

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 22 (1949)  
  
**Artikel:** Die Operatorenmethode von L. Fantappiè und die Laplace-Transformation.  
**Autor:** Batschelet, Eduard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19198>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Operatorenmethode von L. Fantappiè und die Laplace-Transformation

VON EDUARD BATSCHELET, Basel

**Einleitung.** Während eines Studienaufenthaltes in Rom kam ich mit der von Herrn L. Fantappiè geschaffenen Theorie der analytischen Funktionale in Berührung. Eines der Ziele dieser Theorie ist die Schaffung von Integrationsmethoden für Differential- und Integralgleichungen und insbesondere eines Operatorenkalküls, der die formale Einfachheit anderer derartiger Verfahren wie etwa des Heaviside-Kalküls besitzt, jedoch mathematisch einwandfrei begründet und überdies bedeutend leistungsfähiger ist.

Es schien mir angezeigt, die Methode von L. Fantappiè mit dem viel verwendeten Verfahren der Laplace-Transformation zu vergleichen, das bekanntlich den Heaviside-Kalkül als Spezialfall enthält. Wir werden uns im folgenden nur auf die einseitig unendliche Laplace-Transformation beziehen, welche durch

$$\mathfrak{L} f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

definiert wird.

Das Verfahren der Laplace-Transformation zur Integration von linearen Differentialgleichungen leidet darunter, daß das Integrationsintervall unendlich ist, und daß daher auch solche Werte der bekannten und unbekannten Funktionen in den Transformationsprozeß einbezogen werden müssen, welche zumeist gar nicht von Interesse sind. *Dies führt zu allerlei einschränkenden und oft ganz unkontrollierbaren Annahmen.* Dazu kommen weitere Schwierigkeiten bei der Ausführung der inversen Transformation. Bei partiellen Differentialgleichungen geben erst die hypothetisch gewonnenen Lösungen darüber Aufschluß, ob das Verfahren zulässig war oder nicht, so daß die Lösungen von Fall zu Fall verifiziert werden müssen. Aus diesem Grunde bleibt das Verfahren mehr oder weniger heuristisch (siehe § 4).

Demgegenüber hat L. Fantappiè verschiedene Operatoren eingeführt, deren Verwendung bessere Resultate liefert als die Laplace-Transformation. Schon der einfachste dieser Operatoren, nämlich der durch

$$\mathfrak{J} f(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt \quad (2)$$

definierte Operator  $\mathfrak{J}$ , gestattet die Integration fast aller derjenigen Differentialgleichungen, welche auch der Laplace-Transformation zugänglich sind. Es bleiben gewisse „singuläre“ Fälle übrig, auf welche andere Operatoren angewandt werden müssen (siehe § 4). Dafür fallen alle die oben genannten Schwierigkeiten weg, welche der Laplace-Transformation anhaften. Das Integrationsintervall in (2) ist endlich, und es werden *nur solche Funktionswerte in den Transformationsprozeß einbezogen, welche in einem gegebenen Problem von Bedeutung sind*<sup>1)</sup>.

Außer  $\mathfrak{J}$  erweisen sich gewisse Operatoren  $\mathfrak{B}_s$  als besonders erfolgreich. Sie verknüpfen Integration und Differentiation in folgender Weise :

$$\mathfrak{B}_s f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_s} \int_0^{x_0} f(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi, \quad s = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Mit ihnen gelang es *L. Fantappiè*, das Problem von Cauchy für alle Systeme linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Hervorzuheben ist, daß die Anfangswerte für die unbekannten Funktionen und ihre Ableitungen auf einer beliebigen Hyperfläche gegeben sein dürfen<sup>2)</sup>.

Durch Anwendung der gleichen Theorie glückte es neuerdings *M. Carafa*, fast alle linearen Funktionalgleichungen durch endlich viele Integrationen zu lösen. Darin sind sämtliche Integralgleichungen vom Fredholm-schen und vom Volterraschen Typus mit beliebig vielen Variabeln inbegriffen. Dies hat u. a. zur Folge, daß die Lösungen sämtlicher linearen oder nicht linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen durch endlich viele Integrale dargestellt werden können<sup>3)</sup>.

In der vorliegenden Mitteilung richten wir uns auch an diejenigen Leser, welche mit der Fantappièschen Theorie nicht vertraut sind, und vermeiden es deshalb, die der Theorie eigene Terminologie zu gebrauchen. Außerdem beschränken wir unsere Betrachtungen auf den durch (2) fest-

---

<sup>1)</sup> Formel (2) darf nicht mit der sog. Laplace-Transformation mit *endlichem* Integrationsintervall verwechselt werden. Mit dieser Art Laplace-Transformation sind zwar neuerdings bei Problemen, welche mit Hilfe von (1) nicht gelöst werden können, beträchtliche Erfolge errungen worden. Doch geht dies auf Kosten der formalen Einfachheit. Von einer Operatorenrechnung kann man kaum mehr sprechen.

