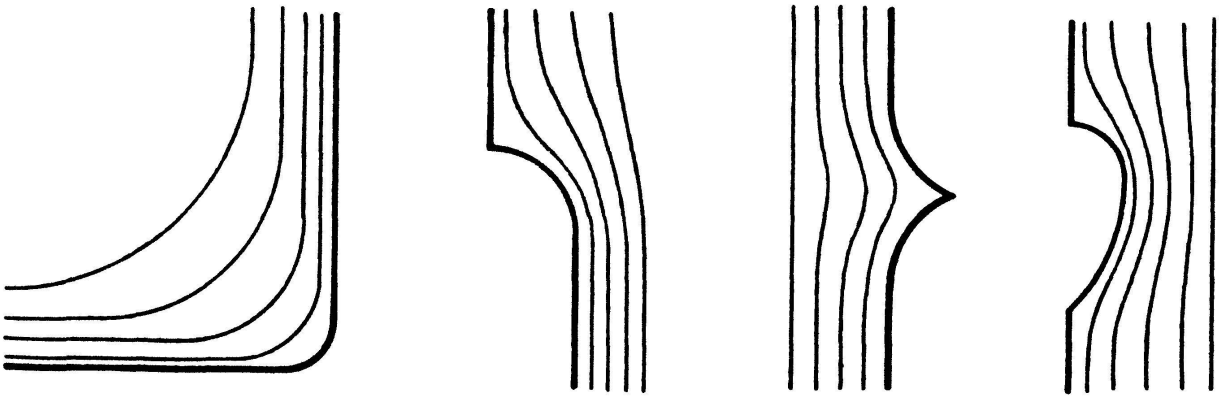

Abbildung 13

endlichen gelegenen Punkt. Oft ist es dabei auch von Nutzen, die bisher gemachte Voraussetzung fallen zu lassen, daß alle Winkel mit Ausnahme eines einzigen die Größe π haben sollen. Nach den früheren Entwicklungen bedeutet dies weder theoretisch noch rechnerisch eine Schwierigkeit. In Abb. 13 ist eine Reihe solcher Strömungen dargestellt. Diese können oft auch in approximativem Sinne angewandt werden. Der erste Fall stellt z. B. näherungsweise die Strömung in einer ausgerundeten Ecke bei einer sonst beliebigen Strömung dar.

7. Beispiele

Erstes Beispiel: Es soll die in Abb. 4 dargestellte Strömung berechnet werden für den Fall, daß der Damm die in Abb. 14 gezeigte Gestalt hat, und daß die Geschwindigkeit in den Eckpunkten $z = +i$ und $z = -i$ den Betrag 1 hat.

Interessehalber wurde zur Berechnung dieser Strömung die Darstel-

lung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale verwendet. Es sei jedoch nochmals erwähnt, daß sich dieser Weg zur numerischen Rechnung weniger eignet als die beiden andern in Abschnitt 4 genannten, wie sich dies auch im vorliegenden Beispiel zeigt. Zunächst hat

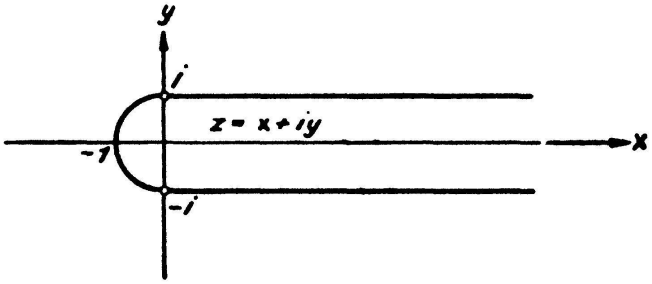

Abbildung 14

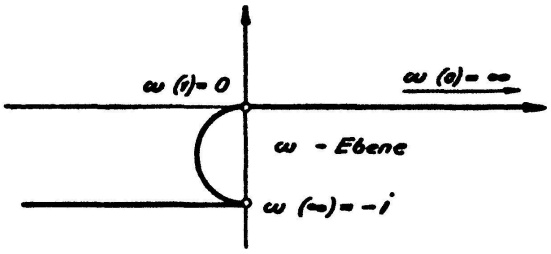

Abbildung 15

man (siehe Abschnitt 4) $\lambda = 2$ und $\alpha = \frac{1}{2}$. Die Abbildungsfunktion $\omega(\zeta)$ nimmt gemäß (48) die besonders einfache Gestalt an

$$\omega(\zeta) = \frac{1-\zeta}{\zeta} \frac{\int_0^1 \left\{ \frac{u[1-(1-\zeta)u]}{1-u} \right\}^{\frac{1}{2}} du}{\int_0^1 \left\{ \frac{u(1-\zeta u)}{1-u} \right\}^{\frac{1}{2}} du} \tag{83}$$

und es ist ferner nach (47)

$$\omega(0) = \infty \qquad \omega(1) = 0 \qquad \omega(\infty) = -i\,. \tag{84}$$

Die obere ζ-Halbebene wird also durch (83) auf das in Abb. 15 dargestellte Kreisbogendreieck abgebildet, welches genau dem Dreieck der Abb. 6 entspricht.

