

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	22 (1949)
Artikel:	Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen.
Autor:	Szép, J.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-19188

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen

Von J. SZÉP, Budapest

Wir betrachten eine endliche Gruppe \mathfrak{G} , die sich als Produkt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \mathfrak{K} \quad (1)$$

von zwei echten Untergruppen \mathfrak{H} , \mathfrak{K} darstellen läßt; wir verstehen (1) so, daß die ausmultiplizierte rechte Seite jedes Element von \mathfrak{G} genau einmal enthält. Notwendig und hinreichend zum Bestehen von (1) ist bekanntlich, daß die Untergruppen \mathfrak{H} , \mathfrak{K} kein Element außer 1 gemeinsam haben und für die Gruppenordnungen die ähnliche Gleichung

$$(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{H})(\mathfrak{K})$$

gilt. Wegen der Symmetrie dieser Bedingungen folgt aus (1)

$$\mathfrak{K} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \mathfrak{K} . \quad (2)$$

Unter der Annahme (1) läßt sich leicht eine zu \mathfrak{H} homomorphe Permutationsgruppe konstruieren, mit deren Hilfe man unter Umständen auf die Nichteinfachheit von \mathfrak{G} , sogar auf die Existenz eines Normalteilers von \mathfrak{G} in \mathfrak{H} schließen kann.

Bezeichne H , K je ein Element von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{K} . Nach (2) gilt dann

$$KH = H'K' \quad (3)$$

mit eindeutig bestimmten $H' \in \mathfrak{H}$, $K' \in \mathfrak{K}$. Bei festem H durchläuft K' mit K zusammen alle verschiedenen Elemente von \mathfrak{K} ; denn gilt neben (3) auch $K_1H = H'_1K'$ mit $H'_1 \in \mathfrak{H}$, $K_1 \in \mathfrak{K}$, so folgt $K_1K^{-1} = H'_1H'^{-1} = 1$, $K_1 = K$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir ordnen dem Element H von \mathfrak{H} die Permutation

$$\pi_H = \begin{pmatrix} K \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ H'^{-1} K H \end{pmatrix} \quad (4)$$

(der Elemente) von \mathfrak{K} zu. Hierfür gilt

$$\pi_{H\bar{H}} = \pi_H \pi_{\bar{H}} \quad (H, \bar{H} \in \mathfrak{H}) ; \quad (5)$$

denn gilt neben (3) die entsprechende Gleichung

$$K' \bar{H} = \bar{H}' K'' ,$$

so folgt

$$K H \bar{H} = H' K' \bar{H} = H' \bar{H}' K'' ,$$

also

$$\pi_{H\bar{H}} = \binom{K}{K''} = \binom{K}{K'} \binom{K'}{K''} = \pi_H \pi_{\bar{H}} .$$

Hiermit haben wir die erste Hälfte des folgenden Satzes bewiesen :

Satz 1. *Gilt für die endliche Gruppe \mathfrak{G} und für seine Untergruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{R}$ die Annahme (1), so bilden die durch (3) und (4) definierten Permutationen π_H eine Untergruppe Π aller Permutationen von \mathfrak{R} mit der durch die Zuordnung „ $H \rightarrow \pi_H$ “ vermittelten Homomorphie*

$$\mathfrak{H} \sim \Pi ; \quad (6)$$

wir nennen Π die \mathfrak{H} zugeordnete Π -Gruppe. In dieser Homomorphie (6) entspricht dem größten, in \mathfrak{H} enthaltenen Normalteiler \mathfrak{N} von \mathfrak{G} dem Eins-element von Π , so daß also für die Faktorgruppe die Isomorphie

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{N} \approx \Pi \quad (7)$$

gilt.

