

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 22 (1949)

**Artikel:** Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale.  
**Autor:** Lichnerowicz, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19202>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale

Par ANDRÉ LICHNEROWICZ, Strasbourg

## Introduction

Je me suis proposé ici d'étudier, pour quelques cas simples et par des méthodes de géométrie différentielle globale, la relation qui existe, au point de vue de l'homologie entre un espace fibré compact  $E$  et son espace de base  $B$ . Au cours de ce travail, l'espace de base  $B$  sera supposé doué soit d'une structure de variété riemannienne soit d'une structure de variété finslerienne. Dans ce dernier cas, mes résultats m'ont conduit à étendre à des variétés finsleriennes compactes le calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré tel qu'il a été donné, pour des variétés riemanniennes, par Allendoerfer, Weil et Chern.

### 1. — Définition des espaces fibrés

Pour plus de clarté, nous commencerons par rappeler quelques définitions et quelques résultats indispensables relatifs à la théorie des espaces fibrés.

Considérons un espace topologique connexe  $E$  et soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$ . A l'espace  $B = E/R$  quotient de  $E$  par la relation  $R$ , nous donnerons le nom d'espace de base. Nous désignerons par  $p$  et nommerons *projection* l'application canonique de  $E$  sur  $B$  correspondant à la définition de  $B$  comme espace quotient. L'image réciproque  $\bar{p}^{-1}(x)$  d'un point  $x \in B$ , c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $E$  correspondant à  $x$ , sera dite la *fibres*  $F_x$  associée au point  $x$ .

Supposons qu'il existe un espace topologique  $F$  et un groupe d'automorphismes  $G$  de  $F$  jouissant des propriétés suivantes :

1° Les  $F_x$  sont toutes homéomorphes à l'espace  $F$ , la famille  $H_x$  des homéomorphismes d'une même fibre  $F_x$  sur  $F$  étant telle que  $h_x, k_x \in H_x$ , l'automorphisme  $k_x h_x^{-1}$  appartienne au groupe  $G$ .

2° Il existe une famille de voisinages ouverts  $U$  qui recouvre  $B$ , l'image réciproque  $\bar{p}^{-1}(U)$  étant un produit topologique. D'une manière

plus précise, il existe un homéomorphisme  $\varphi_U$ , dépendant de  $U$ , qui applique  $\bar{p}^{-1}(U)$  sur le produit topologique  $U \times F$  et qui induit, pour tout  $x \in U$ , un homéomorphisme de  $F_x$  sur  $\{x\} \times F$ , donc sur  $F$ , appartenant à  $H_x$ .

Si  $U$  et  $V$  sont deux voisinages de la famille considérée, les homéomorphismes  $\varphi_U$  et  $\varphi_V$  définissent par suite, pour  $x \in U \cap V$ , des homéomorphismes  $h_x$  et  $k_x$  de  $F_x$  sur  $F$  tels que  $k_x h_x^{-1} \in G$ .

Lorsqu'il en est ainsi, l'ensemble  $H$  des familles  $H_x$  d'homéomorphismes définit sur  $E$  une *structure d'espace fibré*  $E(B, F, G, H)$  admettant  $F$  pour *fibre-type* et  $G$  pour *groupe structural* <sup>1)</sup>. Si  $G$  se réduit à la transformation identique,  $H_x$  ne comprend qu'un seul élément et l'espace  $E$  n'est autre que le produit topologique  $B \times F$ .

## 2. — *Espaces fibrés différentiables*

Supposons que  $E, B, F$  soient des variétés différentiables. Si  $E$  est doué d'une structure d'espace fibré différentiable <sup>2)</sup>, la projection  $p$ , les homéomorphismes  $\varphi_U$  sont eux-mêmes différentiables et les fibres  $F_x$  sont des variétés différentiables plongées dans  $E$ . Dans le cas où  $E$  est compact, la proposition suivante a été énoncée par Ehresmann :

*Si  $E$  est compact, toute application différentiable  $p$  de  $E$  sur une variété  $B$  de dimension  $n$ ,  $p$  étant en tout point de rang  $n$ , détermine sur  $E$  une structure d'espace fibré différentiable.*

Dans le présent travail, nous n'envisagerons que le cas où  $E$  est un espace fibré différentiable de classe  $c^r$ , ( $r \geq 3$ ), les variétés  $B, F$  et  $E$  étant supposées *compactes* et de plus orientables. Nous désignerons par  $n, q$  et  $n + q$  les dimensions respectives de  $B, F$  et  $E$ .

## I. — Les variétés riemanniennes fibrées et la méthode des formes harmoniques

### 3. — *La métrique riemannienne de $E$*

Sous nos hypothèses, on peut envisager la variété différentiable  $B$  de classe  $c^r$ , ( $r \geq 3$ ), comme une variété riemannienne au moins deux fois différentiable. La métrique de  $B$ , que nous représenterons par  $ds_B^2$ , peut être définie localement par une décomposition en carrés

$$ds_B^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i)^2 \quad (i, j, \text{ etc. } \dots = 1, 2, \dots, n) . \quad (3.1)$$

<sup>1)</sup> Sur la théorie des espaces fibrés cf. *Ehresmann* [4], [6] et [7] et *Chern* [3].

<sup>2)</sup> Cf. *Ehresmann* [7].

Il en est de même pour la variété  $E$ , mais on peut adapter la métrique riemannienne choisie pour  $E$  à sa structure d'espace fibré. Il est clair en effet que l'on peut construire pour  $E$  une métrique de la forme <sup>3)</sup>

$$ds_E^2 = ds_B^2 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (\pi_\alpha)^2 \quad (3.2)$$

( $\alpha, \beta$ , etc. ... = 1, 2, ...,  $q$  ou  $n+1, \dots, n+q$ )

A la donnée d'une telle métrique  $ds_E^2$  correspond dans  $E$  un champ  $\Pi$  d'éléments de contact à  $n$  dimensions défini localement par les équations  $\pi_\alpha = 0$  et qui est *transversal* aux fibres, c'est-à-dire dont l'élément associé à  $z \in E$  ne contient aucune direction tangente à la fibre  $F_{pz}$ . Ce champ est deux fois différentiable. On sait qu'il existe toujours de tels champs transversaux aux fibres.

La métrique que nous adopterons pour  $E$  pourra donc être définie localement par la décomposition en carrés

$$ds_E^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i)^2 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} (\pi_\alpha)^2 . \quad (3.3)$$

#### 4. — Formes adjointes

Considérons une variété riemannienne  $V$ , orientée, à  $m$  dimensions de métrique

$$ds_V^2 = \sum_{a=1}^{a=m} (\tau_a)^2 . \quad (4.1)$$

On sait<sup>4)</sup> que l'on peut faire correspondre à toute forme différentielle extérieure  $\Psi$  de degré  $p$ , définie sur une telle variété, une forme de degré  $(m-p)$  qu'on appelle son *adjointe* et que nous représenterons par la notation  $*\Psi$ . La notion de forme adjointe joue un rôle essentiel pour la définition des opérateurs qui interviennent dans la théorie des formes harmoniques.

L'opérateur d'adjonction  $*$  étant un opérateur linéaire, il suffit pour le calcul de l'adjointe, de rappeler comment on construit l'adjointe d'une forme représentée localement par le monôme

$$\Psi = \tau_{a_1} \wedge \tau_{a_2} \wedge \dots \wedge \tau_{a_p} .$$

L'adjointe de  $\Psi$  est alors donnée par la formule :

$$*\Psi = \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} \dots a_m} \tau_{a_{p+1}} \wedge \dots \wedge \tau_{a_m} \quad (4.2)$$

<sup>3)</sup> Cf. *Ehresmann* [5].

<sup>4)</sup> Cf. *G. de Rham* [11], p. 6—7.

où  $a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} \dots a_m$  constitue une permutation sans répétition de la suite  $1, 2, \dots, m$  et où  $\varepsilon$  désigne l'indicateur de cette permutation. On en déduit immédiatement que pour toute forme  $\Psi$  de degré  $p$ , on a

$$** \Psi = (-1)^{p(m+1)} \Psi . \quad (4.3)$$

Nous désignerons dans la suite, par  $d$  l'opérateur de différentiation extérieure d'une forme et introduirons<sup>5)</sup> l'opérateur adjoint de  $d$

$$d^* = (-1)^{m(p+1)+1} *d* . \quad (4.4)$$

Appliquons les considérations précédentes à des formes définies sur les variétés  $B$  et  $E$ . A toute forme différentielle extérieure  $\Omega$  définie sur  $B$ , correspond une forme  $\bar{p}^1 \Omega$  définie sur  $E$  qui est dite l'image réciproque de  $\Omega$  et qui admet localement même expression que  $\Omega$ . Cherchons à exprimer l'adjointe de la forme  $\bar{p}^1 \Omega$  définie sur  $E$  à partir de l'adjointe de la forme  $\Omega$  elle-même. A cet effet introduisons la forme différentielle extérieure définie sur  $E$

$$\Theta = * \bar{p}^1 * 1 . \quad (4.5)$$

La forme  $* 1$  n'est autre que l'élément de volume de  $B$  et se trouve représentée localement par

$$* 1 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n . \quad (4.6)$$

Les indices grecs étant considérés comme congrus à  $n+1, n+2, \dots, n+q$ , la forme  $\Theta$  admet pour représentation locale

$$\Theta = \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \dots \wedge \pi_q . \quad (4.7)$$

Si la forme  $\Omega$  est représentée localement par le monôme

$$\Omega = \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$$

il vient :

$$* \Omega = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_n} . \quad (4.8)$$

D'autre part

$$* \bar{p}^1 \Omega = \varepsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n \overline{n+1} \dots \overline{n+q}} \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_n} \wedge \pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_q .$$

Soit

$$* \bar{p}^1 \Omega = (-1)^{(n-p)q} (\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \dots \wedge \pi_q) (\varepsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} \omega_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \omega_{i_n}) . \quad (4.9)$$

---

<sup>5)</sup> Cf. *G. de Rham* [12], p. 136—137.