Schließlich hat die Ableitung von (83) gemäß (46), (34) und (35) die Form

$$\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{\pi}{3}\left[\zeta \int_0^1 \left\{ \frac{u(1-\zeta u)}{1-u} \right\}^{\frac{1}{2}} du\right]^{-2}. \tag{85}$$

Die Funktionen (83) und (85) lassen sich leicht aber mühsam auf graphischem Wege bestimmen, indem man den Verlauf des Integranden für eine Reihe von ζ-Werten berechnet. Weiterhin berechnen sich die Konstanten in (25) aus (26) und den Beziehungen

$$i = \frac{f}{h} \qquad -i = \frac{e'}{g} \qquad \infty = \frac{-e'i + f}{-gi + h}\,, \tag{86}$$

aus denen sich sofort

$$e' = \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad f = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad h = -\frac{i}{\sqrt{2}} \tag{87}$$

und

$$z = -i\frac{\omega_1(\zeta) - i}{\omega_1(\zeta) + i} \tag{88}$$

ergibt.

Schließlich müssen noch die Konstanten in (81) bestimmt werden. Der Staupunkt $z = -1$ in der Strömungsebene muß dem Punkt $w = 0$ entsprechen. Aus dieser Forderung ergibt sich, da dem Punkte $z = -1$ gemäß (88) und (83) die Werte $\omega = 1$ und $\zeta = \frac{1}{2}$ entsprechen (in [83] werden für $\zeta = \frac{1}{2}$ Zähler und Nenner einander gleich), sofort

$$a = -2b\ . \tag{89}$$

Ferner muß die Geschwindigkeit der Strömung in den Punkten $z = \pm i$ den Betrag 1 haben, wobei es aus Symmetriegründen genügt, die Rechnung etwa für $z = +i$ durchzuführen. Zunächst entsprechen dem Eckpunkt $z = i$ gemäß (88) und (83) bzw. (84) die Werte $\omega = 0$ und $\zeta = 1$. Weiterhin berechnen sich aus (81), (85) und (88) sofort die Größen

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{d\omega}{d\zeta}\right]_{\zeta=1} = 2a(a+b) \qquad \left[\frac{dz}{d\omega}\right]_{\omega=0} = -2 \\ &\left[\frac{d\omega}{d\zeta}\right]_{\zeta=1} = -\frac{\pi}{3}\left[\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du\right]^{-2} = -\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

und daraus folgt schließlich gemäß (82) als zweite Bedingungsgleichung für a und b

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]_{z=i} = \frac{2a(a+b)}{\left(-\frac{3\pi}{4}\right)(-2)} = \frac{4a(a+b)}{3\pi} = 1\ . \tag{91}$$

Aus (89) und (91) lassen sich nun a und b berechnen. Man erhält

$$a = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}\pi} \qquad b = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}\pi} \tag{92}$$

und schließlich

$$w = \tfrac{3}{2}\pi(\zeta - \tfrac{1}{2})^2\ . \tag{93}$$

Damit ist die Strömung berechnet. Die Lösung wird gegeben durch (83), (88) und (93). Die Geschwindigkeit ergibt sich aus (82), wobei die numerische Berechnung aller Größen auf dem angegebenen Wege durch Auswertung der bestimmten Integrale in (83) und (85) erfolgen kann.

Zweites Beispiel: Es soll die symmetrische Strömung um das in Abb. 16 dargestellte symmetrische Kreisbogenviereck mit den Ecken

$$0 \qquad 0{,}352 + 0{,}074\,i \qquad 1 \qquad 0{,}352 - 0{,}074\,i$$

berechnet werden, welches in diesen bzw. die Winkel

$$\frac{2}{7}\pi \qquad \pi \qquad \frac{1}{7}\pi \qquad \pi$$

besitzt.

