

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Homogene Räume mit invarianter Metrik.
Autor: Nef, Walter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19199>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Homogene Räume mit invarianter Metrik

Von WALTER NEF, Fribourg

Einleitung

Die Transformationsgruppe T , welche aus allen analytischen Abbildungen des Einheitskreises auf sich selber besteht, besitzt eine invariante Metrik ; d. h. eine Metrik mit der Eigenschaft, daß die Länge irgend-einer im Einheitskreis gelegenen Kurve gegenüber allen Abbildungen von T invariant ist. Es ist dies die hyperbolische Metrik, deren geodätische Linien die zum Einheitskreis orthogonalen Kreise sind, während die Länge eines geodätischen Kurvenbogens gleich dem Logarithmus des Doppelverhältnisses zwischen den Endpunkten des Bogens einerseits und den Schnittpunkten der zugehörigen geodätischen Linie mit dem Einheitskreis anderseits ist. Die Invarianz dieser Metrik folgt ja unmittelbar aus der Linearität der zugehörigen komplexen Abbildungsgleichungen¹⁾.

Natürlich ist diese Metrik die einzige gegenüber T invariante. Denn sind im Einheitskreis zwei beliebige Punkte mit je einer Richtung gegeben, so gibt es in T stets eine Transformation, die sowohl die Punkte als auch die Richtungen ineinander überführt.

Pick hat gezeigt, daß bei einer regulären analytischen Abbildung des Einheitskreises *in* sich selber jede Kurve auf eine solche von kleinerer oder höchstens gleicher invarianter Länge abgebildet wird, wobei der letztere Fall nur bei den zu T gehörigen Abbildungen auftreten kann²⁾. Beachtet man, daß in der invarianten Metrik die durch den Kreismittelpunkt gehenden geodätischen Linien die Geraden sind, und daß außerdem die invariante Metrik gegenüber den Drehungen um den Mittelpunkt symmetrisch ist, so erkennt man, daß der Picksche Satz das *Schwarzsche Lemma* in sich enthält. Da die Winkelmessung in der invarianten Metrik mit derjenigen in der euklidischen Metrik übereinstimmt, sind Abbildungen, die bezüglich der einen Metrik konform sind, auch konform bezüglich der andern. Das Schwarzsche Lemma ist also in folgendem allgemeineren Satz enthalten :

¹⁾ H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math. I (1882), p. 1.

²⁾ G. Pick, Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, Math. Ann. 27 (1916), p. 1.

Jede bezüglich der invarianten Metrik der Transformationsgruppe T konforme Abbildung des Einheitskreises in sich selber bildet jede Kurve auf eine solche von kleinerer oder höchstens gleicher invarianter Länge ab. Wird die Länge einer einzigen Kurve nicht verändert, so gilt dies für jede Kurve und die Abbildung ist in T enthalten.

S. Bergmann hat den Pickschen Satz auf eine neue Grundlage gestellt, indem er zeigte, daß die invariante Metrik eine ganz bestimmte Minimal-eigenschaft hat, aus welcher unmittelbar der Picksche Satz folgt³⁾. Bergmann hat auf Grund desselben Extremalprinzips eine gegenüber pseudo-konformen Abbildungen eines 4-dimensionalen Gebietes auf sich selber invariante Metrik konstruiert (pseudokonforme Abbildung = Abbildung, die durch ein Paar analytischer Funktionen von zwei komplexen Variablen vermittelt wird)⁴⁾.

In der vorliegenden Arbeit gehen wir von einem homogenen Raum Ω aus, d. h. von einem Raum, auf dem eine transitive Transformationsgruppe T gegeben ist. Von Ω setzen wir außerdem voraus, daß er lokal-euklidisch ist. Von der Gruppe T setzen wir voraus, daß sie differenzierbar und einfach transitiv⁵⁾ ist. Außerdem soll T entweder kompakt sein oder dann eine solche lokalkompakte Gruppe, die einen diskreten Normalteiler D enthält, der so beschaffen ist, daß die Faktorgruppe T/D kompakt ist. Damit sind z. B. die kommutativen lokalkompakten Gruppen eingeschlossen, ebenso die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume usw.⁶⁾. Für den Fall, daß die Transformationen von T sich (in gewissen Koordinaten) durch stetig differenzierbare Funktionen ausdrücken, ist gezeigt worden, daß auf Ω eine gegenüber T invariante Riemannsche Metrik existiert⁷⁾.

In dieser Arbeit werden wir die Existenz einer solchen Metrik auf eine neue Art beweisen, indem wir ein Variationsprinzip verwenden, das dem von Bergmann verwendeten ähnlich ist, wenn es sich auch nicht wie bei Bergmann auf die Abbildungsfunktionen bezieht, sondern auf irgendein invariantes Linearsystem von auf Ω definierten Funktionen.

³⁾ S. Bergmann, Partial differential equations, advances topics (hektographiert), Brown University, Providence (USA.) 1941.

⁴⁾ S. Bergmann, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes..., New York 1941, p. 51 ff.

⁵⁾ das soll hier heißen: es existieren zwei Punktpaare in Ω , die durch keine Transformation aus T ineinander übergeführt werden.

⁶⁾ L. Pontrjagin, Topological groups, Princeton 1946, p. 153, Lemma 1.

⁷⁾ Vgl. E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus..., Mém. des Sc. fasc. 42, Paris 1930, p. 30 ff.