<sup>2)</sup> *Fantappiè* (7), (9). Diese Verallgemeinerung, wonach die Anfangswerte auf einer beliebigen Hyperfläche gegeben sein dürfen, ist deshalb besonders interessant, weil sie den Übergang vom Cauchyschen zum Dirichletschen Problem gestattet, vgl. *Fantappiè* (8).

<sup>3)</sup> *Carafa* (1), (2), (3). Weitere Arbeiten im Druck. Das Ergebnis, welches sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen bezieht, steht nicht im Widerspruch zu einem bekannten Satz von Liouville, wonach sich die Riccatische Gleichung nicht durch endlich viele Quadraturen lösen lasse. Denn mit Quadraturen sind nur Integrale mit variabler oberer Grenze gemeint, während die Lösung von *M. Carafa* auch Integrale mit festen Grenzen, nämlich Residuenintegrale, enthält. Vgl. die Einleitung von *Haefeli-Pellegrino* (1).

gelegten Operator  $\mathfrak{J}$ . Wir prüfen seine Wirksamkeit im Vergleich zur Laplace-Transformation. Unser Vergleich wird sich auch auf die formale Seite erstrecken, um darzulegen, daß der Kalkül mit dem Operator  $\mathfrak{J}$  ebenso einfach wie die Methode der Laplace-Transformation zu handhaben ist (siehe § 5).

Wir versuchen ferner, die allgemeinen Erwägungen durch ein typisches Beispiel besser verständlich zu machen. Hierzu wählen wir einen Spezialfall der *Riemannschen hyperbolischen Differentialgleichung*, deren Integration ohnehin von Interesse sein dürfte (§ 2 und § 3).

## § 1. Analytische Funktionen des Operators $\mathfrak{J}$

Um mit dem durch (2) definierten Operator Differentialgleichungen auflösen zu können, muß man zunächst einmal zeigen, daß man mit  $\mathfrak{J}$  symbolisch rechnen kann. Man muß dazu versuchen, aus  $\mathfrak{J}$  weitere Operatoren zu bilden, nämlich geeignete „Funktionen“  $g(\mathfrak{J})$  und von ihnen nachweisen, daß sie sinnvoll sind.

Wir begnügen uns hier damit, einige Ergebnisse von *L. Fantappiè* wiederzugeben, von denen wir im folgenden Gebrauch machen werden<sup>4)</sup>:

*Sei  $g(\lambda)$  eine analytische und für  $\lambda = 0$  reguläre Funktion von  $\lambda$ . Dann ist  $g(\mathfrak{J})$  ein eindeutig bestimmter Operator, und es gilt*

$$F(t) \equiv g(\mathfrak{J})f(t) = g(0)f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{t_0}^t e^{\frac{t-\tau}{\lambda}} g(\lambda)f(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Hierin bedeutet  $C_0$  einen hinreichend kleinen, den Nullpunkt der  $\lambda$ -Ebene umschließenden Integrationsweg. Über die Funktion  $f(t)$  braucht man nur vorauszusetzen, daß sie in dem für die Variable  $t$  vorgesehenen Intervall integrierbar ist.  $f(t)$  ist also nicht notwendig stetig.

Wie Gleichung (4) zeigt, erfordert die Berechnung von  $F(t)$  eine Integration nach der Variablen  $\tau$  und die Ausführung einer Residuenrechnung. Längs des Integrationsweges  $C_0$  ist der Integrand eine reguläre Funktion von  $\lambda$ <sup>5)</sup>. Ist  $f(t)$  reell, so gilt dasselbe von  $F(t)$ .

Die Auflösung einer Differentialgleichung mittels  $\mathfrak{J}$  führt nicht immer zu einem Ausdruck der einfachen Gestalt  $g(\mathfrak{J})f(t)$ , sondern oft zu einer „impliziten Funktion“  $g(\mathfrak{J}, t)$ . Als Illustration diene das Beispiel in § 2,

<sup>4)</sup> *Fantappiè* (2), p. 18 ff. Eine mit (4) verwandte Formel wird auch beim Heaviside-Kalkül benutzt, vgl. *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, p. 194. Im Unterschied zu (4) wird aber dort ein Integrationsweg gewählt, auf dem der Integrand eine Singularität besitzt.

<sup>5)</sup> Damit fallen zahlreiche Schwierigkeiten weg, welche der inversen Laplace-Transformation anhaften, vgl. § 4.



Formel (14), wo  $y$  an Stelle von  $t$  geschrieben ist. Wann  $g(\mathfrak{J}, t)$  einen Sinn hat, und wie dieser Ausdruck zu berechnen ist, darüber gibt das folgende Ergebnis Auskunft:

Sei  $g(\lambda, t)$  eine analytische und für  $\lambda = 0$  reguläre Funktion von  $\lambda$ , die zugleich über das Intervall  $(t_0, t)$  nach  $t$  integrierbar ist. Dann stellt  $g(\mathfrak{J}, t)$  eine eindeutig bestimmte Funktion von  $t$  dar, welche sich mit Hilfe der Formel

$$g(\mathfrak{J}, t) = g(0, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{t_0}^t e^{\frac{t-\tau}{\lambda}} g(\lambda, \tau) d\tau \quad (5)$$

berechnen läßt.