Dieser Fall läßt sich gemäß den Bemerkungen auf S. 96 bis 97 auf den des Kreisbogendreiecks zurückführen. Wenn wir die zu diesem Profil

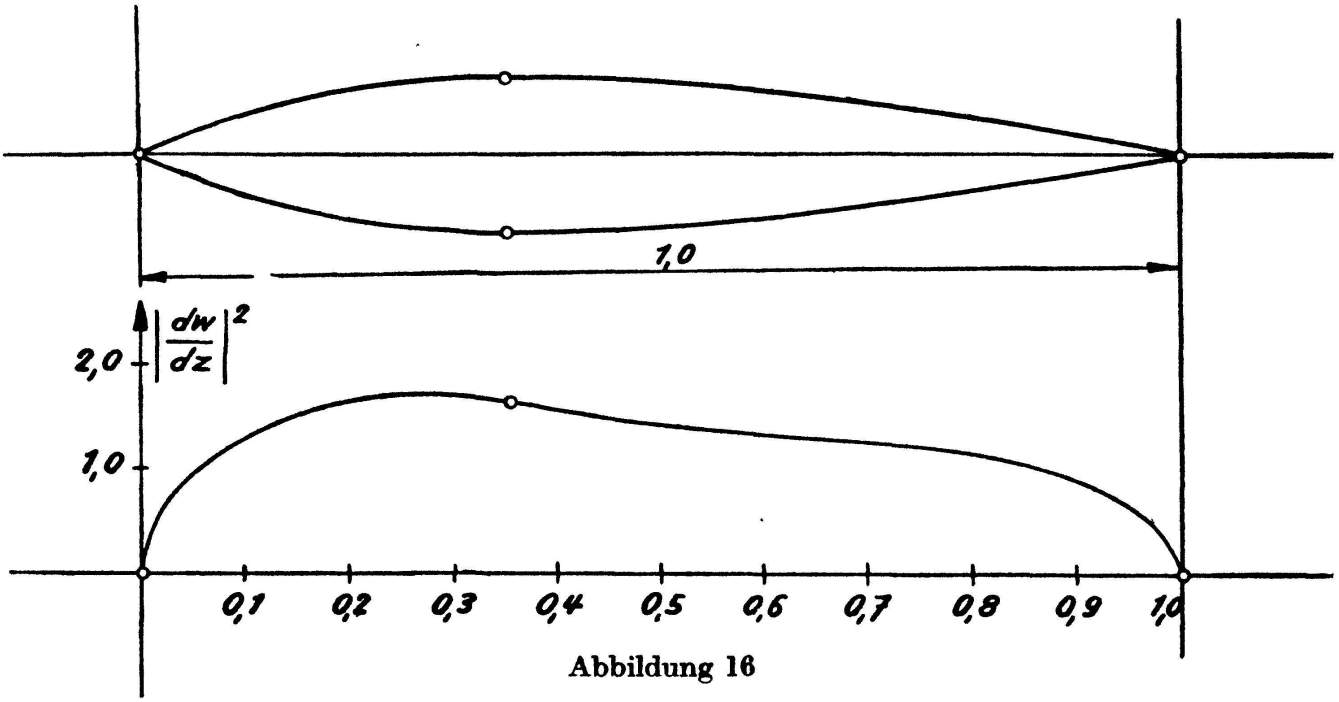

Abbildung 16

gehörende Differentialgleichung infolge der Symmetrie des Profils an Stelle von (23) gemäß den Gleichungen

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = 1 \qquad a_4 = \infty \tag{94}$$

normieren, während wir alle andern früheren Normierungsbedingungen beibehalten, so ergibt sich zunächst gemäß (15), (20), (22), (24) und (94)

$$\begin{aligned} &\alpha_1' = 0 \qquad &&\alpha_2' = 0 \qquad &&\alpha_3' = 0 \qquad &&\alpha_4' = -\frac{25}{14} \\ &\alpha_1'' = 1 \qquad &&\alpha_2'' = \frac{12}{7} \qquad &&\alpha_3'' = 1 \qquad &&\alpha_4'' = \frac{1}{14} \end{aligned} \tag{95}$$

und daraus folgt gemäß (16) bis (18) und unter Beachtung der Tatsache, daß die Invariante aus Symmetriegründen nur von ζ^2 abhängen kann, für die normierte Gleichung (16) die Form

$$\frac{d^2z^*}{d\zeta^2} - \frac{\frac{5}{7}}{\zeta}\frac{dz^*}{d\zeta} - \frac{\frac{25}{196}}{\zeta^2 - 1}z^* = 0\ , \tag{96}$$

während die zweite Normalform (31) die Gestalt

$$\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} - \left[\frac{\frac{25}{196}}{\zeta^2 - 1} - \frac{\frac{95}{196}}{\zeta^2}\right] z^{**} = 0 \tag{97}$$

annimmt. Macht man in (96) die Substitution $\zeta^2 = \zeta^*$, so folgt die Gleichung

$$\zeta^*(\zeta^* - 1)\frac{d^2z^*}{d\zeta^{*2}} + \left(\frac{1}{7}\zeta^* - \frac{1}{7}\right)\frac{dz^*}{d\zeta^*} - \frac{25}{784}z^* = 0\,, \tag{98}$$

und das ist eine hypergeometrische Gleichung der Form (42) mit

$$\alpha = \frac{1}{28} \quad \beta = -\frac{25}{28} \quad \gamma = \frac{1}{7}\,. \tag{99}$$