W. V. D. Hodge, The theory and application of harmonic integrals, Cambridge 1941, p. 226 ff.

Wir werden schließlich zeigen, daß sich aus dem erwähnten Extremalprinzip ein dem Pickschen Satz analoger ableiten läßt, falls auf Ω ein invariantes Linearsystem existiert, das eine bestimmte noch zu formulierende Eigenschaft hat (4). Dies ist der Fall, wenn Ω die Dimension 2 hat. Die Frage, ob ein solcher Satz auch für $n > 2$ gilt, müssen wir unabgeklärt lassen.

I.

Wir werden jetzt zuerst zeigen, daß auf Ω ein gegenüber T *invariantes Maß* existiert, das im Gebiete der offenen Mengen auf Ω definiert ist. Dazu gehen wir von der Tatsache aus, daß ein solches Maß auf kompakten Gruppen existiert⁸⁾.

Wir haben von T vorausgesetzt, daß sie einen diskreten Normalteiler D von der Art enthält, daß die Faktorgruppe T/D kompakt ist. Wir zerlegen nun Ω in Diskontinuitätsbereiche des Normalteilers D . Ω_0 sei ein solcher. Dann ist also

$$\Omega = \sum_i d_i \Omega_0 ,$$

wo d_i alle Elemente von D durchläuft. Je zwei der Mengen $d_i \Omega_0$ haben keine gemeinsamen Punkte.

Auf Ω_0 definieren wir jetzt eine kompakte Transformationsgruppe T_0 , die zur Faktorgruppe T/D isomorph ist. Sei nämlich t_r eine der Nebengruppen von D , aus welchen T/D besteht, und sei t irgendeine Transformation von T , die in t_r enthalten ist. Ist nun P irgendein Punkt von Ω_0 , so setzen wir

$$t_r(P) = dt(P) ,$$

wo d dasjenige Element von D bedeutet, für welches $dt(P) \subset \Omega_0$ ist.

Da T_0 kompakt ist, existiert darauf ein invariantes Maß⁹⁾, das wir im folgenden mit μ bezeichnen. Wir übertragen dieses Maß auf folgende Art auf den Diskontinuitätsbereich Ω_0 : Es sei P_0 ein fester Punkt in Ω_0 und ω_0 eine offene Menge in Ω_0 . τ sei die Menge aller Transformationen aus T_0 , die P_0 in irgendeinen Punkt von ω_0 überführen: $\omega_0 = \tau P_0$. Wir setzen dann

$$m(\omega_0) = \mu(\tau) .$$

Die in Ω_0 definierte Mengenfunktion m hat dann die folgenden Eigenschaften:

⁸⁾ L. Pontrjagin, a. a. O., § 25.

⁹⁾ Siehe Fußnote 8.

1) Sie ist vom Punkte P_0 unabhängig.

Dies folgt unmittelbar aus der Transitivität von T_0 und der Invarianz des Maßes μ auf ihr.

2) Sie ist additiv.

3) Sie ist invariant gegenüber T_0 .

Denn ist $\omega_1 = t_r \omega_2$, $t_r \subset T_0$, $\omega_i \subset \Omega_0$, und ist ferner $\omega_2 = \tau P_0$, so ist $\omega_1 = t_r \tau P_0$, also $m(\omega_1) = \mu(t_r \tau) = \mu(\tau) = m(\omega_2)$.

m ist also ein gegenüber T_0 invariantes Maß auf Ω_0 . Wir übertragen jetzt dieses Maß wie folgt auf Ω : Ist $\omega = d\omega_0$, $\omega_0 \subset \Omega_0$, $d \subset D$, so setzen wir $M(\omega) = m(\omega_0)$. Enthält hingegen ω Punkte aus verschiedenen Diskontinuitätsbereichen, so zerlegen wir es in Teile, die einem einzigen solchen angehören und setzen $M(\omega)$ gleich der Summe der Werte von M für die einzelnen Teile.

Diese Funktion M ist wiederum, wie man leicht einsieht, additiv und invariant gegenüber der Transformationsgruppe T . Wir dürfen voraussetzen, daß $M(\Omega_0) = 1$ ist¹⁰⁾, was wir im folgenden stets annehmen wollen. Das Maß des ganzen Raumes Ω ist unendlich groß, wenn nicht T selber schon kompakt ist.

Mit Hilfe des invarianten Maßes können wir nun in Ω eine Integration definieren, die wir *invariante Integration* nennen. Jeder in einem Gebiet $G \subset \Omega$ definierten stetigen Funktion $f(x)$ wird dadurch das invariante Integral

$$\int_G f(x) dx = \lim \sum_i f(x_i) M(G_i)$$

zugeordnet, wo der rechtsstehende Grenzwert in der üblichen Weise sich auf eine Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen des Gebietes G bezieht.

II.

Auf dem Diskontinuitätsbereich Ω_0 sei nun eine nicht konstante stetige beschränkte Funktion $k(x, y)$ gegeben, deren beide Argumente alle Punkte von Ω_0 durchlaufen. Wir setzen ferner voraus, daß $k(x, y)$ in den beiden Argumenten entweder reell und symmetrisch oder aber hermitesch ist. Außerdem soll

$$k(t_r x, t_r y) = k(x, y)$$

sein für beliebige x, y und $t_r \subset T_0$. Wegen der Voraussetzung, daß T nur einfach transitiv sein soll, existieren tatsächlich Funktionen, welche

¹⁰⁾ L. Pontrjagin, a. a. O., p. 91, Definition 31/5.

diese Forderungen erfüllen. Wir betrachten nun die Integralgleichung

$$f(x) = \lambda \int_{\Omega_0} k(x, y) f(y) dy . \quad (1)$$

Nach bekannten Sätzen hat diese Gleichung mindestens einen reellen Eigenwert λ_0 ¹¹⁾.