$C_0$  bedeutet wiederum einen kleinen, den Nullpunkt der  $\lambda$ -Ebene umschließenden Integrationsweg. Offenbar ist (4) ein Spezialfall von (5).

Die Formel (5) läßt sich noch in einer anderen, für die Anwendungen oft geeigneteren Gestalt schreiben:

$$g(\mathfrak{J}, t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{t_0}^t e^{\frac{t-\tau}{\lambda}} g(\lambda, \tau) d\tau \right\}. \quad (6)$$

## § 2. Anwendung von $\mathfrak{J}$ auf die Riemannsche Gleichung

Um ein typisches Beispiel zu haben, das sich in gleicher Weise für die Anwendung des Operators  $\mathfrak{J}$  und der Laplace-Transformation eignet, wählen wir die *Riemannsche Methode* zur Auflösung der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x) u = f(x, y), \quad (7)$$

in welcher die Koeffizienten  $a, b, c$  als stetige Funktionen der Variablen  $x$  vorausgesetzt sind. Im allgemeinen Fall, wo die Koeffizienten Funktionen beider Variablen  $x$  und  $y$  sind, lassen sich weder die Laplace-Transformation noch der Operator  $\mathfrak{J}$  verwenden.

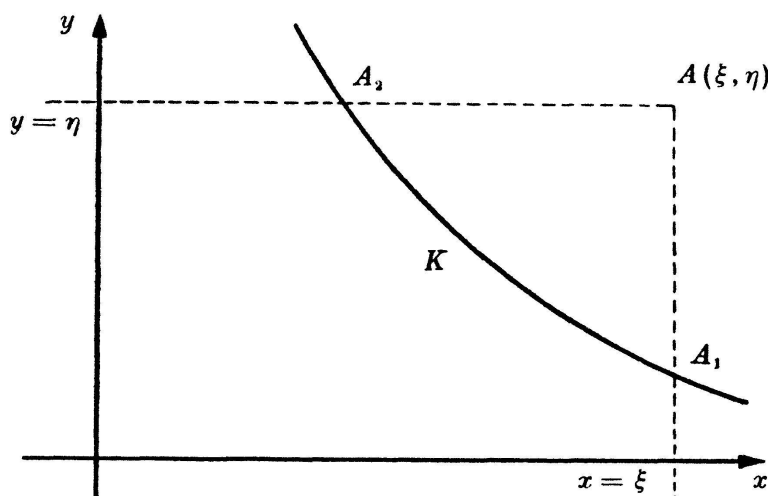
Ferner werde vorausgesetzt, daß die Werte der unbekannten Funktion  $u(x, y)$  sowie ihrer ersten Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  längs eines Kurvenbogens  $K$  gegeben sind, welcher von keiner Parallelen  $x = \xi$  zur  $Y$ -Achse und von keiner Parallelen  $y = \eta$  zur  $X$ -Achse mehr als einmal geschnitten wird.

*Riemann* hat bekanntlich gezeigt, daß sich diese Aufgabe auf das folgende, einfachere Problem zurückführen läßt<sup>6)</sup>:

---

<sup>6)</sup> *Riemann* (1), p. 161. Vgl. *Horn* (1), p. 22 ff.

Durch einen festen Punkt  $A(\xi, \eta)$  seien die Geraden  $x = \xi$  und  $y = \eta$  gezogen. Sie mögen den Kurvenbogen  $K$  in den Punkten  $A_1$  resp.  $A_2$  schneiden. Dann ist eine Funktion  $v(x, y; \xi, \eta)$  zu finden, welche die folgenden vier Bedingungen erfüllt:



1. Die Funktion  $v(x, y; \xi, \eta)$  genügt der zu (7) adjungierten Gleichung (Riemannsche Gleichung)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(a v)}{\partial x} - \frac{\partial(b v)}{\partial y} + c v &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a(x) \frac{\partial v}{\partial x} - b(x) \frac{\partial v}{\partial y} + (c(x) - a'(x)) v = 0 . \end{aligned} \quad (8)$$

2. Im Punkte  $A$  gilt  $v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$ .

3. Längs der Geraden  $x = \xi$  gilt

$$\frac{\partial v}{\partial y} - a v = 0 , \quad \text{d. h.} \quad v = e^{\int_{\eta}^y a dy} = e^{(y-\eta) a(\xi)} . \quad (9)$$

4. Längs der Geraden  $y = \eta$  gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x} - b v = 0 , \quad \text{d. h.} \quad v = e^{\int_{\xi}^x b(x) dx} . \quad (10)$$