Damit können nun auf dem S. 92 bis 94 beschriebenen ersten Integrationsweg, der den Umständen dieses Beispiels entsprechend leicht zu modifizieren ist, zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (98) bzw. (96) vermittelst hypergeometrischer Reihen berechnet werden, woraus sich dann die zugehörige Funktion (33) ergibt.

Im vorliegenden Beispiel wurden auf diesem Wege die beiden Fundamentallösungen

$$z_1^{**} = \zeta^{\frac{19}{14}}\mathfrak{P}_1(\zeta) \quad z_2^{**} = \zeta^{-\frac{5}{14}}\mathfrak{P}_2(\zeta) \tag{100}$$

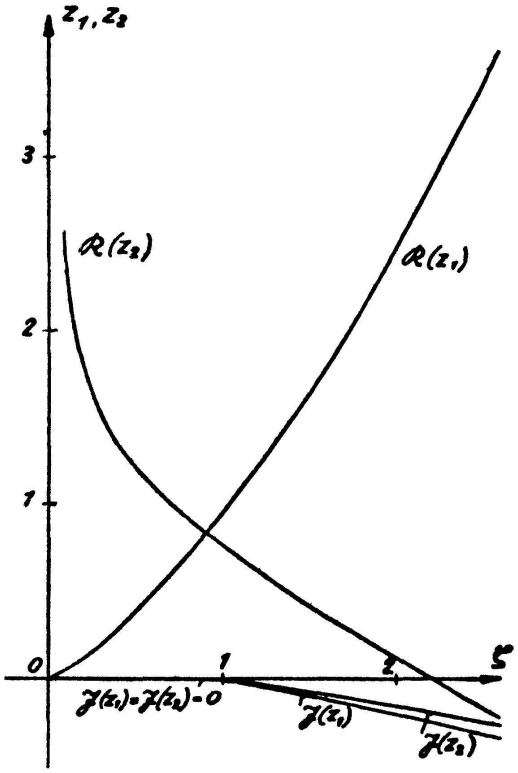

Abbildung 17

der Gleichung (97) längs der positiven reellen Achse berechnet. $\mathfrak{P}_1(\zeta)$ und $\mathfrak{P}_2(\zeta)$ bezeichnen dabei zwei reguläre Potenzreihen, bei denen das konstante Glied den Wert 1 hat. Der Verlauf der Funktionen (100) ist in Abb. 17 dargestellt. Auf der negativen ζ-Achse stimmen z_1^{**} und z_2^{**} bis auf die Faktoren $e^{\frac{19}{14}i\pi}$ und $e^{-\frac{5}{14}i\pi}$ mit den entsprechenden Werten für positive Argumente überein, so daß gemäß Abb. 17 der Verlauf von z_1^{**} und z_2^{**} längs der ganzen reellen Achse bekannt ist.

Nunmehr kann auch der Quotient (33) berechnet werden. Dieser bildet die obere ζ-Halbebene auf das in Abb. 18 dargestellte Kreisbogenviereck K_1 ab mit den Ecken

$$0 \qquad 1{,}263 \qquad -3{,}080 + 1{,}482\,i \qquad 1{,}263\,e^{-\frac{2}{7}i\pi}\,,$$

das mit der gegebenen Profilkurve kreisverwandt ist.

Es handelt sich nun noch darum, die Funktionen (11), (13) und (25) zu bilden. Zunächst ergeben sich die Konstanten e', f, g, h in (25) ganz entsprechend wie im ersten Beispiel. Man erhält

$$e' = 0{,}766\, e^{\frac{i\pi}{14}} \qquad f = 0 \qquad g = 1{,}148\, e^{\frac{i\pi}{14}} \qquad h = 1{,}305\, e^{-\frac{i\pi}{14}}$$

und also

$$z = \frac{\omega}{1{,}500\,\omega + 1{,}707\, e^{-\frac{i\pi}{7}}} \,. \tag{101}$$