Die zugehörigen Lösungen bilden ein Linearsystem L_0 , welches eine endliche Basis hat¹²⁾. Dieses Linearsystem ist invariant gegenüber der Gruppe T_0 ; d. h. wenn wir irgendeine Funktion des Systems durch eine Transformation aus T_0 transformieren, so entsteht wieder eine Funktion aus dem System. Sei in der Tat $f(x)$ eine Funktion des Systems, so gilt :

$$\begin{aligned} f(t_r x) &= \lambda_0 \int_{\Omega_0} k(t_r x, y) f(y) dy = \\ &\lambda_0 \int_{\Omega_0} k(t_r x, t_r y) f(t_r y) dy = \lambda_0 \int_{\Omega_0} k(x, y) f(t_r y) dy (t_r \subset T_0) . \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen erhalten wir hier durch eine Transformation der Variablen unter Verwendung der Invarianz der Integration, das dritte Gleichheitszeichen folgt unmittelbar aus den an $k(x, y)$ gestellten Forderungen. Diese Gleichung sagt aber aus, daß $f(t_r x)$ ebenfalls eine zum Eigenwert λ_0 gehörige Lösung der Integralgleichung ist und somit zum Linearsystem L_0 gehört.

Wir wollen jetzt die Funktionen dieses Linearsystems von Ω_0 aus auf den ganzen Raum Ω ausbreiten. Sei $f \subset L_0$ und $x \subset \Omega$, $dx \subset \Omega_0$, $d \subset D$, so setzen wir $g(x) = f(dx)$. Die auf diese Weise auf Ω definierten Funktionen bilden ein Linearsystem L . Dieses ist gegenüber den Transformationen von T invariant. Sei nämlich $g(x) \subset L$ und $t \subset T$. Dann ist $g(t x) = f(t d'x)$ ($f \subset L_0$, $t d'x \subset \Omega_0$, $d' \subset D$ (D ist Normalteiler!)). Der Punkt $t d'x$ geht aber durch Transformation mittels der Nebengruppe von D , welche t enthält, in $d''x \subset \Omega_0$ ($d'' \subset D$) über. Also ist $g(t x) = f(t d'x) = f'(d''x) = g'(x) \subset L$.

Damit ist gezeigt, daß auf Ω Linearsysteme von stetigen Funktionen existieren, die gegenüber T invariant sind. Nehmen wir den Kern $k(x, y)$ als stetig differenzierbar an, so gilt dasselbe für die Funktionen des Linearsystems. Diese Voraussetzung wollen wir im folgenden machen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß wir außerdem stets das invariante Linearsystem so konstruieren können, daß zu jedem mit einer Richtung versehenen Punkt auf Ω eine Funktion im Linearsystem

¹¹⁾ Vgl. A. Lichnerowicz, Algèbre et analyse linéaires, Paris 1947, p. 267, p. 301.

¹²⁾ Vgl. A. Lichnerowicz, a. a. O., p. 271 f.

enthalten ist, deren Ableitung in dem betreffenden Punkte in der gegebenen Richtung nicht verschwindet.

Um die Existenz solcher Systeme zu beweisen, gehen wir in folgenden *drei Schritten* vor :

1) Sei x_0 ein beliebiger Punkt in Ω und R_0 eine beliebige Richtung in x_0 . Wir zeigen, daß stets ein Linearsystem existiert, dessen Funktionen im Punkte x_0 in der Richtung R_0 nicht alle die Ableitung 0 haben. Fragen wir uns, was passiert, wenn von einem Linearsystem alle Funktionen in x_0 in der Richtung R_0 die Ableitung 0 haben! Durch Transformation von (x_0, R_0) mittels aller Transformationen von T erhält man eine stetige Schar von Richtungselementen auf Ω , und zwar mindestens ein Element in jedem Punkt von Ω . Wegen der Invarianz des Linearsystems haben in jedem Punkte in allen Richtungen dieser Schar die sämtlichen Funktionen des Systems die Ableitung 0. Wir können Ω mit einer Schar S von Kurven überdecken, die in jedem ihrer Punkte die Richtung von einem dieser Richtungselemente haben. Längs jeder Kurve dieser Schar sind die sämtlichen Funktionen des Linearsystems konstant. Um ein invariantes Linearsystem zu konstruieren, dessen Funktionen im Punkt x_0 in der Richtung R_0 nicht alle die Ableitung 0 haben, genügt es also, ein solches zu konstruieren, dessen Funktionen nicht alle längs den Kurven der Schar S konstant sind. Um aber ein solches zu erhalten, müssen wir nur vom Kern $k(x, y)$ der Integralgleichung (1) außer den schon an ihn gestellten Bedingungen noch folgendes verlangen: $k(x, y)$ ist, als Funktion von x , nicht für jeden Punkt y längs allen Kurven von S konstant. Betrachten wir nämlich die Funktionen $g(x)$, welche in der folgenden Gestalt dargestellt werden können:

$$g(x) = \int_{\Omega_0} k(x, y) h(y) dy \quad (2)$$

($h(x)$ irgendeine stetige Funktion). Falls $k(x, y)$ die eben formulierte Bedingung erfüllt, sind diese Funktionen nicht alle längs der Kurven von S konstant. Nun sind es aber nach dem Satze von Hilbert-Schmidt¹³⁾ gerade die in der Form (2) darstellbaren Funktionen, welche durch die Eigenfunktionen des Kernes $k(x, y)$ beliebig approximiert werden können. Also können auch die Eigenfunktionen des Kernes $k(x, y)$ nicht alle längs der Kurven von S konstant sein. Sei $f(x)$ eine Eigenfunktion, die längs S nicht konstant ist. Sie gehört zu einem Eigenwert λ . Die Gesamtheit der zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen hat die

¹³ Vgl. A. Lichnerowicz, a. a. O., p. 309.