On en déduit que, pour toute forme  $\Omega$  de degré  $p$  définie sur  $B$ , on peut passer de  $*\Omega$  à  $*\bar{p}^1\Omega$  par la formule

$$*\bar{p}^1\Omega = (-1)^{(n-p)q} \Theta \wedge \bar{p}^1 * \Omega . \quad (4.10)$$

5. — *Les opérateurs  $d$  et  $d^*$  pour l'image réciproque d'une forme de  $B$ .*

Si  $\Omega$  désigne toujours une forme définie sur la variété  $B$ ,  $\bar{p}^1\Omega$  son image réciproque sur  $E$ , on a manifestement

$$d(\bar{p}^1\Omega) = \bar{p}^1(d\Omega) . \quad (5.1)$$

L'équation (5.1) peut être traduite par la „formule de commutation“ entre opérateurs

$$d\bar{p}^1 - \bar{p}^1 d = 0 . \quad (5.2)$$

Cherchons à étudier, à l'aide de la formule (4.10), l'opérateur  $d^*\bar{p}^1 - \bar{p}^1 d^*$ , appliqué aux formes extérieures définies sur  $B$ . On a d'abord, d'après la définition de  $d^*$ :

$$d^*\bar{p}^1\Omega = (-1)^{(n+q)(p+1)+1} * d * \bar{p}^1\Omega . \quad (5.3)$$

Or en vertu de la formule (4.10)

$$d * \bar{p}^1\Omega = (-1)^{(n-p)q} d(\Theta \wedge \bar{p}^1 * \Omega)$$

soit

$$d * \bar{p}^1\Omega = (-1)^{(n-p)q} [d\Theta \wedge \bar{p}^1 * \Omega + (-1)^q \Theta \wedge d\bar{p}^1 * \Omega] .$$

Posons

$$X\Omega = (-1)^{(n+1)(q+1)+np} * [d\Theta \wedge \bar{p}^1 * \Omega] . \quad (5.4)$$

Il vient ainsi d'après (5.2) et (5.3)

$$d^*\bar{p}^1\Omega = X\Omega + (-1)^{n(p+q+1)+1} * [\Theta \wedge \bar{p}^1 d * \Omega] . \quad (5.5)$$

Or d'après (4.3) et (4.4)

$$d * \Omega = (-1)^p * d^* \Omega$$

et d'après (4.10)

$$\Theta \wedge \bar{p}^1 * d^* \Omega = (-1)^{(n-p+1)q} * \bar{p}^1 d^* \Omega .$$

Il en résulte, en reportant dans la formule (5.5)

$$d^*\bar{p}^1\Omega = X\Omega + (-1)^{(n+q+1)(p+1)} ** \bar{p}^1 d^* \Omega .$$

Soit en vertu de (4.3), appliquée à une forme de degré  $(p - 1)$  définie sur  $E$ ,

$$d^* \bar{p}^1 \Omega - \bar{p}^1 d^* \Omega = X \Omega .$$

Ainsi l'opérateur

$$d^* \bar{p}^1 - \bar{p}^1 d^* = X$$

qui fait passer d'une forme de degré  $p$  définie sur  $B$  à une forme de degré  $(p - 1)$  définie sur  $E$ , est donné par la formule

$$X \Omega = (-1)^{(n+1)(q+1)+np} * [d\Theta \wedge \bar{p}^1 * \Omega] . \quad (5.6)$$

L'opérateur  $X$  faisant intervenir d'une manière essentielle la forme  $d\Theta$ , nous allons chercher à évaluer cette forme à partir des éléments de la connexion riemannienne associée à la métrique (3.3) de  $E$ .

## 6. — Quelques théorèmes de géométrie différentielle riemannienne

Nous appelons *repère associé à un point  $z$  de  $E$* , un système de  $(n + q)$  vecteurs unitaires, tangents en  $z$  à  $E$  et deux à deux orthogonaux, le système étant muni d'une certaine orientation. Les repères utilisés seront adaptés à la forme (3.2) de la métrique, c'est-à-dire seront tels que les  $n$  premiers vecteurs  $(\vec{e}_i)$  appartiennent à l'élément en  $z$  du champ  $\Pi$  et que les  $q$  derniers  $(\vec{e}_\alpha)$  soient tangents à la fibre  $F_{pz}$ . Les formules de Frenet relatives à un tel repère s'écrivent

$$d\vec{z} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i + \sum_\alpha \pi_\alpha \vec{e}_\alpha \quad (6.1)$$

et

$$d\vec{e}_i = \sum_j \omega_{ij} \vec{e}_j + \sum_\beta \omega_{i\beta} \vec{e}_\beta ; \quad d\vec{e}_\alpha = \sum_j \omega_{\alpha j} \vec{e}_j + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta . \quad (6.2)$$

Si  $a, b$ , etc. ... désignent des indices pouvant prendre les valeurs  $1, 2, \dots, n + q$ , on a manifestement

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 . \quad (6.3)$$

Nous poserons

$$\omega_{ab} = \sum_i \gamma_{abi} \omega_i + \sum_\alpha \gamma_{ab\alpha} \pi_\alpha . \quad (6.4)$$

La nullité de la torsion de la connexion riemannienne considérée se traduit par les formules :

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j + \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \pi_\beta \quad (6.5)$$

$$d\pi_\alpha = \sum_j \omega_{\alpha j} \wedge \omega_j + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \pi_\beta \quad (6.6)$$

dont les dernières fournissent les différentielles extérieures des formes  $\pi_\alpha$ . Le second membre de (6.5) ne devant contenir aucun terme en  $\pi_\beta \wedge \pi_\gamma$ , on notera que

$$\gamma_{\alpha j\beta} = \gamma_{\beta j\alpha} .$$

Cela posé, cherchons à évaluer la différentielle extérieure de la forme

$$\Theta = \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \dots \wedge \pi_q .$$

On a manifestement

$$d\Theta = \sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} d\pi_\alpha \wedge \pi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\pi}_\alpha \wedge \dots \wedge \pi_q \quad (6.8)$$

où le signe  $\wedge$  signifie que le facteur correspondant doit être omis dans le produit extérieur considéré. Si l'on substitue dans (6.8), la valeur de  $d\pi_\alpha$  donnée par (6.6) et tient compte de l'antisymétrie des  $\omega_{\alpha\beta}$ , il vient

$$d\Theta = \sum_{\alpha, j} (-1)^{\alpha-1} \omega_{\alpha j} \wedge \omega_j \wedge \pi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\pi}_\alpha \wedge \dots \wedge \pi_q .$$

Or

$$\omega_{\alpha j} = \sum_\beta \gamma_{\alpha j\beta} \pi_\beta + \sum_k \gamma_{\alpha jk} \omega_k .$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} d\Theta &= \left[ \sum_j \left( \sum_\alpha \gamma_{\alpha j\alpha} \right) \omega_j \right] \wedge \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \dots \wedge \pi_q \\ &+ \sum_\alpha (-1)^\alpha \left[ \sum_{j,k} \gamma_{\alpha jk} \omega_j \wedge \omega_k \right] \wedge \pi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\pi}_\alpha \wedge \dots \wedge \pi_q . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Considérons la forme différentielle linéaire intrinséquement définie sur la variété  $E$  par la formule

$$\mu = \sum_j \left( \sum_\alpha \gamma_{\alpha j\alpha} \right) \omega_j . \quad (6.10)$$

A l'aide de la forme  $\mu$ , la différentielle extérieure  $d\Theta$  peut s'exprimer par

$$d\Theta = \mu \wedge \Theta + \sum_\alpha (-1)^\alpha \left[ \sum_{j,k} \gamma_{\alpha jk} \omega_j \wedge \omega_k \right] \wedge \pi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\pi}_\alpha \wedge \dots \wedge \pi_q . \quad (6.11)$$

La forme  $d\Theta$  apparaît ainsi comme la somme de deux formes définies sur  $E$ , l'une homogène et de degré 1 par rapport aux  $\omega_i$ ,  $q$  par rapport aux  $\pi_\alpha$ , l'autre homogène et de degré 2 par rapport aux  $\omega_i$ ,  $(q - 1)$  par rapport aux  $\pi_\alpha$ . Cherchons à quelles conditions l'une ou l'autre de ces formes est nulle.

Pour que le second terme de  $d\Theta$  soit nul, il faut et il suffit que les  $q$  équations

$$\sum_{j,k} \gamma_{\alpha jk} \omega_j \wedge \omega_k = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q)$$

soient identiquement satisfaites. Or, d'après (6.6), ces équations expriment que les équations

$$d\pi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q)$$

sont des conséquences des équations

$$\pi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q)$$

autrement dit que le champ  $\Pi$  d'éléments de contact est complètement intégrable. Nous énoncerons.