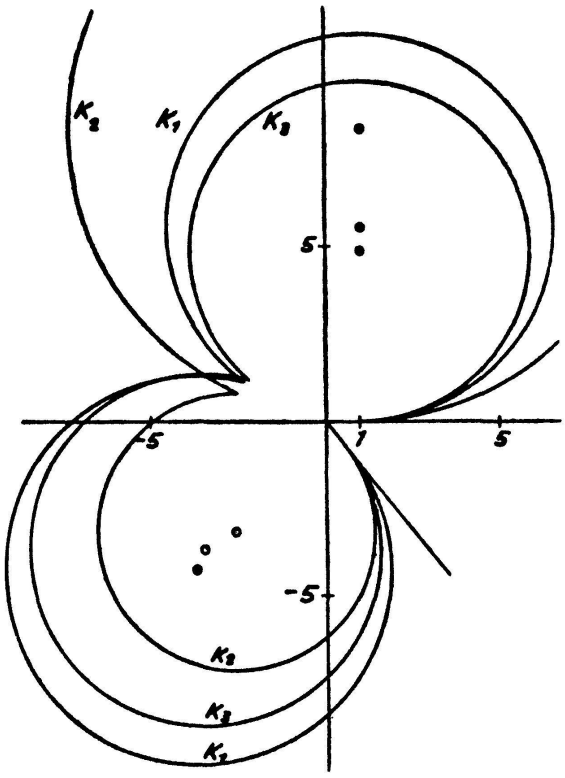

Abbildung 18

Für die weiteren Rechnungen muß zunächst gemäß (73) der Punkt Q bestimmt werden, der in unserem Fall aus Symmetriegründen auf der imaginären Achse liegt. Vermittelst der genannten Näherungsmethoden ergibt sich leicht

$$Q = 1{,}265\, i \,. \tag{102}$$

Gleichzeitig folgt auf Grund von (34) $\left(\text{die Konstante } C \text{ hat in unserem Falle den Wert } \frac{12}{7}\right)$ sofort

$$\omega'(Q) = 1{,}076\, e^{\frac{5}{14} i\pi} \,. \tag{103}$$

Daraus können nun die Konstanten a, b, c, d und U gemäß (75) und (76) bestimmt werden. Die Ausrechnung ergibt

$$a = 0{,}890 \qquad b = 0 \qquad c = 0 \qquad d = 1{,}124 \qquad U = 0{,}279$$

und damit nehmen (13) und (11), da keine Zirkulation auftritt, die Gestalt an

$$Z = \frac{0{,}890\,\zeta + 1{,}124\, i}{0{,}890\,\zeta - 1{,}124\, i} \tag{104}$$

und

$$w = 0{,}279\left(Z + \frac{1}{Z}\right) \,. \tag{105}$$

Durch (33), (101), (104) und (105), wobei die erste dieser Funktionen vermittelst der angegebenen Methoden leicht auch für komplexe Werte von ζ berechnet werden kann, ist nun unser Problem gelöst. Die Berech-

nung der Geschwindigkeit erfolgt am besten auf Grund der Formeln (77) und (79). Damit können auch, wie am Schlusse von Abschnitt 5 auseinandergesetzt, die übrigen wichtigen Größen der Strömung berechnet werden. Insbesondere ergibt sich aus dem Quadrat der Geschwindigkeit nach Bernoulli sofort der Druck. In Abb. 16 ist das Quadrat der Geschwindigkeit längs der Profilkurve gleichzeitig mit dieser letzteren eingetragen.

Drittes Beispiel: Es soll die allgemeinste Strömung um ein Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{2}{7}\pi, \pi, \frac{1}{7}\pi, \pi$ berechnet werden, dessen Gestalt sich nicht zu weit von dem symmetrischen Profil mit diesen Winkeln, also von dem im letzten Beispiel betrachteten Profil, entfernt.

Beim allgemeinen Viereck treten ein akzessorischer Parameter und eine überschüssige singuläre Stelle, also im ganzen zwei durch die Winkel nicht bestimmte Parameter auf. Es handelt sich also darum, die zum allgemeinen Viereck mit den obigen Winkeln gehörende Differentialgleichung

$$\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} = \left[\frac{\frac{95}{196}}{\zeta^2} + \frac{\frac{25}{196} + (\alpha+1)\beta}{\zeta} - \frac{\frac{25}{196} + \alpha\beta}{\zeta+1} - \frac{\beta}{\zeta-\alpha}\right] z^{**} \tag{106}$$

mit den Parametern α und β (daß diese Gleichung zu den obigen Winkeln führt, verifiziert man unmittelbar) für drei verschiedene Kombinationen von α und β, die in der Nähe des symmetrischen Falles liegen, zu integrieren. Dann kann durch Interpolation die Strömung um jedes beliebige, annähernd symmetrische Viereck berechnet werden. Die Gleichung (106) ist dabei, entsprechend (96) und (97), gemäß den Gleichungen

$$a_1 = -1 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \alpha \qquad a_4 = \infty \tag{107}$$

normiert. Für α und β wählen wir die folgenden Wertekombinationen:

$$\alpha = 1\,;\ \beta = -\frac{25}{392} \qquad \alpha = 1\,;\ \beta = -\frac{18}{392} \qquad \alpha = \frac{6}{5}\,;\ \beta = -\frac{25}{392}\,. \tag{108}$$