Dieses reduzierte Problem lösen wir nun mit Hilfe des Operators  $\mathfrak{J}$ , wobei wir in (2)  $t$  mit  $y$  und  $t_0$  mit  $\eta$  identifizieren.  $\mathfrak{J}$  sei also definiert durch

$$\mathfrak{J}f(y) = \int_{\eta}^y f(y) dy . \quad (11)$$

Die Anwendung von  $\mathfrak{J}$  auf (8) ergibt

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=\eta} - a(x) \mathfrak{J} \frac{\partial v}{\partial x} - b(x) v + b(x) v_{y=\eta} + (c(x) - a'(x)) \mathfrak{J} v = 0 .$$

Wegen (10) vereinfacht sich dies zu der Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial x} - a \mathfrak{J} \frac{\partial v}{\partial x} - b v + (c - a') \mathfrak{J} v \equiv (1 - a \mathfrak{J}) \frac{\partial v}{\partial x} - (b - (c - a') \mathfrak{J}) v = 0 . \quad (12)$$

Das weitere Vorgehen stellen wir nur formal dar und verweisen auf die von *L. Fantappiè* gegebene Rechtfertigung<sup>7)</sup>:

Der Operator  $\mathfrak{J}$  wird durch eine gewöhnliche Zahlenvariable  $\lambda$ ,  $v(x, y)$  durch eine noch von  $\lambda$  abhängige Funktion  $\bar{v}$  ersetzt. Damit wird der Gleichung (12) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1 - a \lambda) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - (b - (c - a') \lambda) \bar{v} = 0$$

zugeordnet. Unter Berücksichtigung von (9) lautet ihre Lösung

$$\bar{v}(\lambda, y) = e^{(y-\eta) a(\xi) + \int_{\xi}^x \frac{b-(c-a')\lambda}{1-a\lambda} dx} . \quad (13)$$

$\bar{v}$  hängt natürlich auch von  $x$ ,  $\xi$  und  $\eta$  ab. Diese Größen spielen aber für den nächsten Schritt nur die Rolle von Parametern.

Der inverse Vorgang, d. h. die Ersetzung von  $\lambda$  durch den Operator  $\mathfrak{J}$  und die Berechnung von  $v(x, y; \xi, \eta)$  wird durch die in § 1 angegebene Formel (6) ermöglicht. Denn  $\bar{v}(\lambda, y)$  ist eine in der Umgebung von  $\lambda = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\lambda$ . Ersetzen wir in (6)  $t$  durch  $y$  und  $t_0$  durch  $\eta$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} v(x, y; \xi, \eta) &= \bar{v}(\mathfrak{J}, y) = \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\eta}^y e^{\frac{y-\tau}{\lambda}} \bar{v}(\lambda, \tau) d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dy} \left\{ \int_{\eta}^y e^{\frac{y-\tau}{\lambda} + (y-\eta) a(\xi)} d\tau \right\} e^{\int_{\xi}^x \frac{b-(c-a')\lambda}{1-a\lambda} dx} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{1}{1 - \lambda a(\xi)} \left\{ e^{\frac{y-\eta}{\lambda}} - a(\xi) e^{(y-\eta) a(\xi)} \right\} e^{\int_{\xi}^x \frac{b-(c-a')\lambda}{1-a\lambda} dx} d\lambda . \end{aligned} \quad (14)$$

Der zweite Summand in der Klammer bildet zusammen mit den Faktoren vor und hinter der Klammer eine in  $\lambda = 0$  reguläre Funktion von  $\lambda$ .

<sup>7)</sup> *Fantappiè* (2), p. 23 ff., p. 35. Hier wird auch die Verwendung des Operators  $\mathfrak{J}$  zur Auflösung der Riemannschen Gleichung angedeutet.

Das Residuum im Nullpunkt ist daher Null. Somit lautet schließlich das Resultat :

$$v(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{1}{\lambda(1 - \lambda a(\xi))} e^{\frac{y-\eta}{\lambda} + \int_{\xi}^x \frac{b-(c-a')\lambda}{1-a\lambda} dx} d\lambda . \quad (15)$$

In *Spezialfällen* führen die beiden Integrationen auf bekannte Funktionen. Sind z. B. die Koeffizienten  $a, b, c$  als konstant vorausgesetzt, so ergibt sich mit Hilfe der Residuenformel für die *Besselsche Funktion* erster Art  $J_0(z)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda r + \frac{s}{\lambda}} d\lambda = J_0[2\sqrt{rs}]$$

nach kurzer Rechnung die bekannte Lösung<sup>8)</sup>

$$v(x, y; \xi, \eta) = e^{b(x-\xi)+a(y-\eta)} J_0[2\sqrt{(c-ab)(x-\xi)(y-\eta)}] . \quad (16)$$

Ohne zusätzliche Schwierigkeiten läßt sich auch der Fall, wo  $a$  zwar eine Konstante,  $b$  und  $c$  aber beliebige stetige Funktionen von  $x$  sind, auf die Besselsche Funktion  $J_0(z)$  zurückführen. Dies liegt daran, daß sich der Exponent der  $e$ -Funktion in Formel (15) als lineare Funktion von  $\lambda$  darstellen läßt.