**Théorème 1.** *Pour que la forme  $d\Theta$  soit égale à  $\mu \wedge \Theta$ , il faut et il suffit que le champ  $\Pi$  d'éléments de contact à  $n$  dimensions soit complètement intégrable. Lorsqu'il en est ainsi, il existe des paramètres locaux  $\xi^\beta$  ( $\beta = 1, 2, \dots, q$ ) tels que*

$$\pi_\alpha = a_{\alpha\beta} d\xi^\beta$$

et la métrique (3.2) de la variété  $E$  est réductible localement à la forme

$$ds_E^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j + g_{\alpha\beta}(z) d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (6.12)$$

où

$$ds_B^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (6.13)$$

La forme  $\Theta$  peut alors être représentée à l'aide des paramètres locaux par l'expression

$$\Theta = \sqrt{\Gamma} d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge \dots \wedge d\xi^q \quad (6.14)$$

où  $\Gamma$  désigne le déterminant des  $g_{\alpha\beta}$ .

Il résulte de plus d'une proposition d'Ehresmann<sup>6)</sup> que, dans nos hypothèses la projection  $p$  de  $E$  sur  $B$  définit chacune des variétés intégrales complètes de  $\Pi$  comme revêtement de  $B$ .

---

<sup>6)</sup> Cf. *Ehresmann* [7], proposition 2.

Étudions maintenant à quelles conditions la forme  $\mu$  est nulle. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les quantités

$$\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha j \alpha} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

soient nulles, c'est-à-dire que le vecteur courbure moyenne

$$\vec{C} = \sum_j \left( \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha j \alpha} \right) \vec{e}_j \quad (6.15)$$

des fibres  $F_x$ , considérées comme variétés plongées dans  $E$ , soit nul. Chaque fibre  $F_x$  est alors une variété minima de  $E$  pour la métrique envisagée. Il en est en particulier ainsi lorsque, pour un choix convenable du repère, les  $nq$  quantités  $\gamma_{\alpha j \alpha}$  sont nulles : il existe alors, sur  $F_x$ ,  $q$  lignes asymptotiques deux à deux orthogonales. Nous énoncerons.

**Théorème 2.** *Pour que la forme  $\mu$  soit nulle, il faut et il suffit que les fibres  $F_x$  soient des variétés minima de la variété riemannienne  $E$ . La forme  $d\Theta$  est alors homogène, de degré 2 par rapport aux  $\omega_i$ ,  $(q - 1)$  par rapport aux  $\pi_{\alpha}$ .*

Dans ce cas, nous dirons brièvement que la variété riemannienne  $E$  est à *fibration minima*.

Pour que l'opérateur (5.6) soit identiquement nul, il faut et il suffit manifestement que la forme  $d\Theta$  soit nulle. En réunissant les résultats des théorèmes 1 et 2, nous aboutissons ainsi au théorème.

**Théorème 3.** *Pour que l'opérateur  $X$ , défini par (5.6), soit identiquement nul, il faut et il suffit que la variété riemannienne  $E$  soit à fibration minima, le champ  $\Pi$  associé étant complètement intégrable.*

Lorsqu'il en est ainsi, on a simultanément

$$d\bar{p}^1 - \bar{p}^1 d = 0 \quad ; \quad d^* \bar{p}^1 - \bar{p}^1 d^* = 0 \quad (6.16)$$

et la méthode des formes harmoniques nous permettra de comparer les nombres de Betti des variétés  $B$  et  $E$ .

## II. — La méthode de représentation directe

### 7. — Cas d'un produit topologique

Considérons d'abord un espace fibré différentiable à fibre compacte  $F$  qui soit un *produit topologique*  $B \times F$ . Un point de  $E$  sera désigné par  $(x, \xi)$ ,  $x$  appartenant à  $B$  et  $\xi$  à  $F$ . Désignons par  $\Phi$  une forme de degré  $q$  définie sur  $E$  et représentable en coordonnées locales par la formule

$$\Phi(x, \xi) = A(x, \xi) d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge \dots \wedge d\xi^q \quad (7.1)$$

où  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^q$  désignent les coordonnées locales d'un point  $\xi$  de  $F$ .

La fibre  $F$  étant compacte, cette forme  $\Phi$  nous permet de faire correspondre à toute forme  $\Lambda$  définie sur  $E$ , de degré  $p \leq n$ , une forme  $\Omega$ , de même degré, définie sur  $B$  et telle que si  $C_p$  désigne une  $p$ -chaîne quelconque de  $B$ , la cochaîne

$$\int_{C_p} \Omega = \int_{\bar{p}^1(C_p)} \Lambda \wedge \Phi. \quad (7.2)$$

Nous désignerons par

$$\Omega = \int_{F_x} \Lambda \wedge \Phi \quad (7.3)$$

l'opérateur qui fait passer de la forme  $\Lambda$  à la forme  $\Omega$ . En chaque point  $x$  de  $B$ , la forme  $\Omega$  se trouve définie par une intégration effectuée sur la fibre  $F_x$  issue de ce point.

## 8. — Le cas général

Considérons maintenant un espace fibré différentiable quelconque  $E$ , à fibre compacte  $F$ . On sait <sup>7)</sup> qu'un atlas différentiable de  $E$  sur  $B \times F$  se trouve défini de la manière suivante :

a)  $U$  désignant un ensemble ouvert de  $B$  appartenant au recouvrement introduit au § 1, une carte locale est définie par un homéomorphisme différentiable  $\varphi_U$  de  $\bar{p}^1(U)$  sur  $U \times F$ .

b) Un changement de coordonnées locales est un homéomorphisme différentiable de  $U \times F$  sur lui-même de la forme  $x' = x, \xi' = f(x, \xi)$ , où  $x, x'$  appartiennent à  $U$  et  $\xi, \xi'$  à  $F$ .

Soit  $\Psi$  une forme définie sur  $E$  qui soit partout de rang  $q$ . A cette forme se trouve associé un champ  $\Pi(\Psi)$  d'éléments de contact à  $n$  dimensions défini par le système de Pfaff associé de  $\Psi$ .

Cela posé, supposons qu'il existe une forme  $\Phi$  de degré  $q$ , définie sur  $E$  et qui soit partout de rang  $q$ , le champ  $\Pi(\Phi)$  étant transversal aux fibres et complètement intégrable. La fibre  $F$  étant compacte, cette forme  $\Phi$  nous permet encore de faire correspondre à toute forme  $\Lambda$ , définie sur  $E$ , de degré  $p \leq n$ , une forme  $\Omega$  de même degré définie sur  $B$ , la correspondance étant une extension de la correspondance étudiée au § 7.

---

<sup>7)</sup> Cf. Ehresmann [7].

Le point  $z$  de  $E$  étant représenté dans une carte locale sur  $(x, \xi) \in U \times F$ , la forme  $\Phi$  sera représentée, dans  $U \times F$ , par une forme  $\Phi(x, \xi)$  qui, par un changement de coordonnées locales peut être ramenée à la forme (7.1). Dans les mêmes conditions, la forme  $\Lambda$  définie sur  $E$ , se trouve représentée par une forme que nous noterons  $\Lambda(x, \xi)$ . Sur le produit topologique  $U \times F$ , nous pouvons effectuer l'opération

$$\int_{F_x} \Lambda(x, \xi) \wedge \Phi(x, \xi) .$$

Cette opération définit sur  $U$  une forme  $\Omega^{(U)}$ , cette forme satisfaisant, pour toute  $p$ -chaîne  $C_p$  appartenant à  $U$ , à la relation

$$\int_{C_p} \Omega^{(U)} = \int_{\bar{p}^1(C_p)} \Lambda \wedge \Phi . \quad (8.1)$$

Soient  $U$  et  $V$  deux voisinages appartenant au recouvrement considéré de  $B$ . Sur  $U \cap V$  se trouvent définies les deux formes  $\Omega^{(U)}$  et  $\Omega^{(V)}$ . Or, si  $C_p$  désigne une  $p$ -chaîne quelconque appartenant à  $U \cap V$ , on a

$$\int_{\bar{p}^1(C_p)} \Lambda \wedge \Phi = \int_{C_p} \Omega^{(U)} = \int_{C_p} \Omega^{(V)} .$$

Il en résulte que les deux formes  $\Omega^{(U)}$  et  $\Omega^{(V)}$  coïncident sur  $U \cap V$ .

Sur l'espace de base  $B$ , nous définissons ainsi une forme  $\Omega$  que nous appellerons *l'image* de  $\Lambda$  par la forme  $\Phi$  et que nous représenterons par la notation

$$\Omega = \int_{F_x} \Lambda \wedge \Phi . \quad (8.2)$$

### 9. — La différentielle extérieure d'une forme image

La forme  $\Phi$  considérée peut être représentée en coordonnées locales par la formule (7.1). Il en résulte qu'il existe une forme linéaire  $\lambda$ , définie sur  $E$ , dont la restriction aux fibres est nulle et telle que

$$d\Phi = \lambda \wedge \Phi . \quad (9.1)$$

Cela posé, considérons une forme  $\Lambda$  de degré  $p \leq n$ , définie sur  $E$ , et son image  $\Omega$  par  $\Phi$ . Cherchons à évaluer la différentielle extérieure de  $\Omega$  à l'aide de la formule de Stokes. Désignons par  $C_{p+1}$  une  $\overline{p+1}$ -chaîne arbitraire appartenant à un voisinage  $U$  de  $B$ . Si  $\partial C_{p+1}$  désigne sa frontière, il vient d'après la définition de la forme image :

$$\int_{\partial C_{p+1}} \Omega = \int_{\bar{p}^1(\partial C_{p+1})} \Lambda \wedge \Phi . \quad (9.2)$$

Or  $\bar{p}^1(\partial C_{p+1})$  n'est autre que la frontière de  $\bar{p}^1(C_{p+1})$ . En vertu de la formule de Stokes, on a donc

$$\int_{\partial C_{p+1}} \Omega = \int_{C_{p+1}} d\Omega$$

et

$$\int_{\bar{p}^1(\partial C_{p+1})} \Lambda \wedge \Phi = \int_{\bar{p}^1(C_{p+1})} d(\Lambda \wedge \Phi) .$$

On en déduit en vertu de (9.1) et (9.2) :

$$\int_{C_{p+1}} d\Omega = \int_{\bar{p}^1(C_{p+1})} [d\Lambda + \lambda \wedge \Lambda] \wedge \Phi .$$

Cette égalité ayant lieu quel que soit  $C_{p+1}$  appartenant à  $U$ , il en résulte que

$$d\Omega = \int_{F_x} [d\Lambda + \lambda \wedge \Lambda] \wedge \Phi . \quad (9.3)$$

Nous énoncerons :

**Théorème.** *Si  $\Omega$  est l'image par  $\Phi$  de la forme  $\Lambda$ , sa différentielle extérieure  $d\Omega$  est l'image par  $\Phi$  de la forme*

$$d\Lambda + \lambda \wedge \Lambda$$

où la forme linéaire  $\lambda$  est définie par (9.1).