Das erste dieser Wertepaare führt, wie man durch Einsetzen sofort feststellt, auf die Gleichung des letzten Beispiels, während die beiden andern unsymmetrische Profile ergeben. Es handelt sich also noch darum, die zu den beiden letzten Wertepaaren gehörenden Gleichungen

$$\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} = \left[\frac{\frac{95}{196}}{\zeta^2} + \frac{\frac{7}{196}}{\zeta} - \frac{\frac{16}{196}}{\zeta+1} + \frac{\frac{9}{196}}{\zeta-1}\right] z^{**} \tag{109}$$

und

$$\frac{d^2z^{**}}{d\zeta^2} = \left[\frac{\frac{95}{196}}{\zeta^2} - \frac{\frac{5}{392}}{\zeta} - \frac{\frac{10}{196}}{\zeta+1} + \frac{\frac{25}{392}}{\zeta - \frac{6}{5}}\right] z^{**} \tag{110}$$

zu integrieren.

Dies geschah nach der S. 103 bis 107 beschriebenen zweiten Integrationsmethode. Bei dieser muß zuerst $-J(\zeta)$ auf Grund der Formeln (67) um jeden singulären Punkt in eine Potenzreihe entwickelt werden. Man erhält z. B. für die Gleichung (110) die Entwicklungen

$$-J(\zeta) = \frac{\frac{95}{196}}{\zeta^2} - \frac{\frac{5}{392}}{\zeta} - 0{,}1041 + 0{,}0067\,\zeta - 0{,}0879\,\zeta^2 + 0{,}0202\,\zeta^3 \ldots$$

$$-J(\zeta) = -\frac{\frac{10}{196}}{\zeta+1} + 0{,}4685 + 0{,}9694(\zeta+1) + 1{,}4609(\zeta+1)^2 + 1{,}9489(\zeta+1)^3 \ldots \tag{111}$$

$$-J(\zeta) = \frac{\frac{25}{392}}{\zeta - 1{,}2} + 0{,}3032 - 0{,}5422(\zeta - 1{,}2) + 0{,}6903\,(\zeta - 1{,}2)^2 - 0{,}7727(\zeta - 1{,}2)^3 \ldots$$

Nunmehr kann gemäß (69) zu jedem singulären Punkt eine Lösung (66) der zugehörigen Riccatischen Gleichung angegeben werden. Man errechnet für die drei singulären Punkte leicht die folgenden Lösungen

$$u_0^*(\zeta) = \frac{\frac{19}{14}}{\zeta} - 0{,}0047 - 0{,}0280\,\zeta + 0{,}0014\,\zeta^2 - 0{,}0155\,\zeta^3 + 0{,}0030\,\zeta^4 \ldots$$

$$u_{-1}^*(\zeta) = \frac{1}{\zeta+1} - 0{,}0255 + 0{,}1560(\zeta+1) + 0{,}2443(\zeta+1)^2 + 0{,}2898(\zeta+1)^3 + 0{,}3140(\zeta+1)^4 \ldots \tag{112}$$

$$u_{1,2}^*(\zeta) = \frac{1}{\zeta - 1{,}2} + 0{,}0319 + 0{,}1010(\zeta - 1{,}2) - 0{,}1371(\zeta - 1{,}2)^2 + 0{,}1377(\zeta - 1{,}2)^3 - 0{,}1256(\zeta - 1{,}2)^4 \ldots$$

Aus diesen ergeben sich schließlich gemäß (71) die folgenden Abbildungsfunktionen

$$\omega_0^* = \frac{1}{\zeta^{\frac{38}{14}}}[-0{,}5830\,\zeta - 0{,}0132\,\zeta^2 + 0{,}0980\,\zeta^3 - 0{,}0009\,\zeta^4 + 0{,}0035\,\zeta^5 \ldots] \tag{113}$$

$$\omega^*_{-1} = \frac{1}{(\zeta+1)^2}[-(\zeta+1) - 0{,}1547(\zeta+1)^3 - 0{,}0855(\zeta+1)^4$$
$$- 0{,}0471(\zeta+1)^5 \ldots] + 0{,}0510 \lg(\zeta+1)$$
$$\omega^*_{1,2} = \frac{1}{(\zeta-1{,}2)^2}[-(\zeta-1{,}2) - 0{,}0990(\zeta-1{,}2)^3 + 0{,}0492(\zeta-1{,}2)^4$$
$$- 0{,}0233(\zeta-1{,}2)^5 \ldots] - 0{,}0638 \lg(\zeta-1{,}2)\ .$$

Schließlich handelt es sich noch darum, diese drei Lösungen zusammenzusetzen. Dies wurde unter Verwendung zweier weiterer Potenzreihen in der auf S. 106 erwähnten Weise durchgeführt. Als Resultat ergab sich das in Abb. 18 dargestellte Kreisbogenviereck K_3. In ganz gleicher Weise wurde das zur Gleichung (109) gehörende Viereck K_2 bestimmt.