### § 3. Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Um die Fantappièsche Integrationsmethode nachher besser mit dem Verfahren der Laplace-Transformation vergleichen zu können, gehen wir von neuem von der Differentialgleichung (8) aus :

Die Laplace-Transformation hat sich auf die Variable  $y$  zu beziehen. Da nun das Laplace-Integral (1) die untere Grenze 0 hat,  $v(x, y)$  aber für  $y = \eta$  gegeben ist<sup>9)</sup>, so haben wir die vorbereitende Transformation

$$Y = y - \eta , \quad V(x, Y) = v(x, y) \quad (17)$$

auszuführen. Mit der neuen Variablen lautet (8)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial Y} - a(x) \frac{\partial V}{\partial x} - b(x) \frac{\partial V}{\partial Y} + (c(x) - a'(x)) V = 0 . \quad (18)$$

Die Randbedingungen (9) und (10) gehen über in

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} - b V \right)_{Y=0} = 0 , \quad V(\xi, Y) = e^{Y a(\xi)} . \quad (19)$$

<sup>8)</sup> *Riemann* (1), p. 174.

<sup>9)</sup> Von hier an schreiben wir statt  $v(x, y; \xi, \eta)$  der Einfachheit halber nur  $v(x, y)$ .

Die Laplace-Transformation werde nunmehr festgelegt durch

$$\mathfrak{L} V(x, Y) = \int_0^{\infty} e^{-sY} V(x, Y) dY = \varphi(x, s) . \quad (20)$$

Allerdings müssen wir an dieser Stelle die zunächst unkontrollierbare Voraussetzung machen, daß die unbekannte Funktion  $V(x, Y)$  sowie  $\frac{\partial V}{\partial Y}$   $\mathfrak{L}$ -transformierbar seien, d. h. daß das in (20) auftretende uneigentliche Integral für hinreichend großes  $s$  konvergiere. Auf diese Schwierigkeit werden wir in § 4 zurückkommen.

Benützen wir jetzt das Grundgesetz der Laplace-Transformation für die Ableitung einer Funktion<sup>10)</sup>, nämlich

$$\mathfrak{L} \frac{\partial V}{\partial Y} = s \varphi(x, s) - V(x, 0) ,$$

so wird die gegebene Differentialgleichung (18) wegen (19) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(s - a) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (bs - (c - a')) \varphi = 0 \quad (21)$$

transformiert, wobei als Randbedingung aus (19) überdies

$$\varphi(x, s)_{x=\xi} = \mathfrak{L} V(\xi, Y) = \int_0^{\infty} e^{-sY + a(\xi)Y} dY = \frac{1}{s - a(\xi)} \quad (22)$$

folgt. Die Lösung von (21) lautet mit Rücksicht auf (22)

$$\varphi(x, s) = \frac{1}{s - a(\xi)} e^{\int_{\xi}^x \frac{bs - (c - a')}{s - a} dx} . \quad (23)$$

Es bleibt noch übrig, die inverse Transformation  $\mathfrak{L}^{-1}$  auszuführen, um aus  $\varphi(x, s)$  die gesuchte Funktion  $V(x, Y)$  zu gewinnen. Diese inverse Transformation wird hier durch einen glücklichen Umstand wesentlich erleichtert. Denn  $\varphi(x, s)$  gehört offenbar zu derjenigen Klasse von analytischen Funktionen von  $s$ , deren absoluter Betrag sich durch einen Bruch

$$\frac{A}{|s - a|} , \quad A, a = \text{konst.}$$

für  $s \rightarrow \infty$  nach oben abschätzen läßt. Bezeichnet  $\psi(s)$  eine beliebige Funktion dieser Klasse, so gilt nach einem Ergebnis von *S. Pincherle*<sup>11)</sup>

<sup>10)</sup> siehe z. B. *Doetsch* (1), p. 152.

<sup>11)</sup> *Pincherle* (1), p. 128 ff., *Doetsch* (1), p. 64, Satz 2. Die oben im Text gegebene Formulierung ist nicht die übliche. Man pflegt sich vielmehr auf die Funktion  $F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\psi(s)$  zu beziehen und von ihr zu fordern, daß sie vom *Exponentialtypus* sei.

$$\mathfrak{L}^{-1} \psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{ts} \psi(s) ds, \quad (24)$$

wo  $L$  ein endlicher, geschlossener Integrationsweg der  $s$ -Ebene ist, der alle Singularitäten von  $\psi(s)$  einschließt.