## 10 — Le théorème de représentation

Conformément à la terminologie habituelle, nous dirons qu'une forme  $\Psi$ , définie sur une variété  $V$ , est *fermée* si sa différentielle extérieure est nulle. Nous dirons qu'elle est *homologue à zéro* ( $\sim 0$ ) si elle est la différentielle extérieure  $dZ$  d'une forme définie sur  $V$ . Sur les formes fermées, de degré déterminé  $p$ , l'addition définit une structure de groupe abélien qui admet pour sous-groupe le groupe de celles des formes qui sont  $\sim 0$ . Leur groupe quotient est le groupe de cohomologie  $H_p(V)$  de la variété  $V$ , l'anneau des coefficients étant l'anneau des réels.

Cela posé, *supposons la forme  $\Phi$  fermée*. Si

$$\Omega = \int_{F_x} \Lambda \wedge \Phi \quad (10.1)$$

il vient alors

$$d\Omega = \int_{F_x} d\Lambda \wedge \Phi . \quad (10.2)$$

De plus, si l'on prend  $\Lambda = 1$ , la formule (10.2) donne

$$d \left[ \int_{F_x} \Phi \right] = 0 .$$

Soit

$$\int_{F_x} \Phi = \text{const.}$$

constante que nous supposons *non nulle* <sup>8)</sup>. Réduisons-la par exemple à l'unité en multipliant  $\Phi$  par une constante. Si  $\Omega$  est une forme quelconque définie sur  $B$ , l'image de  $\bar{p}^1 \Omega$

$$\int_{F_x} \bar{p}^1 \Omega \wedge \Phi$$

n'est alors autre que la forme  $\Omega$  elle-même.

Ainsi, d'après (10.2), les opérateurs de différentiation extérieure et d'image sont permutables. L'image d'une forme fermée sur  $E$  est une forme fermée sur  $B$ ; l'image d'une forme  $\sim 0$  sur  $E$  est une forme  $\sim 0$  sur  $B$ . De plus toute forme  $\Omega$  fermée, définie sur  $B$ , peut être considérée comme l'image d'une forme  $\bar{p}^1 \Omega$  fermée, définie sur  $E$ . — Nous pouvons donc énoncer

**Théorème.** *S'il existe une forme  $\Phi$  fermée, définie sur  $E$ , de degré et rang  $q$ , telle que le champ  $\Pi(\Phi)$  transversal aux fibres soit complètement intégrable et que*

$$\int_{F_x} \Phi \neq 0$$

la formule (10.1) définit une représentation du  $p^e$ -groupe de cohomologie  $H_p(E)$  sur le  $p^e$ -groupe de cohomologie  $H_p(B)$ , [ $p \leq n$ ].

### III. — Applications

#### 11. — La variété riemannienne $E$ est à fibration minima

Donnons-nous, dans l'espace  $E$ , un champ  $\Pi$  d'éléments de contact à  $n$  dimensions transversal aux fibres et deux fois différentiable. Supposons  $E$  doué d'une structure de variété riemannienne fibrée telle que le champ précédent soit associé à la métrique; la forme définie sur  $E$

$$\Theta = * \bar{p}^1 * 1 \tag{11.1}$$

est de degré et rang  $q$  et le champ considéré n'est autre que le champ  $\Pi(\Theta)$  défini par cette forme.

*Supposons le champ  $\Pi$  complètement intégrable et la variété riemannienne  $E$  à fibration minima.*

<sup>8)</sup> En particulier,  $F_x$  n'est pas homologue à zéro sur  $E$ .

En vertu du théorème 3 du paragraphe 6, la forme  $\Theta$  est alors fermée et nous pouvons appliquer notre théorème de représentation en prenant  $\Phi = \Theta$ . L'opérateur

$$\Omega = \int_{F_x} A \wedge \Theta$$

définit ainsi une représentation de  $H_p(E)$  sur  $H_p(B)$ . Nous pouvons donc énoncer :

**Théorème 1.** *Si la variété riemannienne fibrée  $E$  est à fibration minima, le champ  $\Pi$  associé étant complètement intégrable, on a, entre les nombres de Betti  $b_p(E)$  et  $b_p(B)$  de l'espace fibré et de l'espace de base, les inégalités*

$$b_p(B) \leq b_p(E) \quad (p = 0, 1, \dots, n). \quad (11.2)$$

La théorie des formes harmoniques permet de retrouver ce résultat par une voie moins directe, mais assez suggestive. On sait<sup>9)</sup> qu'une forme est dite cofermée ou cohomologue à zéro si son adjointe est fermée ou homologue à zéro. Une forme à la fois fermée et cofermée est dite *harmonique*. Chaque classe d'homologie des formes différentielles fermées, définies sur une variété, contient exactement une forme harmonique.

Cela posé, dans les hypothèses du théorème précédent  $\Theta$  est fermée. Or elle est cofermée puisque son adjointe

$$\bar{p}^1 * 1$$

qui n'est autre que l'image réciproque de l'élément de volume de  $B$ , est toujours fermée. Ainsi les variétés riemanniennes fibrées considérées sont les variétés à forme  $\Theta$  harmonique.

L'opérateur  $X$  étant nul, il résulte des formules (6.16) que toute forme harmonique sur  $B$  a pour image réciproque une forme harmonique sur  $E$ . On retrouve ainsi les inégalités (11.2). On sait de plus que toute forme  $\Omega$ , définie sur  $B$ , peut être décomposée, d'une manière et d'une seule, en une somme d'une forme homologue à zéro, d'une forme cohomologue à zéro et d'une forme harmonique sur  $B$

$$\Omega = d\Omega_1 + d^* \Omega_2 + \Omega_h. \quad (11.3)$$

On en déduit

$$\bar{p}^1 \Omega = d\bar{p}^1 \Omega_1 + d^* \bar{p}^1 \Omega_2 + \bar{p}^1 \Omega_h \quad (11.4)$$

---

<sup>9)</sup> Pour tout ce qui concerne la théorie des formes harmoniques cf. *Hodge* [8] et *G. de Rham* [11] et [12].

ce qui constitue la décomposition canonique de la forme  $\bar{p}^1 \Omega$  définie sur  $E$ . Au théorème 1 correspond ainsi, du point de vue de la théorie des formes harmoniques, le théorème suivant

**Théorème 2.** *Si la variété riemannienne fibrée  $E$  est à forme  $\Theta$  harmonique, toute forme harmonique sur  $B$  a pour image réciproque une forme harmonique sur  $E$ . A la décomposition canonique d'une forme  $\Omega$  définie sur  $B$  correspond, par image réciproque, la décomposition canonique sur  $E$  de  $\bar{p}^1 \Omega$ .*

On notera que si  $\Omega$  est une forme fermée, non  $\sim 0$  sur  $B$ , son image réciproque ne peut être  $\sim 0$  sur  $E$ . Si  $\Omega$  est harmonique sur  $B$ , il en est de même de  $*\Omega$ ; par suite  $\bar{p}^1 * \Omega$ ,  $* \bar{p}^1 * \Omega$  et  $\Theta \wedge \bar{p}^1 \Omega$  sont harmoniques sur  $E$ .

12. — *Cas où le premier groupe de cohomologie relative de  $E$  est nul*

Introduisons la notion de groupe de cohomologie relativement à un champ  $\Pi$  complètement intégrable. Nous dirons qu'une forme  $A$ , définie sur  $E$ , est  $\Pi$ -fermée si sa différentielle extérieure est égale à celle d'une forme s'annulant sur  $\Pi$ . Nous dirons que la forme  $A$  est  $\Pi$ -homologue à zéro si elle diffère de la différentielle extérieure  $dZ$  d'une forme définie sur  $E$  par une forme s'annulant sur  $\Pi$ . Il est clair que toute forme  $\Pi$ -homologue à zéro est aussi  $\Pi$ -fermée. Par suite, sur les formes  $\Pi$ -fermées de degré déterminé  $p$ , l'addition définit une structure de groupe abélien qui admet pour sous-groupe le groupe de celles des formes qui sont  $\Pi$ -homologues à zéro. Leur groupe quotient est le groupe de cohomologie  $H_p(E, \Pi)$  de la variété  $E$ , relativement au champ  $\Pi$ .