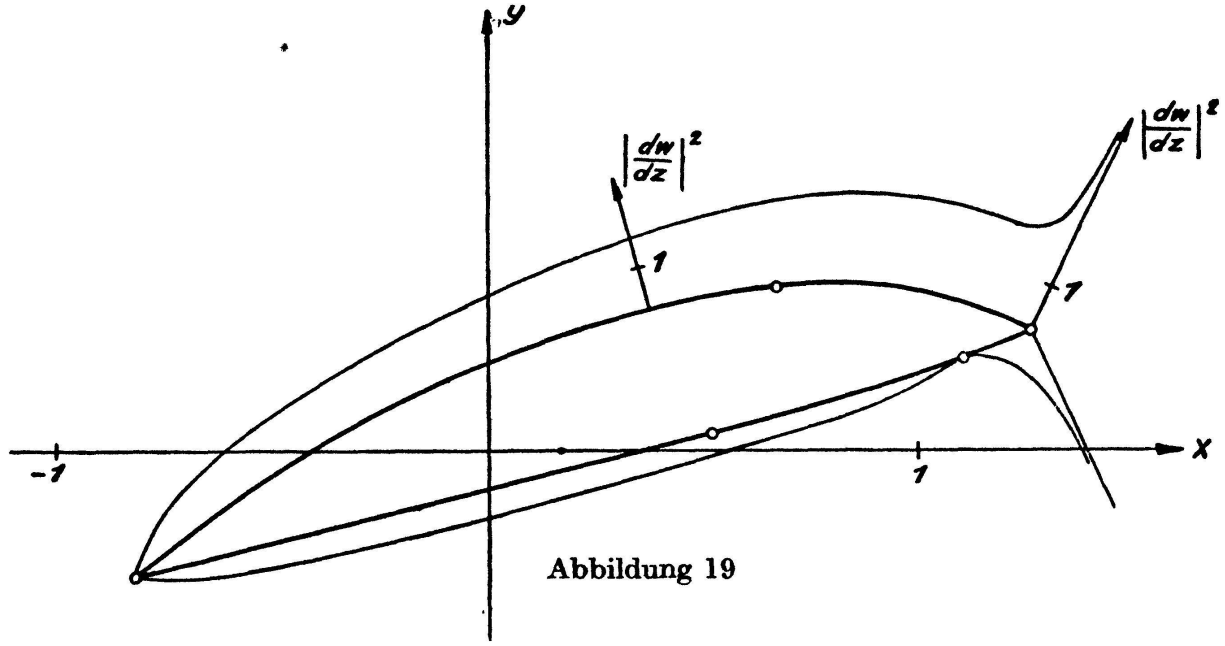

Abbildung 19

Die Kreisbogenvierecke K_1, K_2, K_3 in Abb. 18 sind bereits in der auf S. 98 bis 99 angegebenen Weise normiert. Eine ihrer Seiten fällt stets auf die positive reelle Achse zwischen die Punkte 0 und 1. Ist nun ein anderes Kreisbogenviereck gegeben mit den gleichen Winkeln, das annähernd symmetrisch ist, so kann dieses ebenfalls in der obigen Weise normiert und dann mit den Vierecken K_1, K_2, K_3 verglichen werden. Auf diese Weise können dann durch Interpolation die zu dem gegebenen Kreisbogenviereck gehörenden Parameter α und β und also auch die zugehörige normierte Gleichung (29) bestimmt werden. Es handelt sich dann noch darum, diese zu lösen und auf Grund davon die zugehörige Strömung zu berechnen.

In Abb. 19 ist ein derartiges Beispiel durchgerechnet. Das dort dargestellte Tragflügelprofil ist ein unsymmetrisches Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{2}{7}\pi, \pi, \frac{1}{7}\pi, \pi$. Es wird von rechts her angeströmt durch eine

horizontale Strömung, welche im Unendlichen die komplexe Geschwindigkeit $V = 1$ besitzt und die außerdem nach der Forderung von Joukowsky an der Hinterkante eine glatte Abströmung ergibt. Durch diese beiden Eigenschaften ist die Strömung bestimmt. Das Profil in Abb. 19 ist mit dem Kreisbogenviereck K_2 in Abb. 18 kreisverwandt, so daß die zugehörige Differentialgleichung gleich (109) ist. Ausgehend von dieser Gleichung kann die Strömung in genau entsprechender Weise berechnet werden wie dies im letzten Beispiel ausführlich durchgeführt wurde. Wir begnügen uns deshalb im wesentlichen mit der Angabe der Resultate.