Wenden wir (24) für  $t = Y$  auf (23) an und ersetzen  $Y$  wieder durch  $y - \eta$ , so folgt endlich

$$v(x, y) = \mathfrak{L}^{-1} \varphi(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{s - a(\xi)} e^{(y-\eta)s + \int_{\xi}^x \frac{bs - (c-a')}{s-a} dx} ds, \quad (25)$$

wo  $L$  alle Singularitäten von  $\varphi(x, s)$  in bezug auf  $s$  einschließt. Um einzusehen, daß dieses Resultat mit (15) übereinstimmt, hat man bloß die neue Variable  $\lambda = \frac{1}{s}$  einzuführen und zu beachten, daß  $L$  nach einem Zeichenwechsel in einen den Nullpunkt  $\lambda = 0$  im positiven Sinn umschließenden Integrationsweg  $C_0$  übergeht, der die Singularitäten von  $\varphi\left(x, \frac{1}{\lambda}\right)$  ausschließt.

#### § 4. Diskussion der Voraussetzungen, unter denen die Laplace-Transformation und der Operator $\mathfrak{J}$ zur Integration führen

Das in § 2 und § 3 betrachtete Beispiel erleichtert uns die Aufgabe, die beiden Integrationsverfahren auf ihre Anwendbarkeit und Wirksamkeit hin zu prüfen.

Beide Verfahren sind nur auf lineare Differentialgleichungen anwendbar, deren Koeffizienten von derjenigen Variablen unabhängig sind, auf welche sich der Operator bezieht. Gemein ist ihnen ferner, daß sie sich vor allem für Anfangswertprobleme eignen. Auf ganz erhebliche Unterschiede stoßen wir jedoch, wenn wir bei beiden Verfahren die Bedingungen prüfen, unter denen die erforderlichen Integrationen ausgeführt werden können.

Beginnen wir mit der *Laplace-Transformation*: Das durch (1) definierte Laplace-Integral erstreckt sich über ein unendliches Intervall. Von den zu transformierenden Funktionen muß daher verlangt werden, daß sie im Intervall  $(0, \infty)$  überhaupt definiert seien, und daß überdies das uneigentliche Integral (1) konvergiere. Beide Forderungen brauchen bei einer gegebenen Differentialgleichung keineswegs erfüllt zu sein. Betrachten wir z. B. eine *unhomogene* Differentialgleichung

$$L(u) = f(x, y),$$

wo  $L$  einen gegebenen linearen Differentialausdruck bezeichnet. Das „Störglied“  $f(x, y)$  ist oft nur stückweise und nur für endliche Gebiete der  $X, Y$ -Ebene definiert. In einem solchen Fall ist die Anwendung des Laplace-Operators auf  $f(x, y)$  bezüglich der Variablen  $x$  oder  $y$  ausgeschlossen oder kann höchstens unter zusätzlichen Voraussetzungen ermöglicht werden, welche dem gegebenen Problem völlig fremd sind. Aber selbst wenn sich der Definitionsbereich von  $f(x, y)$  ins Unendliche erstrecken sollte, so ist noch keineswegs gesagt, daß das Laplace-Integral konvergiert.

Noch schwerer wiegen diese Einwände, wenn man statt der bekannten Funktionen, wie es in der obigen Gleichung  $f(x, y)$  ist, die unbekannten Funktionen betrachtet. Meistens weiß man a priori nichts über das Verhalten solcher Funktionen im Unendlichen. Löst man das betreffende Problem gleichwohl mit Hilfe der Laplace-Transformation, so hat man stillschweigend Annahmen gemacht, welche hinterher, wenn die vermutliche Lösung vorliegt, verifiziert werden müssen. Die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation läßt sich also erst a posteriori rechtfertigen.

Hiezu gesellen sich noch andere Nachteile: Die *inverse* Laplace-Transformation, die man bei jeder Aufgabe am Ende durchzuführen hat, ist an weitere Voraussetzungen gebunden, die sich zwar zumeist nicht als einschneidend erweisen, die aber schwer zu überblicken sind<sup>12)</sup>. Wenn die bekannten Funktionen einer Differentialgleichung (Koeffizienten, Störglieder) fest gegeben sind, so bedient man sich praktisch ausführlicher Tabellen für die direkte und die inverse Laplace-Transformation. Bleiben aber die bekannten Funktionen „variabel“, sieht man also von ganz speziellen Beispielen ab, so existiert keine allgemein gültige Formel für die inverse Laplace-Transformation. Dies gilt insbesondere für die komplexe Umkehrformel

$$\mathfrak{L}^{-1} \varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} \varphi(s) ds \quad (26)$$

( $x > 0$  hinreichend groß). Sie kann, blindlings angewandt, zu ganz falschen Ergebnissen führen<sup>13)</sup>. Formel (26) bietet nicht unbeträchtliche analytische Schwierigkeiten, die sich zweifellos aus der unglücklichen Lage des Integrationsweges erklären. Denn dieser führt gerade durch die Singularität der  $e$ -Funktion und mithin des Integranden hindurch. Nur unter günstigen Umständen, wie ein solcher zufällig im Beispiel von § 3 vorlag,

<sup>12)</sup> *Doetsch* (1), p. 125 ff. Vgl. ferner das Beispiel in *Doetsch* (2), p. 52—55.