Plaçons nous dans les hypothèses suivantes

- a) Il existe un champ  $\Pi$  transversal aux fibres complètement intégrable.
- b) Le premier groupe de cohomologie  $H_1(E, \Pi)$  relative à  $\Pi$  est nul.

Le champ  $\Pi$  étant associé à une métrique  $ds_E^2$ , il résulte du théorème 1 du paragraphe 6 que l'on a

$$d\Theta = \mu \wedge \Theta \tag{12.1}$$

où la forme linéaire  $\mu$  satisfait à la relation

$$d\mu \wedge \Theta = 0 \tag{12.2}$$

qui se déduit immédiatement de (12.1) par différentiation extérieure.

D'après (12.2) la forme  $\mu$  est  $\Pi$ -fermée. Elle est par suite  $\Pi$ -homologue à zéro et il existe une fonction  $f$  définie sur  $E$  telle que

$$\mu \wedge \Theta = df \wedge \Theta .$$

Soit

$$d\Theta = df \wedge \Theta . \quad (12.3)$$

Introduisons la fonction

$$\varphi = \exp. (-f) .$$

Il vient ainsi

$$d(\varphi \Theta) = d\varphi \wedge \Theta + \varphi d\Theta = 0 \quad (12.4)$$

et la forme  $\varphi \Theta$  est une forme fermée, de degré et rang  $q$ , dont le champ associé, transversal aux fibres, est complètement intégrable. Il résulte ainsi du théorème de représentation l'énoncé suivant :

**Théorème.** *Si l'espace fibré  $E$  admet un champ d'éléments de contact à  $n$  dimensions deux fois différentiable, transversal aux fibres, complètement intégrable et si  $H_1(E, \Pi)$  est nul, on a les inégalités*

$$b_p(B) \leq b_p(E) \quad (p = 0, 1, \dots, n) . \quad (12.5)$$

On peut encore remarquer que si l'on substitue à la métrique initiale  $ds_E^2$  de l'espace  $E$  la métrique

$$\bar{ds}_E^2 = ds_B^2 + \varphi^{2/q} (ds_E^2 - ds_B^2) \quad (12.6)$$

à la forme  $\Theta$  se trouve substituée la forme fermée

$$\bar{\Theta} = \varphi \Theta ,$$

qui est harmonique pour la nouvelle métrique. Ainsi, avec la métrique (12.6), la variété riemannienne fibrée  $E$  est à forme  $\Theta$  harmonique et les résultats du théorème 2 du paragraphe 11 lui sont applicables.

### 13. — Cas où les fibres sont des sphères

Nous supposons dans ce paragraphe que la fibre type de  $E$  est une sphère  $S_q$  et que les sphères fibres peuvent être orientées continûment. Il résulte d'une proposition de Leray<sup>10)</sup> que dans ce cas les nombres de Betti de  $E$  sont inférieurs ou égaux à ceux du produit topologique  $B \times F$ .

---

<sup>10)</sup> Cf. Leray [9].

Nous allons établir la proposition suivante :

**Théorème.** *Si la variété riemannienne fibrée  $E$  admet pour fibre une sphère  $S_q$  ( $q \geq n - 1$ ) orientée continûment et si elle est à forme  $\Theta$  harmonique, les nombres de Betti de  $E$  sont ceux du produit topologique  $B \times S_q$ .*

En effet désignons par

$$t^n + b_1(B) t^{n-1} + \dots + b_p(B) t^{n-p} + \dots + b_{n-1}(B) t + 1$$

et par

$$t^q + 1$$

les polynômes de Poincaré de  $B$  et  $S_q$ . En effectuant leur produit, on obtient, d'après la proposition de Leray, un polynôme qui majore le polynôme de Poincaré de  $E$ . Il en résulte les inégalités :

a) pour  $q > n$

$$\left. \begin{array}{ll} b_p(E) \leq b_p(B) & (p = 0, 1, \dots, n) \\ b_p(E) = 0 & (p = n + 1, \dots, q - 1) \\ b_p(E) \leq b_{p-q}(B) & (p = q, \dots, n + q) \end{array} \right\} \quad (13.1)$$

b) pour  $q = n, \overline{n-1}$

$$\left. \begin{array}{ll} b_p(E) \leq b_p(B) & (p = 0, 1, \dots, q - 1) \\ b_p(E) \leq 1 + b_q(B) & (p = q, n) \\ b_p(E) \leq b_{p-q}(B) & (p = n + 1, \dots, n + q) \end{array} \right\} \quad (13.2)$$

Or la forme  $\Theta$  étant harmonique, on a, d'après les résultats du paragraphe 11, les inégalités

$$b_p(B) \leq b_p(E) \quad (p = 0, 1, \dots, n) . \quad (13.3)$$

Dans le cas (a), les inégalités (13.3), jointes au théorème de dualité, entraînent l'égalité dans (13.1). Dans le cas (b), on notera que,  $\Theta$  étant harmonique, il existe une forme de degré  $q$  harmonique sur  $E$  qui n'est pas l'image réciproque d'une forme harmonique sur  $B$ . Il en résulte que l'égalité est nécessairement réalisée dans (13.2) et le théorème est démontré.

#### 14. — Les espaces fibrés $\mathfrak{F}^{(r)}$ associés à une variété riemannienne

Désignons par  $B$  une variété riemannienne satisfaisant aux hypothèses des paragraphes 2 et 3.

La théorie des variétés riemanniennes conduit naturellement <sup>11)</sup> à associer à  $B$  des espaces fibrés  $\mathfrak{F}^{(r)}$  admettant  $B$  pour espace de base et définis de la manière suivante :

Soit  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$  un repère de  $B$  c'est-à-dire un système de  $n$  vecteurs unitaires d'origine  $x \in B$ , deux à deux orthogonaux, tangents à  $B$ . Etant donné un entier  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ), considérons la classe de tous les repères pour lesquels le point  $x$  et les  $r$  vecteurs  $l_1, l_2, \dots, l_r$  sont identiques. Ces classes de repères définissent sur  $B$ , avec la topologie naturelle, un espace fibré, que nous désignerons par  $\mathfrak{F}^{(r)}$ . Ainsi l'espace  $\mathfrak{F}^{(r)}$  est l'espace fibré de tous les ensembles ordonnés de  $r$  vecteurs unitaires de  $B$ , deux à deux orthogonaux. Sa fibre admet pour dimension

$$q = \frac{n(n-1) - (n-r)(n-r-1)}{2} .$$

On notera que  $\mathfrak{F}^{(1)}$  n'est autre que l'espace fibré des vecteurs unitaires tangents à  $B$  et  $\mathfrak{F}^{(n)}$  l'espace fibré fondamental de  $B$ , c'est-à-dire l'espace fibré défini par tous les repères de  $B$ .

Nous ferons dans ce paragraphe, les conventions suivantes relatives aux indices

$$i, j, k, l = 1, 2, \dots, n ; \quad A, B = 1, 2, \dots, r ; \quad I, J = r + 1, \dots, n .$$

Ecrivons pour  $B$  les formules fondamentales de la géométrie riemannienne : les formules de Frenet :

$$d\vec{x} = \sum_i \omega_i \vec{l}_i \tag{14.1}$$

$$d\vec{l}_i = \sum_j \omega_{ij} \vec{l}_j \quad (\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0) \tag{14.2}$$

relatives au repère  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$  introduisent, sur  $\mathfrak{F}^{(n)}$ ,  $n(n+1)/2$  formes de Pfaff satisfaisant aux équations de structure

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \tag{14.3}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \quad (\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0) \tag{14.4}$$

où les formes

$$\Omega_{ij} = \sum_{(k,l)} R_{ij kl} \omega_k \wedge \omega_l \tag{14.5}$$

sont les formes de courbure.

---

<sup>11)</sup> Cf. par exemple l'excellent exposé de Chern [3], p. 20—24.

Cela posé, donnons-nous un espace  $\mathfrak{F}^{(r)}$  et considérons les formes  $\omega_{Ai}$ . En un point de  $\mathfrak{F}^{(r)}$ , par une substitution orthogonale conservant  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_r)$ , ces formes se transforment selon les formules

$$\omega_{AB} = \omega_{A'B'} \quad ; \quad \omega_{AI} = \sum_{J'} A_I^{J'} \omega_{A'J'}$$

où les  $A_I^{J'}$  sont les coefficients de la substitution orthogonale. Il en résulte que la forme quadratique

$$ds_{\mathfrak{F}^{(r)}}^2 = \sum_i (\omega_i)^2 + \sum_{(A,i)} (\omega_{Ai})^2 \quad (14.6)$$

définit sur  $\mathfrak{F}^{(r)}$  une métrique riemannienne adaptée à sa structure d'espace fibré. Les  $q$  formes  $\omega_{Ai}$  jouent ici le rôle des  $\pi_\alpha$  de la théorie générale. Or d'après (14.4), il vient

$$d\omega_{Ai} = \sum_k \omega_{Ak} \wedge \omega_{ki} + \Omega_{Ai} \quad (14.7)$$

et le second membre de (14.7) ne contient aucun terme en  $\omega_{Ai}$ . On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Tout espace  $\mathfrak{F}^{(r)}$  associé à une variété riemannienne, peut être doué d'une structure de variété, riemannienne fibrée telle que les fibres soient des variétés minima plongées dans  $\mathfrak{F}^{(r)}$ .*

La forme

$$\Theta = \prod_{(A,i)} \omega_{Ai}$$

admet pour différentielle extérieure

$$d\Theta = \sum_{A,i} \varepsilon_{Ai} \Omega_{Ai} \prod_{(B,j) \neq (A,i)} \omega_{Bj}$$

où l'indicateur  $\varepsilon_{Ai}$  a la valeur  $\pm 1$ . La forme  $\Theta$  est harmonique si

$$\Omega_{Ai} = 0$$

c'est-à-dire si

$$R_{Ai,kl} = 0 .$$

Il en résulte l'énoncé suivant :

**Théorème 2.** *Tout espace  $\mathfrak{F}^{(r)}$ , associé à une variété localement euclidienne, peut être doué d'une structure de variété riemannienne fibrée à forme  $\Theta$  harmonique.*

Dans le cas où  $r = 1$ , la fibre est constituée par une sphère  $S_{n-1}$  que l'on peut orienter continûment et le théorème du paragraphe 13 s'applique. Il résulte ainsi du théorème 2.