Wenn $\omega(\zeta)$ wie im zweiten Beispiel diejenige Abbildungsfunktion bezeichnet, die gleich dem Quotienten der beiden Fundamentallösungen um den Punkt $\zeta = 0$ ist, ergeben sich zunächst für die Funktionen (25) und (13) die Gestalten

$$z = \frac{1}{\omega + (1{,}512 - 0{,}304\, i)} \tag{114}$$

und

$$Z = \frac{(0{,}778 + 0{,}143\, i)\, \zeta + (-\, 0{,}074 + 1{,}269\, i)}{(0{,}778 - 0{,}143\, i)\, \zeta + (-\, 0{,}074 - 1{,}269\, i)} \,. \tag{115}$$

Ein kleiner Unterschied gegenüber dem zweiten Beispiel ergibt sich bei der Funktion (11), indem wir jetzt eine Zirkulation haben. Gemäß (49) bestimmt sich der Winkel φ aus der Gleichung

$$\frac{0{,}778 + 0{,}143\, i}{0{,}778 - 0{,}143\, i} = e^{i\varphi} \,. \tag{116}$$

Daraus folgt $\sin\varphi = 0{,}3544$ und gemäß (51) $\Gamma = 1{,}310$. Damit nimmt (11) die Gestalt an

$$w = 0{,}294\left(Z + \frac{1}{Z}\right) - 0{,}2085\, i \lg Z \,. \tag{117}$$

Durch (114), (115), (117) und die zum jetzigen Profil gehörende Funktion (33) ist nun unser Problem wieder gelöst.

Zur Berechnung der komplexen Geschwindigkeit (und damit auch der andern wichtigen Größen der Strömung) gehen wir wieder aus von einem Punkt der ζ-Ebene. Dann hat die Strömung im zugehörigen, durch (114) gegebenen Punkt der z-Ebene gemäß (78) die komplexe Geschwindigkeit

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{[\omega(\zeta) + 1{,}512 - 0{,}340\, i]^2}{\omega'(\zeta)} \, \frac{2{,}350\, p\, q - 0{,}471\,(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)^2} \tag{118}$$

mit den Abkürzungen $p = 0{,}778\, \zeta - 0{,}074$ und $q = 0{,}143\, \zeta + 1{,}269$.

In Abb. 19 ist das Quadrat der Geschwindigkeit senkrecht über der Profilkurve abgetragen. Bei der Eintrittskante wächst die Geschwindigkeit theoretisch ins Unendliche, während sie in den beiden Staupunkten verschwindet.

8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die (symmetrischen) automorphen Funktionen sowohl theoretisch wie praktisch ein wertvolles Hilfsmittel zur Untersuchung ebener Potentialströmungen sind, in ersterer Hinsicht insofern als viele theoretisch wichtige Formen durch Kreisbogenpolygone erfaßt werden können, in letzterer deshalb, weil sich auch die numerischen Rechnungen auf recht einfache Weise durchführen lassen. Der wesentliche Punkt der Lösung besteht erstens in der Aufstellung und zweitens in der Integration der zu einem gegebenen Kreisbogenpolygon gehörenden Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse. Während der zweite dieser Schritte leicht durchgeführt werden kann, stellt der erste ein zur Zeit noch nicht befriedigend gelöstes Problem der Theorie der automorphen Funktionen dar, da über die Abhängigkeit eines Teiles der Parameter einer Gleichung der Fuchsschen Klasse von der Gestalt des zu ihr gehörenden Polygons im allgemeinen Fall sozusagen nichts bekannt ist. Praktisch kann diese Schwierigkeit jedoch auf Grund des Umstandes überwunden werden, daß man bei gegebener Differentialgleichung sehr leicht die Gestalt des zu ihr gehörenden Polygons angeben kann, so daß man, ähnlich wie bei den Joukowskyprofilen, die genannten Parameter einfach unter Verwendung entsprechender Interpolationsmethoden so variieren kann, bis das Polygon genügend genau mit einer vorgegebenen Form übereinstimmt. Auf diese Weise können derartige Probleme, wie das auch aus den durchgerechneten Beispielen hervorgeht, numerisch sehr gut gelöst werden.

(Eingegangen den 5. Juli 1948.)