Eigenschaft, Funktionen zu enthalten, die im Punkte x_0 in der Richtung R_0 nicht die Ableitung 0 haben. Außerdem ist sie nach dem früher Gezeigten ein invariantes Linearsystem.

2) Jetzt wollen wir die Existenz eines invarianten Linearsystems beweisen, welches die Eigenschaft hat, daß im Punkte x_0 in keiner Richtung alle Funktionen des Systems die Ableitung 0 haben.

Wir haben soeben ein solches konstruiert, dessen Funktionen im Punkte x_0 in der Richtung R_0 nicht alle die Ableitung 0 haben. Nennen wir es L_0 . Die Richtungen im Punkte x_0 , in denen die Ableitungen der sämtlichen Funktionen von L_0 verschwinden, bilden eine höchstens $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ($n = \text{Dimension von } \Omega$). Greifen wir irgendeine solche Richtung, R_1 , heraus. Nach 1) existiert ein invariantes Linearsystem, dessen Funktionen nicht alle in der Richtung R_1 die Ableitung 0 haben. Das von diesem System und von L_0 erzeugte Linearsystem ist invariant und die Richtungen, in denen die Ableitungen seiner sämtlichen Funktionen verschwinden, bilden eine höchstens $(n - 2)$ -dimensionale Schar. Indem wir so fortfahren, erreichen wir das Ziel.

3) Sei L ein invariantes Linearsystem, welches zu jeder Richtung im Punkte x_0 eine Funktion enthält, deren Ableitung in dieser Richtung nicht verschwindet. L hat dann wegen seiner Invarianz diese Eigenschaft in jedem Punkte von Ω .

Das Resultat des Teiles II fassen wir zusammen in

Satz 1. Auf Ω existiert ein invariantes Linearsystem von einmal stetig differenzierbaren Funktionen, dessen Dimension endlich ist und welches die Eigenschaft hat, daß in keinem Punkte von Ω und in keiner Richtung die Ableitung einer jeden Funktion des Systems verschwindet.

III.

In diesem Abschnitt legen wir ein invariantes Linearsystem von der in Satz 1 beschriebenen Art zugrunde. Hingegen setzen wir nicht voraus, daß die Funktionen des Systems, wie die speziellen, in Teil II konstruierten, bezüglich des Normalteilers D automorph sind. In bezug auf dieses Linearsystem, das wir mit L bezeichnen, wollen wir das folgende *Variationsproblem* lösen :

Sei n die Dimension von Ω und die a^i ($i = 1, \dots, n$) beliebige reelle Konstanten. x_0 sei ein beliebiger Punkt und x^i ($i = 1, \dots, n$) seine Koordinaten. Unter den Funktionen $f(x)$ aus L , welche die Bedingung

$$\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = 1$$

erfüllen, suchen wir diejenige, für welche das Integral

$$\int_{\Omega_0} |f(x)|^2 dx$$

seinen minimalen Wert annimmt. Außerdem bestimmen wir den Wert des Minimums.

Lösung : Wir beweisen zuerst, daß in L stets Funktionen existieren, für welche die Nebenbedingung erfüllt ist. Sei nämlich R eine Richtung im Punkte x_0 , für welche gilt :

$$a_i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad (i = 1, \dots, n)$$

(τ ein Parameter). Wäre nun für jedes $f(x) \subset L$

$$\sum_i a_i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = 0 ,$$

so würde das heißen

$$\sum_i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{df(x_0)}{d\tau} = 0 ,$$

und in der Richtung R hätten alle Funktionen aus L die Ableitung 0.

Nun sollen die Funktionen $\varphi_k(x)$ ($k = 1, \dots, r$) eine vollständige orthonormale Basis von L bilden ; d. h. jede Funktion $f(x) \subset L$ soll in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^r c_k \varphi_k(x)$$

darstellbar sein und außerdem ist

$$\int_{\Omega_0} \varphi_k(x) \overline{\varphi_l(x)} dx = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, r) .$$

Es ist dann

$$\sum_i a_i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = \sum_i \sum_k a_i c_k \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x^i}$$

und

$$\int_{\Omega_0} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^r |c_k|^2 ,$$

und das Variationsproblem ist auf das folgende Extremalproblem zurückgeführt :

Die Konstanten c_k ($k = 1, \dots, r$) sind so zu bestimmen, daß erstens die Bedingung

$$\sum_i \sum_k a_i c_k \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x^i} = 1$$

erfüllt ist und daß zweitens unter dieser Nebenbedingung der Ausdruck $\sum_k |c_k|^2$ seinen minimalen Wert annimmt. Die elementare Ausrechnung ergibt folgendes Resultat :

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^n a_i \frac{\overline{\partial \varphi_k(x_0)}}{\partial x^i} \quad (k = 1, \dots, r; \quad \lambda = \text{const.}).$$

Damit ist die Funktion, für welche das Minimum angenommen wird, bestimmt. Dieses selber hat den Wert :

$$\text{Min} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \left(\sum_{k=1}^r \frac{\overline{\partial \varphi_k(x_0)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_k(x_0)}{\partial x^j} \right) \right]^{-1}.$$

IV.