**Théorème 3.** *L'espace des vecteurs unitaires tangents à une variété localement euclidienne  $B$  (compacte, orientable), à  $n$  dimensions, admet pour nombres de Betti ceux du produit topologique  $B \times S_{n-1}$ .*

Au lieu d'introduire sur  $B$  la connexion riemannienne associée à la métrique  $ds_B^2$ , on peut considérer  $B$  comme un espace admettant une connexion euclidienne avec torsion compatible avec la métrique de  $B$ . Les formules fondamentales (14.1), (14.2) et (14.4) ne sont pas modifiées et, au second membre de (14.3) seulement, apparaissent les formes de torsions  $\Omega_i$  qui ne peuvent jouer aucun rôle dans notre théorie. Il en résulte que les théorèmes 2 et 3 sont encore valables si  $B$ , au lieu d'être localement euclidien, est un espace à connexion euclidienne à „parallélisme absolu“, c'est-à-dire sans courbure. Des résultats analogues sont encore valables si  $B$  est une variété hermétique<sup>12)</sup> sans courbure mais pouvant avoir une torsion (non Kählerienne).

#### IV. — Quelques théorèmes de géométrie finslérienne globale

##### 15. — L'espace fibré $\mathfrak{F}^{(1)}$ associé à une variété finslérienne

Désignons par  $V$  une variété finslérienne à  $n$  dimensions compacte, de classe  $C^s$  ( $s \geq 3$ ). Si  $x$  désigne un point de  $V$ , la métrique de  $V$  s'exprime par rapport aux coordonnées locales  $(x^i)$  de  $x$  par la formule

$$ds^2 = L^2(x^i, dx^i), \quad (15.1)$$

où  $L$  est une fonction positivement homogène et du premier degré des variables  $dx^i$ .

Nous conviendrons d'appeler *repère associé à un point  $x$  de  $V$*  un système de  $n$  vecteurs unitaires dans (15.1), tangents en  $x$  à  $V$  et deux à deux orthogonaux, le système étant muni d'une certaine orientation. On définira comme pour une variété riemannienne les espaces fibrés  $\mathfrak{F}^{(r)}$  admettant  $V$  pour espace de base. Nous nous intéressons particulièrement ici à l'espace  $\mathfrak{F}^{(1)}$ , à  $(2n - 1)$  dimensions, des vecteurs unitaires tangents à  $V$ .

Soit  $\vec{l}$  un vecteur unitaire tangent en  $x$  à  $V$ . Convenons d'attacher à tout élément linéaire  $(x, \vec{l})$  de  $V$  un repère  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ ; les compo-

<sup>12)</sup> Cf. par exemple Chern [2], p. 109—113.

santes de  $\vec{l}$  par rapport à ce repère seront désignées par  $l_i$ ; le vecteur  $\vec{l}$  étant unitaire, ses composantes satisfont à la relation

$$\sum_i (l_i)^2 = 1 . \quad (15.2)$$

Si l'on désigne par  $\theta_i$  les composantes du vecteur  $d\vec{l}$  par rapport au repère considéré, il vient

$$d\vec{l} = \sum_i \theta_i \vec{l}_i \quad (15.3)$$

et les formes de Pfaff  $\theta_i$  satisfont à la condition

$$\sum_i l_i \theta_i = 0 . \quad (15.4)$$

### 16. — Les formules fondamentales de la géométrie finslérienne

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons les notations classiques d'E. Cartan pour la géométrie finslérienne. Nous ferons essentiellement usage de la méthode du repère mobile et nous sommes ainsi amenés à traduire les formules données par E. Cartan, qui sont généralement écrites à l'aide des coordonnées locales et non à l'aide des composantes relatives au repère mobile.

Les formules de Frenet

$$d\vec{x} = \sum_i \omega_i \vec{l}_i \quad (16.1)$$

$$d\vec{l}_i = \sum_j^i \omega_{ij} \vec{l}_j \quad (\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0) \quad (16.2)$$

relatives au repère  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$  introduisent  $n$  formes de Pfaff  $\omega_i$  et  $n(n-1)/2$  formes  $\omega_{ij}$ . Celles-ci appartiennent au dual de l'espace vectoriel tangent à  $\mathfrak{F}^{(1)}$  et peuvent par suite être exprimées par des combinaisons linéaires des formes  $\omega_i$  et  $\theta_i$ . De plus d'après (15.3) et (16.2)

les composantes  $\theta_i$  du vecteur  $d\vec{l}$  dépendent des variations  $dl_i$  des composantes de  $\vec{l}$  et de la rotation infinitésimale du repère selon les formules

$$\theta_i = dl_i + \sum_j l_j \omega_{ji} . \quad (16.3)$$

Les composantes  $\omega_i$  et  $\omega_{ij}$  du déplacement infinitésimal du repère satisfont aux équations de structure

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} + \Omega_i \quad (16.4)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \quad (\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0) . \quad (16.5)$$

Les formes quadratiques  $\Omega_i$  et  $\Omega_{ij}$  définissent respectivement la torsion finslérienne et la courbure finslérienne de  $V$ . Par les formules

$$\Omega_i = \sum_{j,k} A_{ijk} \omega_j \wedge \theta_k \quad (16.6)$$

$$\Omega_{ij} = \sum_{k,l} S_{ij,kl} \theta_k \wedge \theta_l + \sum_{k,l} P_{ij,kl} \omega_k \wedge \theta_l + \sum_{k,l} R_{ij,kl} \omega_k \wedge \omega_l \quad (16.7)$$

elles permettent de définir quatre tenseurs, un de torsion et trois de courbure. D'après (15.4), le tenseur de torsion  $A_{ijk}$  et les deux tenseurs de courbure  $S_{ij,kl}$  et  $P_{ij,kl}$  sont astreints aux conditions

$$A_{ij0} \equiv \sum_k l_k A_{ijk} = 0 \quad (16.8)$$

$$S_{ij,\kappa 0} \equiv \sum_l l_l S_{ij,kl} = 0 ; \quad P_{ij,\kappa 0} \equiv \sum_l l_l P_{ij,kl} = 0 . \quad (16.9)$$

*Nous dirons que la variété  $V$  est une variété de Berwald si le tenseur  $S_{ij,kl}$  est identiquement nul.*

Cette propriété est équivalente à la suivante : on peut faire, sur l'espace euclidien, la carte des éléments linéaires issus d'un point de manière que l'angle de deux éléments linéaires infiniment voisins soit conservé ; la métrique angulaire de  $V$  est, comme dans l'espace euclidien, de courbure constante égale à 1.

En prenant la différentielle extérieure des deux membres des équations (16.4) et (16.5), on obtient les identités qui généralisent, en géométrie finslérienne, les identités de Bianchi. Il vient ainsi

$$d\Omega_i = \sum_k (\Omega_k \wedge \omega_{ik} - \Omega_{ik} \wedge \omega_k) , \quad (16.10)$$

$$d\Omega_{ij} = \sum_k (\Omega_{ik} \wedge \omega_{jk} - \Omega_{jk} \wedge \omega_{ik}) . \quad (16.11)$$

### 17. — Changement de repère

Nous avons convenu d'attacher à chaque élément linéaire  $(x, \vec{l})$  de  $V$  un repère  $(x, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n)$ . Le choix du repère ainsi associé à  $(x, \vec{l})$  est arbitraire sous les conditions de continuité et de différentiabilité. Ce choix étant fait, on peut effectuer la transformation :

$$\vec{l}'_i = \sum_j A_{ij} \vec{l}_j \quad (17.1)$$

où les  $A_{ij}$  sont les éléments d'une matrice orthogonale propre d'ordre  $n$ . Les  $A_{ij}$  sont, bien entendu, des fonctions différentiables jusqu'à un ordre suffisant des coordonnées locales de  $\mathfrak{F}^{(1)}$ . Les différents éléments introduits se transforment alors selon les lois classiques. On a ainsi notamment

$$l'_i = \sum_j A_{ij} l_j ; \quad \theta'_i = \sum_j A_{ij} \theta_j ;$$

$$\Omega'_{ij} = \sum_{k,l} A_{ik} A_{jl} \Omega_{kl} .$$

Il est souvent commode d'adopter pour repère attaché à  $(x, \vec{l})$  un repère tel que le vecteur  $\vec{l}_n$  coïncide avec le vecteur  $\vec{l}$  considéré. Si nous convenons que, dans la suite, un indice grec n'est susceptible que des valeurs  $1, 2, \dots, \overline{n-1}$ , on a pour ce choix particulier du repère mobile

$$l_\alpha = 0, \quad l_n = 1 ; \quad \theta_\alpha = \omega_{n\alpha}, \quad \theta_n = 0 . \quad (17.2)$$

#### 18. — Les différentielles extérieures des formes $\theta_i$ .

Il est facile à l'aide des formules (16.3) et (16.5) d'évaluer les différentielles extérieures des formes  $\theta_i$  qui jouent un rôle important dans la suite. De (16.3) on déduit par différentiation extérieure

$$d\theta_i = \sum_j \theta_j \wedge \omega_{ji} + \sum_j l_j (d\omega_{ji} - \sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_{ki})$$

soit en vertu de (16.5)

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j + \Omega_{oi} \quad (18.1)$$

où l'indice 0 désigne, selon la convention classique, la multiplication contractée par le vecteur  $\vec{l}$ . En explicitant  $\Omega_{oi}$  dans (18.1) et tenant compte de (16.9), il vient

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j + \sum_{k,l} P_{oi,kl} \omega_k \wedge \theta_l + \sum_{k,l} R_{oi,kl} \omega_k \wedge \omega_l . \quad (18.2)$$

Il résulte des équations (18.2) que pour que le système

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$$

soit complètement intégrable, il faut et il suffit que le tenseur  $R_{oi,kl}$  soit identiquement nul.