<sup>13)</sup> s. das Beispiel in *Doetsch* (1), p. 89.



kann der Integrationsweg so gelegt werden, daß der Integrand in allen seinen Punkten regulär ist.

In seinem Lehrbuch über die Laplace-Transformation sagt *G. Doetsch* über alle diese Mängel<sup>14)</sup>: „... die Hauptschwierigkeit bei unserer Methode besteht darin, von der auf Grund einer größeren Zahl von Voraussetzungen erhaltenen Funktion nachzuweisen, daß sie *wirklich eine Lösung* ist, und unter welchen weitesten Bedingungen sie diese Eigenschaft hat. Diese Aufgabe ist deshalb so schwierig, weil die Lösung in einem reichlich komplizierten Ausdruck besteht, nämlich durchweg durch ‚singuläre‘ Integrale dargestellt wird.“

Ganz anders verhält es sich mit der *Fantappièschen Methode*. Zunächst einmal kann der Operator  $\mathfrak{J}$  bei den für Differentialgleichungen üblichen Voraussetzungen auf bekannte und auf unbekannte Funktionen ohne weiteres angewandt werden, da eben das Integrationsintervall in (2) endlich ist und, wenn nötig, hinreichend klein gewählt werden kann. Wesentlich ist, daß für die Integrationen nur solche Funktionswerte herangezogen werden, welche dem gegebenen Problem eigen sind. Der Operator  $\mathfrak{J}$  trägt insbesondere der Tatsache Rechnung, daß für gewisse Anfangswertprobleme nur „lokale“ Lösungen sinnvoll sind.

Auch im weiteren Verlauf der Rechnung sind keine umständlichen oder gar unkontrollierbaren Voraussetzungen zu machen. Es muß nur gefordert werden, daß die formal durch Operatorenkalkül erhaltene Funktion  $g(\lambda, t)$  eine gewisse funktionentheoretische Eigenschaft besitze. Damit nämlich Formel (5) oder (6) anwendbar sind, muß  $g(\lambda, t)$  als eine in der Umgebung von  $\lambda = 0$  reguläre analytische Funktion von  $\lambda$  vorausgesetzt werden (siehe § 1).

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist diese Voraussetzung stets erfüllt, wie man aus § 5 sofort entnehmen kann. Bei partiellen Differentialgleichungen dagegen können „singuläre Fälle“ auftreten, die zwar dem Verfahren der Laplace Transformation zugänglich sind, in denen aber die Methode des Operators  $\mathfrak{J}$  versagt, weil nämlich  $g(\lambda, t)$  für  $\lambda = 0$  singulär ist. Ein Beispiel dafür ist die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 ,$$

sofern man mit Rücksicht auf gewisse, für die Anwendungen wichtige Randbedingungen den Operator  $\mathfrak{J}$  nur in bezug auf  $t$  und nicht in bezug

---

<sup>14)</sup> *Doetsch* (1), p. 385. Vgl. ferner *Doetsch* (2), p. 57.

auf  $x$  anwenden kann. In diesem Falle wird  $g(\lambda, t)$  eine Funktion von  $\sqrt{\lambda}$  und besitzt in  $\lambda = 0$  einen Verzweigungspunkt<sup>15)</sup>.

Man beachte wohl, daß  $g(\lambda, t)$  in der Variablen  $t$  nicht als analytisch vorausgesetzt werden muß. Ja sogar Unstetigkeiten sind zugelassen, sofern nur das auf die Variable  $\tau$  bezügliche Integral in (5) oder (6) einen Sinn hat. Dies hat zur Folge, daß Störglieder in unhomogenen Differentialgleichungen Sprungstellen aufweisen dürfen. Als Beispiel seien die in der mathematischen Physik und der Elektrotechnik auftretenden *impulsiven Funktionen* (*fonctions de Dirac*) erwähnt. Sie setzen der Fantappièschen Methode ebensowenig Schwierigkeiten entgegen wie der Laplace-Transformation.

## § 5. Vergleich des formalen Vorgehens

In § 4 haben wir dargelegt, welche Unzulänglichkeiten der direkten und der inversen Laplace-Transformation anhaften, wenn man sie zur Integration von Differentialgleichungen benützen will. Ferner haben wir gesehen, wieviel einfacher und klarer die Voraussetzungen sind, unter denen die Methode des Operators  $\mathfrak{J}$  anwendbar ist.

Man könnte nun versucht sein, zu vermuten, die Methode der Laplace-Transformation gleiche ihre Nachteile durch ein formal einfacheres Vorgehen aus, so daß sie sich für praktische Zwecke, etwa für die Arbeit des Ingenieurs besser eigne als die Fantappièsche Operatorenmethode. Dies ist jedoch keineswegs der Fall. Es lassen sich zwar Beispiele finden, wo bald das eine und bald das andere Verfahren formal ein wenig rascher zum Ziele führt. Aber im allgemeinen ist die „Rechenarbeit“ dieselbe.