Wir definieren jetzt auf Ω eine *Riemannsche Metrik*, von der wir zeigen werden, daß sie der Transformationsgruppe T gegenüber *invariant* ist. Die Bezeichnungen übernehmen wir aus Teil III.

Die Größen

$$t_{ij}(x) = \sum_{k=1}^r \frac{\overline{\partial \varphi_k(x)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (3)$$

sind die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe. Die zugehörige Form

$$F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij}(x) a_i a_j$$

ist (für reelle a_i) positiv definit. Denn ihr Wert ist der reziproke Wert des Minimums aus Teil III, welches seiner Natur gemäß > 0 ist, falls nicht alle a_i verschwinden.

Nun betrachten wir in Ω ein Linienelement an einer Stelle x , dessen Komponenten dx^i ($i = 1, \dots, n$) seien. Beachten wir, daß wir die Form F mit reellen Koeffizienten

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (t_{ij} + \overline{t_{ij}})$$

in der Gestalt

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} a_i a_j$$

schreiben können, so sehen wir, daß durch

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

auf Ω eine Riemannsche Metrik definiert ist. Diese Metrik ist gegenüber T invariant.

Seien nämlich ds und ds' zwei Linienelemente auf Ω , die durch eine Transformation t aus T auseinander hervorgehen: $ds' = t ds$. Nach der Definition der Metrik gilt:

$$ds^{-2} = \operatorname{Min}_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (df_{ds} = 1, f(x) \subset L),$$

$$ds'^{-2} = \operatorname{Min}_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (df_{ds'} = 1, f(x) \subset L).$$

(Die nicht sehr strenge Bezeichnung rechtfertigt sich durch Einfachheit.) Dabei bedeutet df_{ds} die Änderung von $f(x)$ längs ds . Wenn nun für irgendeine Funktion $f(x)$ aus L gilt:

$$df(x)_{ds} = 1,$$

so gilt auch $df(t^{-1}x)_{ds'} = 1$.

Wegen der Invarianz von L liegt mit $f(x)$ auch $f(t^{-1}x)$ in L . Wegen der Invarianz der Integration auf Ω und weil die Funktionen von L bezüglich D automorph sind, ist ferner:

$$\int_{\Omega_0} |f(x)|^2 dx = \int_{t\Omega_0} |f(t^{-1}x)|^2 d(t^{-1}x) = \int_{t\Omega_0} |f^{-1}(x)|^2 dx = \int_{\Omega_0} |f(t^{-1}x)|^2 dx.$$

Also gehört zu jeder Funktion, welche die Nebenbedingungen des zu ds gehörigen Variationsproblems erfüllt, eine solche, welche die zu ds' gehörigen Bedingungen erfüllt und außerdem dem zu einem Minimum zu machenden Integral denselben Wert erteilt. Also ist $ds \leq ds'$. Da wir das Umgekehrte ebensogut beweisen können, folgt $ds = ds'$. Damit ist die Invarianz der Metrik bewiesen. Das Resultat ist

Satz 2. *Ω sei eine lokaleuklidische Mannigfaltigkeit, auf welcher Koordinaten eingeführt sind und auf welcher eine differenzierbare einfach transitive Transformationsgruppe T definiert ist. T sei lokalkompakt und enthalte einen solchen diskreten Normalteiler D , daß die Faktorgruppe T/D kompakt ist. Dann existiert auf Ω mindestens eine gegenüber T invariante Riemannsche Metrik.*

Zum Existenzbeweis für die invariante Metrik haben wir nun noch zwei Bemerkungen zu machen:

1) Wir haben den Beweis auf ein invariantes Linearsystem von endlicher Basis gestützt, und zwar deshalb, weil mit der Endlichkeit der Dimension die Existenz des Minimums im Variationsproblem zum vornherein sichergestellt ist. Nun gibt es aber natürlich auch invariante Linearsysteme, deren Dimension unendlich ist. Auch auf Grund eines solchen können wir eine invariante Metrik konstruieren, sofern es die in

Satz 1 ausgesprochene Eigenschaft hat und sofern das Variationsproblem eine Lösung besitzt. Der einzige Unterschied ist der, daß die Reihen (3), durch welche die t_{ij} definiert sind, unendlich sind. Die Konvergenz dieser Reihen ist eine mit der Existenz des Minimums äquivalente Bedingung. Falls also die Reihe

$$t_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\partial \varphi_k(x)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x^j}$$

für beliebiges x und für alle möglichen Werte von i und j konvergiert, können wir auch auf Grund eines invarianten Linearsystems mit unendlicher Dimension eine invariante Metrik konstruieren.

2) Zur Konstruktion der invarianten Metrik haben wir ein Linearsystem verwendet, dessen Funktionen alle bezüglich des Normalteilers D automorph sind. Wir taten dies, weil wir einzig die Existenz von solchen invarianten Linearsystemen bewiesen haben. Im allgemeinen existieren aber natürlich auch solche Linearsysteme, die nicht diese Eigenschaft haben. Falls eines existiert, dessen Funktionen über Ω quadratisch integrierbar sind (das invariante Volumen von Ω ist i. a. unendlich!), so können wir auch auf Grund eines solchen Linearsystems eine invariante Metrik definieren, indem wir überall die über Ω_0 erstreckten Integrale durch die entsprechenden über ganz Ω erstreckten ersetzen. Dies wird für die Ausdehnung des Pickschen Satzes von Wichtigkeit sein.