19. — La forme  $\Phi_0$ .

Considérons la forme définie sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  et représentée localement, par rapport aux repères considérés par l'expression

$$\Phi_0 = \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \theta_{i_1} \wedge \theta_{i_2} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{n-1}} l_{i_n} \quad (19.1)$$

où  $i_1, i_2, \dots, i_n$  est une permutation quelconque de la suite  $1, 2, \dots, n$  et où  $\varepsilon$  est l'indicateur de cette permutation. Par un changement de repère, le second membre de (19.1) se trouve multiplié par le déterminant  $|A_{ij}|$  qui est égal à  $+1$ . Par suite la forme  $\Phi_0$  est bien une forme intrinsèquement définie par (19.1) sur l'espace fibré  $\mathfrak{F}^{(1)}$ .

Cherchons à évaluer la différentielle extérieure de  $\Phi_0$ . Pour abrégier les calculs, choisissons des repères tels que le vecteur  $\vec{l}_n$  coïncide avec  $\vec{l}$ . Avec un tel choix des repères,  $\Phi_0$  se réduit à

$$\Phi_0 = (n-1)! \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_{n-1} \quad (19.2)$$

et il vient

$$d\Phi_0 = (n-1)! \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} d\theta_{\alpha} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}_{\alpha} \wedge \dots \wedge \theta_{n-1} .$$

Substituons à  $d\theta_{\alpha}$  sa valeur tirée de (18.2). Il vient l'expression commode

$$\begin{aligned} d\Phi_0 = & \left[ \sum_k \left( \sum_{\alpha} P_{0\alpha, k\alpha} \right) \omega_k \right] \wedge \Phi_0 + \\ & + \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left[ \sum_{k,l} R_{0\alpha, kl} \omega_k \wedge \omega_l \right] \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}_{\alpha} \wedge \dots \wedge \theta_{n-1} . \end{aligned} \quad (19.3)$$

Il est d'ailleurs facile de trouver une expression de  $d\Phi_0$  valable quels que soient les repères utilisés. On a en effet d'après (18.1)

$$d\Phi_0 = (n-1)! \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} \Omega_{0\alpha} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}_{\alpha} \wedge \dots \wedge \theta_{n-1} ,$$

soit

$$d\Phi_0 = (n-1) \sum \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \Omega_{n\alpha_1} \wedge \theta_{\alpha_2} \wedge \theta_{\alpha_3} \wedge \dots \wedge \theta_{\alpha_{n-1}} .$$

On en déduit pour  $d\Phi_0$  l'expression indépendante des repères choisis

$$d\Phi_0 = \frac{n-1}{2} \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \Omega_{i_n i_1} \wedge \theta_{i_2} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{n-1}} . \quad (19.4)$$

De (19.3), il résulte que pour que la forme  $\Phi_0$  soit fermée, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites.

$$R_{0i, ki} = 0 , \quad (19.5)$$

$$\sum_l P_{0l, kl} = 0 . \quad (19.6)$$

La condition (19.6) est d'ailleurs équivalente à

$$A_{k|0} = 0 \quad (19.7)$$

où  $A_{k|i}$  désigne la dérivée covariante du vecteur  $A_k$  déduit par contraction du tenseur  $A_{ijk}$  de torsion.

20. — *Les variétés finslériennes à forme  $\Phi_0$  fermée.*

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

**Théorème.** *Si une variété finslérienne  $V$  à  $n$  dimensions est telle que les deux tenseurs  $R_{0i,kl}$ , et  $A_{k|0}$  soient nuls*

1° *Les nombres de Betti de l'espace  $\mathfrak{F}^{(1)}$  des vecteurs unitaires tangents à  $V$  sont égaux à ceux du produit topologique  $V \times S_{n-1}$ .*

2° *La caractéristique d'Euler-Poincaré de  $V$  est nulle.*

1° Sous nos hypothèses, la forme  $\Phi_0$ , de degré et rang  $(n - 1)$  d'après (19.2), est fermée. Le tenseur  $R_{0i,kl}$  étant nul, le système  $\theta_i = 0$  est complètement intégrable. Si l'on adopte des repères tels que le vecteur  $\vec{l}_n$  coïncide avec  $\vec{l}$ , on peut douer l'espace  $\mathfrak{F}^{(1)}$  de la métrique riemannienne définie localement par

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i)^2 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} (\theta_\alpha)^2 \quad (20.1)$$

$\mathfrak{z}$  désignant un point de  $\mathfrak{F}^{(1)}$  il existe sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  des paramètres locaux  $x^i, \xi^\alpha$  tels que la métrique (20.1) puisse localement se mettre sous la forme

$$ds^2 = g_{ij}(\mathfrak{z}) dx^i dx^j + g_{\alpha\beta}(\mathfrak{z}) d\xi^\alpha d\xi^\beta . \quad (20.2)$$

Pour cette métrique, la forme  $\Phi_0$  ne diffère que par un facteur constant de l'élément de volume de la fibre et l'intégrale de  $\Phi_0$  étendue à la fibre ne peut être nulle. En particulier  $\Phi_0$  n'est pas homologue à zéro sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$ .

Le champ  $\Pi(\Phi_0)$  associé à la forme  $\Phi_0$  étant transversal aux fibres et complètement intégrable, la forme  $\Phi_0$  satisfait aux hypothèses du théorème de représentation. Il résulte donc de ce théorème, les inégalités

$$b_p(V) \leq b_p(\mathfrak{F}^{(1)}) \quad (p = 0, 1, \dots, n) .$$

D'autre part les fibres étant des sphères que l'on peut orienter continûment, l'inégalité de Leray s'applique. Enfin la forme  $\Phi_0$  qui n'est pas  $\sim 0$  sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  a elle-même pour image, dans la représentation, une forme identiquement nulle. La première partie du théorème est donc établie.

2° Etant donné un point  $x_0$  de  $V$ , donnons-nous au voisinage de  $x_0$  un champ continu de vecteurs unitaires  $\vec{l}$  qui est éventuellement singulier en  $x_0$ . Désignons par  $S$  l'hypersurface géodésique tracée dans  $V$ , de centre  $x_0$  et de rayon  $s$  arbitrairement petit. En chaque point de  $S$ , le champ considéré définit un vecteur  $\vec{l}$ ; par suite à  $S$  correspond dans  $\mathfrak{F}^{(1)}$  une variété image  $\Sigma$  à  $(n - 1)$  dimensions. D'après la formule de Kronecker, l'indice  $I$  du champ en  $x_0$  a pour expression, avec une orientation convenable de  $\Sigma$

$$I = \frac{1}{A_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{\Phi_0}{(n-1)!}$$

où  $A_{n-1}$  représente l'aire de l'hypersphère euclidienne de rayon 1 et de dimension  $(n - 1)$ , soit

$$A_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} . \quad (20.3)$$

On en déduit

$$I = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!} \int_{\Sigma} \Phi_0 . \quad (20.4)$$

Cela posé, la variété  $V$  étant compacte, on peut définir sur  $V$  un champ continu de vecteurs n'admettant qu'un nombre fini de points singuliers  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Entourons chacun de ces points singuliers par une hypersphère géodésique de rayon  $s$  arbitrairement petit. Le champ de vecteurs aux points de  $V$  non contenus à l'intérieur de ces hypersphères géodésiques définit dans  $\mathfrak{F}^{(1)}$  une chaîne  $C_n$  de bord  $\partial C_n$ . De (20.4) on déduit

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!} \int_{\partial C_n} \Phi_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_m$$

où  $I_1, I_2, \dots, I_m$  sont les indices du champ aux points  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Comme il est bien connu, la somme de ces indices est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(V)$  de la variété  $V$ . Il en résulte

$$\chi(V) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-1)!} \int_{\partial C_n} \Phi_0 . \quad (20.5)$$

Or, si la forme  $\Phi_0$  est fermée, la formule de Stokes donne

$$\int_{\partial C_n} \Phi_0 = \int_{C_n} d\Phi_0 = 0 ,$$

ce qui démontre notre théorème.

A la connaissance de l'auteur, ce théorème est nouveau même dans le cas très particulier des espaces de Minkowski (espaces pour lesquels les deux tenseurs  $R_{ij,kl}$  et  $A_{ijk|l}$  sont nuls). Il en résulte en particulier *qu'il ne peut exister de métrique de Minkowski partout régulière sur une sphère de dimension paire*, ce qui constitue la généralisation d'un résultat classique sur les métriques localement euclidiennes.