Bezeichne nämlich \mathfrak{H}_0 diejenige Untergruppe von \mathfrak{H} , die in der Homomorphie (6) dem Element 1 entspricht. Wir haben $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{N}$ zu zeigen. Nach (4) besteht \mathfrak{H}_0 aus denjenigen Elementen H von \mathfrak{H} , für die $K = K'$ ($K \in \mathfrak{R}$), d. h. nach (3)

$$K H K^{-1} \in \mathfrak{H} \quad (K \in \mathfrak{R}) \quad (8)$$

gilt. Für den Fall $H \in \mathfrak{N}$ trifft dies zu, und so folgt $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}_0$. Anderseits zeigen wir, daß \mathfrak{H}_0 normal in \mathfrak{G} ist, woraus wegen $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{N}$, d. h. die Behauptung $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{N}$ folgen wird. Für jedes Elementenpaar $H (\in \mathfrak{H}_0)$, $K (\in \mathfrak{R})$ gilt nach (8)

$$\bar{H} = K H K^{-1} \in \mathfrak{H} . \quad (9)$$

Es ist nur zu beweisen, daß auch $\bar{H} \in \mathfrak{H}_0$ gilt. Bezeichne hierzu \bar{K} ein beliebiges Element von \mathfrak{R} . Aus (9) folgt

$$\bar{K} \bar{H} \bar{K}^{-1} = (\bar{K} K) H (\bar{K} K)^{-1} .$$

Da dieses Element nach (8) in \mathfrak{H} liegt, so gehört \bar{H} ebenfalls nach (8) in \mathfrak{H}_0 , womit wir Satz 1 bewiesen haben.

Nach diesem Satz (nach (7)) ist eine Gruppe jedenfalls nichteinfach, wenn sie eine Zerlegung (1) zuläßt, wofür die \mathfrak{H} zugeordnete Π -Gruppe von niedrigerer Ordnung als \mathfrak{H} ist. Als Anwendung hiervon bekommen wir den folgenden :

Satz 2. Bezeichne \mathfrak{G} eine endliche Gruppe und $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ zwei echte Untergruppen mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$. Gibt es in \mathfrak{H} ein Element n -ter Ordnung so, daß die Summe der in n enthaltenen größten Primzahlpotenzen nicht kleiner als die Ordnung (\mathfrak{K}) von \mathfrak{K} ist, so ist \mathfrak{G} nichteinfach und \mathfrak{H} enthält einen Normalteiler von \mathfrak{G} , dessen Ordnung zu n nicht prim ist.

Insbesondere also wenn es in \mathfrak{H} ein Element von der Primzahlpotenzordnung $p^\alpha \geq (\mathfrak{K})$ gibt, so enthält \mathfrak{H} einen echten Normalteiler von \mathfrak{G} mit durch p teilbarer Ordnung.

Bezeichne nämlich H ein Element n -ter Ordnung von \mathfrak{H} , und es gelte die Zerlegung

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}. \quad (10)$$

Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die Ordnung von π_H kleiner als n ist. Zerlege man π_H in elementenfremde Zyklen von s_1, s_2, \dots Elementen, so daß

$$(\mathfrak{K}) = 1 + s_2 + s_3 + \cdots$$

gilt, wobei man $s_1 = 1$ setzen durfte. Die Ordnung von π_H ist das kl.g.V. aller s_i . Wäre dieses gleich n , so müßte jedes $p_i^{\alpha_i}$ in mindestens einem s_2, s_3, \dots aufgehen. Das ist aber wegen $((\mathfrak{K}) - 1) = s_2 + s_3 + \cdots \leq p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + \cdots$ offenbar unmöglich, und so ist Satz 2 richtig.

Bemerkung. Wegen der Symmetrie lassen sich $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ in den Sätzen 1, 2 miteinander vertauschen. Bezeichne Π' die \mathfrak{K} zugeordnete Π -Gruppe. Offenbar ist $\Pi = \Pi' = 1$ dann und nur dann, wenn \mathfrak{G} das direkte Produkt von $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ ist. Weiter ist $(\Pi) = (\mathfrak{H})$, $(\Pi') = (\mathfrak{K})$ dann und nur dann, wenn weder \mathfrak{H} noch \mathfrak{K} einen Normalteiler von \mathfrak{G} enthält.

(Eingegangen den 6. Dezember 1947.)