Ferner schließen wir noch folgenden Hinweis an : Im allgemeinen werden wir auf Grund verschiedener invarianten Linearsysteme auch verschiedene invarianten Metriken erhalten. In einem Falle jedoch können wir zum vornherein sagen, daß nur eine solche existiert : Wenn T richtungstransitiv ist. In diesem Falle ist die Metrik, bis auf einen konstanten Faktor, vom verwendeten Linearsystem unabhängig.

V.

In diesem Abschnitt wollen wir die in der Einleitung angekündigte Verallgemeinerung des Pickschen Satzes und damit des Schwarzschen Lemmas beweisen.

Wir setzen vom Linearsystem L , welches wir der invarianten Metrik zugrundelegen, voraus, daß es die in Satz 1 formulierten und außerdem die folgenden beiden Eigenschaften hat :

1) Für jede bezüglich der invarianten Metrik konforme Abbildung $x' = sx$ von Ω auf oder in sich selber gilt : Falls $f(x) \subset L$ ist, so existiert eine Funktion $\varphi(x) \subset L$, für die

$$|\varphi(x)| = |f(sx)| \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}} \quad (4)$$

ist. Dabei bedeutet $d(sx)/dx$ die Derivierte des invarianten Maßes eines Bildvolumenelementes $s\omega$ nach dem invarianten Maß seines an der Stelle x gelegenen Ursprungselementes ω .

2) Für alle $f(x) \subset L$ existiert $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$.

Auf die Erfüllbarkeit dieser Forderungen werden wir später zu sprechen kommen.

Da auf Grund von Eigenschaft 1) es nicht in Frage kommt, daß die Funktionen von L bezüglich D automorph sind, betrachten wir (gemäß der Bemerkung 2) auf S. 225 die Metrik, die aus L vermittelst des Variationsproblems für das Integral $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$ hervorgeht.

Sei nun s eine bezüglich der zu L gehörigen invarianten Metrik konforme Abbildung von Ω auf oder in sich selber: $s\Omega = \Omega^* \subset \Omega$. Wir werden beweisen, daß durch s die invariante Länge einer jeden Kurve aus Ω gleich gelassen oder verkleinert wird.

Beweis: Wir ordnen dem Bereich Ω^* ein Linearsystem L^* auf die folgende Weise zu: Es ist $g(x) \subset L^*$ dann und nur dann, wenn ein $f(x) \subset L$ existiert, so daß $f(x) = g(x)$ ist für $x \subset \Omega^*$.

In Ω^* definieren wir sodann eine Metrik durch die folgende Gleichung:

$$(ds_{\Omega^*})^{-2} = \operatorname{Min}_{\Omega} \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \quad (g(x) \subset L^*, dg(x)_{ds} = 1) \quad (5)$$

zu verstehen. Diese Metrik braucht natürlich keineswegs invariant zu sein gegenüber irgendeiner Transformationsgruppe.

Sei nun ds irgendein Linienelement aus Ω . Seine invariante Länge bezeichnen wir mit ds_{Ω} , im Unterschied zu der soeben definierten Länge ds_{Ω^*} . Neben der obigen Gleichung (5) haben wir also die folgende:

$$(ds_{\Omega})^{-2} = \operatorname{Min}_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (f(x) \subset L, df(x)_{ds} = 1).$$

Ferner setzen wir $s(ds) = ds^*$ und seine bezüglichen Längen mit ds_{Ω}^* bzw. $ds_{\Omega^*}^*$.

Wir haben zu beweisen:

$$ds_{\Omega} \geq ds_{\Omega}^*.$$

Dies tun wir in zwei Schritten:

1) Sei $g(x) \subset L^*$ und $dg(x)_{ds^*} = 1$. Dann erfüllt $g(x)$ die Nebenbedingungen für die Berechnung von $ds_{\Omega^*}^*$ und ferner ist:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} |g(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |g(sx)|^2 d(sx) = \int_{\Omega} |g(sx)|^2 \frac{d(sx)}{dx} dx \\ &= \int_{\Omega} \left| g(sx) \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}} \right|^2 dx . \end{aligned}$$

Nach den über L und L^* gemachten Voraussetzungen ist

$$h(x) = g(sx) \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}} e^{i\vartheta} \subset L .$$

Außerdem ist

$$|dh(x)_{ds}| = \sqrt{\frac{d(sx_0)}{dx_0}} \quad (x_0 = \text{Ort von } ds) .$$

Also für

$$f(x) = \sqrt{\frac{dx_0}{d(sx_0)}} \cdot h(x) \subset L : |df(x)_{ds}| = 1 .$$

Diese Funktion $f(x)$ erfüllt demnach bis auf einen Faktor vom absoluten Betrage 1 die Nebenbedingungen für die Berechnung von ds_{Ω} . Zu jeder Funktion $g(x)$, welche die Bedingungen für $ds_{\Omega^*}^*$ erfüllt, gehört also eine Funktion $f(x)$, welche die Bedingungen für ds_{Ω} erfüllt, und für die gilt :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = \frac{dx_0}{d(sx_0)} \int_{\Omega^*} |g(x)|^2 dx .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx &\quad (f(x) \subset L, \quad df(x)_{ds} = 1) \\ &\leq \frac{dx_0}{d(sx_0)} \min_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} |g(x)|^2 dx \quad (g(x) \subset L^*, \quad dg(x)_{ds*} = 1) , \end{aligned}$$

d. h. aber

$$ds_{\Omega}^2 \geq \frac{d(sx_0)}{dx_0} ds_{\Omega^*}^{*2} . \quad (6)$$

2) Sei $f(x) \subset L$, $df(x)_{ds*} = 1$. Setzen wir für $x \subset \Omega^*$: $g(x) = f(x)$, so ist

$$g(x) \subset L^* , \quad dg(x)_{ds*} = 1 .$$

Natürlich ist

$$\int_{\Omega^*} |g(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx ,$$

d. h.