## 21. — La forme $\Omega$ de courbure totale

La seconde partie du théorème précédent rappelle la généralisation donnée par Chern<sup>13)</sup>, en géométrie riemannienne de la formule classique de Gauss-Bonnet. Nous nous proposons de montrer qu'une telle généralisation peut aussi être obtenue en géométrie des variétés de Berwald.

Soit  $V$  une variété finslérienne satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 15 et de dimension  $n = 2k$  paire. Considérons la forme de degré  $n$  définie sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  par l'expression

$$\Omega = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_3 i_4} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k-1} i_{2k}} , \quad (21.1)$$

ainsi que les formes de degré  $(n-1)$  définies par

$$\Phi_p = \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2p-2} i_{2p-1} i_{2p}} \wedge \theta_{i_{2p+1}} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-1}} l_{i_{2k}} \quad (21.2)$$

où l'entier  $p$  peut prendre les valeurs

$$p = 0, 1, \dots, (k-1) . \quad (21.3)$$

Un changement de repère laisse invariants les seconds membres de (21.1) et (21.2); par suite (21.1) et (21.2) définissent bien sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  des formes  $\Omega$  et  $\Phi_p$ . Au sujet de ces formes, nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

<sup>13)</sup> Cf. Chern [1].

**Théorème.** *La forme  $\Omega$  est la différentielle extérieure d'une combinaison linéaire, à coefficients constants des formes  $\Phi_p$ .*

Considérons en effet les formes  $\Psi_p$  définies sur  $\mathfrak{F}^{(1)}$  par la formule

$$\Psi_p = \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2p-1} i_{2p}} \wedge \Omega_{i_{2p+1} i_{2k}} \wedge \theta_{i_{2p+2}} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-1}}$$

où l'entier  $p$  peut prendre les valeurs (21.3). Par différentiation extérieure de (21.2), un calcul, qui ne diffère pas essentiellement de celui de Chern <sup>14)</sup>, conduit à la formule

$$d\Phi_p = -\Psi_{p-1} - \frac{n-2p+1}{2(p+1)} \Psi_p \quad (p = 1, 2, \dots, k-1). \quad (21.4)$$

D'après (19.4), cette formule est encore valable pour  $p = 0$  à condition de prendre

$$\Psi_{-1} = 0.$$

Cela posé, en résolvant la récurrence (21.4) par rapport aux  $\Psi_p$ , il vient

$$\Psi_p = dT_p \quad (p = 0, 1, \dots, k-1)$$

où l'on a

$$T_p = - \sum_{m=0}^{m=p} (-1)^{p-m} \frac{(2m+2) \dots (2p+2)}{(2k-2m-1) \dots (2k-2p-1)} \Phi_m.$$

En appliquant ce résultat pour  $p = k-1$  et en remarquant que

$$\Omega = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \Psi_{k-1}.$$

On voit que

$$\Omega = d\bar{\Omega} \quad (21.5)$$

où l'on a posé

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{\pi^k} \sum_{m=0}^{m=k-1} (-1)^m \frac{1}{1.3 \dots (2k-2m-1) 2^{k+m} m!} \Phi_m, \quad (21.6)$$

ce qui démontre le théorème.

22. — *Les formules de Chern et d'Allendoerfer-Weil pour une variété de Berwald.*

Supposons désormais que la variété  $V$  soit une variété de Berwald

$$S_{ij,kl} = 0 \quad (22.1)$$

---

<sup>14)</sup> Cf. Chern [1], p. 675—676.

et reprenons le calcul de l'indice d'un champ continu de vecteurs unitaires  $\vec{l}$  au point éventuellement singulier  $x_0$ . Adoptons pour coordonnées locales dans  $V$  un système de coordonnées normales d'origine  $x_0$ , soit

$$x^i = s \mu^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les  $\mu^i$  sont les cosinus directeurs de la tangente à la géodésique considérée issue de  $x_0$ . Sur l'hypersphère géodésique  $S$  de centre  $x_0$  de rayon  $s$ , on a

$$dx^i = s d\mu^i .$$

Pour  $p \geq 1$ , les formes  $\Phi_p$  sont des sommes de termes contenant en facteur une forme  $\Omega_{ij}$ , au moins et par suite, dans l'hypothèse (22.1), sont des sommes de termes contenant un facteur  $dx^i$  au moins. On en déduit que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \Phi_p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, k - 1) \quad (22.2)$$

où les notations sont identiques à celles de la seconde partie du paragraphe 20. D'autre part, d'après (20.4)

$$I = \frac{(k - 1)!}{2\pi^k (2k - 1)!} \int_{\Sigma} \Phi_0 . \quad (22.3)$$

Des formules (21.6), (22.2) et (22.3), on déduit

$$I = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \overline{\Omega} . \quad (22.4)$$

Considérons sur  $V$ , comme dans la seconde partie du paragraphe 20, un champ continu de vecteurs admettant un nombre fini de points singuliers et entourons chacun de ces points d'une hypersphère géodésique de rayon  $s$ , arbitrairement petit. Nous définissons ainsi dans  $\mathfrak{F}^{(1)}$  une chaîne  $C_n$  de bord  $\partial C_n$ . En raisonnant comme au paragraphe 20, on voit que

$$\chi(V) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\partial C_n} \overline{\Omega}$$

soit en transformant le second membre par la formule de Stokes

$$\chi(V) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{C_n} \Omega , \quad (22.5)$$

Le second membre étant indépendant du champ de vecteurs choisi, nous pouvons poser par définition

$$\int_V \Omega = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{C_n} \Omega \quad (22.6)$$

et nous énoncerons

**Théorème.** *Pour toute variété de Berwald  $V$ , la caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée par la formule de Chern*

$$\chi(V) = \int_V \Omega .$$

Ce résultat est en particulier valable *pour tout espace de Finsler à deux dimensions*. Nous retrouvons ainsi un résultat signalé dans ce cas par E. Cartan.

On établit par un raisonnement analogue la généralisation de la formule d'Allendoerfer-Weil pour un polyèdre différentiable. Soit  $P_n$  un polyèdre différentiable dont le bord  $\partial P_n$  est une variété différentiable à  $(n - 1)$  dimensions, orientable, plongée dans  $V$ . A chaque point de  $\partial P_n$  attachons le vecteur unitaire normal à  $\partial P_n$  et orienté vers l'intérieur. L'ensemble de ces vecteurs définit dans  $\mathfrak{F}^{(1)}$  une variété à  $(n - 1)$  dimensions; l'intégrale de  $\bar{\Omega}$  sur cette variété sera représentée par le symbole

$$\int_{\partial P_n} \bar{\Omega} .$$

Le champ des vecteurs unitaires normaux à  $\partial P_n$  peut être prolongé en un champ continu sur tout le polyèdre  $P_n$ , sauf peut-être en un nombre fini de points singuliers. Si nous isolons encore ces points singuliers par de petites hypersphères de rayon  $s$  et désignons par  $\Gamma_n$  la chaîne définie dans  $\mathfrak{F}^{(1)}$  par l'ensemble des vecteurs du champ aux points de  $P_n$  non contenus à l'intérieur des hypersphères, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_n} \Omega = \int_{\partial P_n} \bar{\Omega} + \chi'(P_n) \quad (22.7)$$

$\chi'(P_n)$  désignant la caractéristique intérieure de  $P_n$ . Le premier membre de (22.7) est indépendant de la manière dont on a prolongé le champ des vecteurs unitaires normaux à  $\partial P_n$  et nous pouvons poser par définition

$$\int_{P_n} \Omega = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_n} \Omega . \quad (22.8)$$

On aboutit ainsi à une généralisation de la formule d'Allendoerfer-Weil à une variété de Berwald

$$\int_{P_n} \Omega = \int_{\partial P_n} (\bar{\Omega} + \chi'(P_n)) . \quad (22.9)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *S. Chern*, On the curvatura integra in a riemannian manifold, *Ann. of Math.* t. 46, pp. 674—684 (1945).
- [2] *S. Chern*, Characteristic classes of hermitian manifolds, *Ann. of Math.* t. 47, pp. 85—121 (1946).
- [3] *S. Chern*, Some new viewpoints in differential geometry in the large, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, pp. 1—30 (1946).
- [4] *C. Ehresmann*, Espaces fibrés associés, *C. R. Acad. Sc.* t. 213, pp. 762—764 (1941).
- [5] *C. Ehresmann*, Sur les espaces fibrés associées à une variété différentiable, *C. R. Acad. Sc.* t. 216, pp. 628—630 (1943).
- [6] *C. Ehresmann*, Exposé du colloque de topologie algébrique, Paris 1947.
- [7] *C. Ehresmann*, Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R. Acad. Sc.* t. 224, pp. 1611—1612 (1947).
- [8] *W. V. D. Hodge*, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge university press (1941).
- [9] *J. Leray*, Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base, *C. R. Acad. Sc.* t. 223, pp. 395—397 (1946).
- [10] *G. de Rham*, Sur l'Analysis situs des variétés à  $n$  dimensions, *Journ. Math. p. et appl.* t. 96, pp. 115—200 (1931).
- [11] *G. de Rham* (en collaboration avec P. Bidal), Les formes différentielles harmoniques, *Comm. Math. Helv.* t. 19, pp. 1—49 (1946).
- [12] *G. de Rham*, Sur la théorie des formes différentielles harmoniques, *Ann. Univ. Grenoble* t. 22, pp. 135—152 (1946).

(Reçu le 20 mai 1948.)