$$\begin{aligned} \min_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} |g(x)|^2 dx &\quad (g(x) \subset L^*, \quad dg(x)_{ds*} = 1) \\ &\leq \min_{\Omega} \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (f(x) \subset L, \quad df(x)_{ds*} = 1) . \end{aligned}$$

Also :

$$ds_{\Omega^*}^{*2} \geq ds_{\Omega}^{*2} . \quad (7)$$

Nimmt man die beiden Ungleichungen (6) und (7) zusammen, so erhält man :

$$ds_{\Omega}^2 \geq \frac{d(sx_0)}{dx_0} ds_{\Omega}^{*2}.$$

Für eine konforme Abbildung s ist nun aber :

$$\frac{d(sx_0)}{dx_0} = \left(\frac{ds_{\Omega}^*}{ds_{\Omega}} \right)^n.$$

(Dies folgt aus der eindeutigen Bestimmtheit des invarianten Maßes.) Setzt man dies in der letzten Ungleichung ein, so folgt :

$$ds \geq ds^* \quad (8)$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Formulieren wir der Einfachheit halber das Resultat nur für einen Raum mit richtungstransitiver Gruppe, auf dem also die invariante Metrik eindeutig bestimmt ist, so erhalten wir

Satz 3. *Sei Ω ein homogener Raum mit richtungstransitiver Gruppe und einer invarianten Metrik. Auf Ω existiere ein invariantes Linearsystem L mit folgenden Eigenschaften*

- 1) *für $f(x) \subset L$ existiert $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$.*
- 2) *Zu jedem $f(x) \subset L$ und jeder konformen Abbildung s von Ω in sich selber existiert ein $\varphi(x) \subset L$ mit*

$$|\varphi(x)| = |f(sx)| \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}}.$$

Dann wird durch jede konforme Abbildung von Ω in sich selber die invariante Länge einer jeden Kurve aus Ω gleich gelassen oder verkleinert.

Über die Tragweite des eben bewiesenen Satzes 3 können wir uns allerdings keine Rechenschaft ablegen, so lange wir nicht wissen, in welchen Fällen ein invariantes Linearsystem existiert, welches die verlangten Bedingungen erfüllt. Wir sind nicht imstande, diese Frage allgemein zu beantworten und beschränken uns auf den Fall der 2-dimensionalen homogenen Räume. Der Einfachheit der Formulierung wegen setzen wir ferner voraus, daß T richtungstransitiv ist. Außerdem machen wir die Voraussetzung, daß konforme Abbildungen von Ω in einen Teilbereich von endlichem invariantem Maß existieren. Unter dieser Voraussetzung konstruieren wir im folgenden ein invariantes Linearsystem, das die in Satz 3 verlangten Eigenschaften hat :

Wir können Ω so in Teilbereiche einteilen, daß in jedem derselben ein singularitätenfreies, bezüglich der invarianten Metrik isothermes Ko-

dinatensystem existiert¹⁴⁾). Wir wollen diese Bereiche sogar so wählen, daß die zu zwei benachbarten gehörigen Systeme sich ein Stück weit in den andern Bereich fortsetzen lassen. Jedem Linienelement aus Ω , das durch die Koordinatendifferenzen dx, dy charakterisiert ist, ordnen wir dann die komplexe Zahl $dz = dx + i dy$ zu. Sei σ eine konforme Abbildung von Ω auf einen Teilbereich von endlichem Maß. Für ein Linien-element dz sei $dw = \sigma(dz)$. Setzen wir

$$\varphi(x) = dw/dz \quad (x = \text{Ort von } dz).$$

Diese Funktion ist gebietsweise analytisch und regulär. Denn konforme Abbildungen drücken sich in isothermen Koordinaten durch analytische Funktionen aus¹⁵⁾). Seien nun G_1 und G_2 zwei benachbarte von den Gebieten, in denen $\varphi(x)$ analytisch ist. Wie hängen die zu G_1 und G_2 gehörigen analytischen „Teile“ von $\varphi(x)$ zusammen? In dem gemeinsamen Gebiet, in das wir nach Voraussetzung diese „Teile“ fortsetzen können, handelt es sich offenbar um zwei analytische Funktionen mit identischem absolutem Betrag. Also unterscheiden sie sich nur um einen konstanten Faktor vom absoluten Betrag 1. Gehen wir also von G_1 aus und setzen wir $\varphi(x)$ auf Ω analytisch fort, so erhalten wir eine auf Ω überall reguläre analytische Funktion $\psi(x)$, für die gilt $|\psi(x)| = |\varphi(x)|$.

Die endlichen linearen Kombinationen aller auf diese Weise erhaltenen Funktionen $\psi(x)$ (für alle konformen Abbildungen von Ω auf einen endlichen Teilbereich) bilden ein invariantes Linearsystem, das wir mit L bezeichnen wollen. Da bei einer konformen Abbildung von Ω auf einen endlichen Teilbereich, falls $M(\Omega) = \infty$ ist, nicht alle Längen mit einem konstanten Faktor reduziert werden, enthält L nichtkonstante Funktionen¹⁶⁾). Ferner hat L die folgenden Eigenschaften:

- 1) In keinem Punkte von Ω verschwinden in allen Richtungen die Ableitungen aller Funktionen von L . Denn die Funktionen sind analytisch.
- 2) Für alle Funktionen $f(x)$ aus L existiert

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx .$$

¹⁴⁾ Vgl. L. P. Eisenhart, An introduction to differential geometry, Princeton 1940, p. 161 ff.

¹⁵⁾ Vgl. L. P. Eisenhart, a. a. O., p. 201 ff.

¹⁶⁾ Falls $M(\Omega)$ endlich ist und nur solche konformen Abbildungen von Ω in sich existieren, bei denen alle Längen mit einem konstanten Faktor multipliziert werden, ist ja Satz 4 trivialerweise richtig.

Denn ist $f(x) \subset L$, so ist

$$|f(x)| = \left| \sum_i a_i \frac{d\sigma_i(z)}{dz} \right|,$$

wo die σ_i konforme Abbildungen von Ω auf einen endlichen Teilbereich sind. Es ist

$$\int_{\Omega} \left| \frac{d(\sigma_i z)}{dz} \right|^2 dx = \int_{\Omega} d(\sigma_i x) = M(\sigma_i \Omega),$$

also nach Voraussetzung endlich.

- 3) L kann verwendet werden, um die invariante Metrik von Ω zu erzeugen.

Denn das Variationsproblem, bezogen auf das Integral über Ω , hat für L stets eine Lösung. Da nämlich die Funktionen aus L analytisch sind, kann das Integral des absoluten Quadrates einer solchen Funktion nicht unter eine bestimmte Grenze sinken, wenn die Funktion an einer bestimmten Stelle die Ableitung 1 hat.

- 4) L hat die Eigenschaft (4).

Sei wiederum $f(x) \subset L$, $f(x) = \sum_i a_i \frac{d(\sigma_i z)}{dz}$, σ_i eine konforme Abbildung von Ω auf einen endlichen Teilbereich. Sei s irgendeine konforme Abbildung von Ω in sich. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| f(sx) \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}} \right| &= \left| \sum_i a_i \frac{d(\sigma_i s z)}{d(sz)} \sqrt{\frac{d(sx)}{dx}} \right| \\ &= \left| \sum_i a_i \frac{d(\sigma_i z)}{d(sz)} \frac{d(sz)}{dz} \right| = \left| \sum_i a_i \frac{d(\sigma_i s z)}{dz} \right|^{17)}. \end{aligned}$$

Da aber nach unseren Voraussetzungen $\sigma_i s z$ wieder eine konforme Abbildung von Ω auf einen endlichen Teilbereich ist, ist dies in L enthalten.

Damit hat L alle Eigenschaften, die in Satz 3 vorausgesetzt wurden, und wir haben :

Satz 4. *Sei Ω ein 2-dimensionaler homogener Raum mit richtungstransitiver Gruppe und einer invarianten Metrik, welcher konforme Abbildungen auf einen Teilbereich von endlichem invariantem Maß zuläßt. Dann wird durch jede konforme Abbildung von Ω in sich selber die Länge einer jeden Kurve gleich gelassen oder verkleinert.*

¹⁷⁾ Vgl. S. 226 wegen der Bedeutung von $d(sx)/dx$.

Der Satz gilt natürlich auch, falls die Gruppe nicht richtungstransitiv ist ; seine Aussage bezieht sich jedoch dann lediglich auf die durch das oben konstruierte Linearsystem erzeugte Metrik.

Schließlich wollen wir noch untersuchen, was passiert, wenn ein Kurvenbogen durch eine konforme Abbildung von Ω in sich selber nicht verkleinert wird. Wir behaupten, daß dies dann für alle Kurven der Fall ist.

Beweis. Das Gleichheitszeichen kann für irgend ein ds in Ungleichung (8) nur dann richtig sein, wenn es in den beiden Ungleichungen (6) und (7) richtig ist. Ist aber in (7) für ein einziges Linienelement das Gleichheitszeichen richtig, so folgt $\Omega = \Omega^*$. Denn eine analytische Funktion, die an einer gewissen Stelle die Ableitung 1 hat, kann nicht in einem Gebiet identisch verschwinden. Wenn aber $\Omega = \Omega^*$ ist, so ist auch $L = L^*$ und die Metrik des Bildbereiches Ω^* ist mit der invarianten Metrik von Ω identisch. Statt (6) erhalten wir also :

$$ds_{\Omega}^2 \geq \frac{d(sx_0)}{dx_0} ds_{\Omega}^{*2} = \frac{ds_{\Omega}^{*(n+2)}}{ds_{\Omega}^n}, \quad \text{also} \quad ds_{\Omega} \geq ds_{\Omega}^*. \quad (9)$$

Dies gilt unter der einzigen Voraussetzung, daß ds^* durch eine konforme Abbildung von Ω auf sich selber aus ds hervorgeht. Falls dies der Fall ist, geht aber ds aus ds^* durch die inverse Abbildung hervor, die ebenfalls eine konforme von Ω auf sich ist. Neben Gleichung (9) gilt also auch diejenige, die aus ihr durch Vertauschung von ds und ds^* hervorgeht. Daraus folgt für jedes ds :

$$ds_{\Omega} = ds_{\Omega}^*,$$

und damit

Satz 5. *Sei Ω ein 2-dimensionaler homogener Raum mit richtungstransitiver Gruppe und einer invarianten Metrik, welcher konforme Abbildungen auf einen Teilbereich von endlichem invariantem Maß zuläßt. Wird durch eine konforme Abbildung von Ω in sich selber die invariante Länge eines einzigen Kurvenbogens gleich gelassen, so ist dies für jeden Kurvenbogen der Fall und die Abbildung ist eine starre Transformation von Ω .*

(Eingegangen den 28. April 1948.)