Um dies zu erläutern und zugleich die enge *formale* Verwandtschaft der beiden Verfahren darlegen zu können, betrachten wir eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t) \quad (27)$$

und setzen der Einfachheit halber verschwindende Anfangswerte voraus :

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (28)$$

Setzen wir

$$\mathfrak{L} y(t) = \eta(s), \quad \mathfrak{L} f(t) = \varphi(s),$$

---

<sup>15)</sup> Gestatten es die Anfangsbedingungen, daß  $\mathfrak{J}$  in bezug auf die Variable  $x$  angewandt werden kann, so lassen sich parabolische Gleichungen auch mit Hilfe von  $\mathfrak{J}$  lösen, s. *Fantappiè* (4), (5), (6). Im übrigen stehen noch andere von *L. Fantappiè* betrachtete Operatoren zur Verfügung, mit deren Hilfe auch die für  $\mathfrak{J}$  „singulären“ Fälle gelöst werden können, s. *Fantappiè* (7), (9).

so führt die Laplace-Transformation (1) die Differentialgleichung (27) unmittelbar in die algebraische Gleichung

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) \cdot \eta(s) = \varphi(s) \quad (29)$$

über. Durch Residuenkalkül oder mit Hilfe von Tabellen für die Laplace-Transformation verschafft man sich

$$q(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1} \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

und erhält dann bekanntlich die Lösung der Aufgabe mit Hilfe des *Faltungssatzes* in der Gestalt<sup>16)</sup>

$$y(t) = \int_0^t q(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Dieselbe Aufgabe lösen wir auch mit Hilfe des durch (2) definierten Operators  $\mathfrak{J}$ . Wir setzen in (2)  $t_0 = 0$  und wenden  $\mathfrak{J}$   $n$ -mal auf (27) an. Mit Rücksicht auf (28) ergibt sich dann die Integralgleichung

$$(1 + a_1 \mathfrak{J} + a_2 \mathfrak{J}^2 + \dots + a_n \mathfrak{J}^n) y(t) = \mathfrak{J}^n f(t). \quad (31)$$

Dividieren wir formal durch die Klammer auf der linken Seite und benutzen die Formel (4), so folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\mathfrak{J}^n}{1 + a_1 \mathfrak{J} + \dots + a_n \mathfrak{J}^n} f(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\lambda}} \frac{\lambda^n}{1 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n} f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\lambda^{n-2} e^{\frac{t-\tau}{\lambda}}}{1 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n} d\lambda \right) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis formal mit (30). Dem in der Klammer von (32) stehenden Residuenintegral entspricht in (30) offenbar die Funktion  $q(t - \tau)$ . Die praktische Auswertung dieses Residuenintegrals kann analog wie für die Laplace-Transformation durch eine passende Tabelle von Residuen erleichtert werden.

---

<sup>16)</sup> Doetsch (1), p. 161.

Das andere Integral in (32), welches sich auf die Variable  $\tau$  bezieht, ist, wie (30) zeigt, nichts anderes als das in der Theorie der Laplace-Transformation bekannte *Faltungintegral*.

Diese enge formale Analogie könnte leicht darüber hinwegtäuschen, daß zwischen den beiden Verfahren inhaltlich wesentliche Unterschiede bestehen. Auf Grund des in § 4 Gesagten ist es in der Tat ausgeschlossen, das eine Verfahren auf das andere reduzieren zu können.

(Eingegangen den 2. April 1948.)

#### L I T E R A T U R

- M. Carafa*: (1) Risoluzione effettiva, mediante integrali definiti, dell'equazione differenziale binomia:  $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)y = f(x)$ , Rend. Accad. Naz. Lincei, cl. sc. fis. mat. nat., ser. 8, vol. 2 (1947), p. 152—158.  
 (2) Risoluzione dell'equazione differenziale generale lineare binomia, di ordine qualunque, mediante un numero finito di integrazioni, Mem. Soc. Ital. Sc. detta dei XL, ser. 3, vol. 26 (1947), p. 1—115.  
 (3) Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, mediante un numero finito di integrazioni, Rend. Accad. Naz. Lincei, ser. 8, vol. 2 (1947), p. 521—527.
- G. Doetsch*: (1) Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (1937).  
 (2) Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch, Monographie (1947), p. 1—185.
- L. Fantappiè*: (1) I funzionali analitici, Mem. Accad. Naz. Lincei, ser. 6, vol. 3 (1930), fasc. 11, p. 451—683.  
 (2) La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali, Mem. Accad. Italia, cl. sc. fis. mat. nat., vol. 1 (1930), p. 1—35.  
 (3) Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 57 (1933), p. 1—59.  
 (4) Soluzione con quadrature del problema di Cauchy-Kowalewsky per le equazioni di tipo parabolico, Rend. Accad. Naz. Lincei, cl. sc. fis. mat. nat., ser. 6a, vol. 17 (1933), p. 897—902.  
 (5) Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale, a coefficienti costanti, Rend. Accad. Naz. Lincei, cl. sc. fis. mat. nat., ser. 6a, vol. 18 (1933), p. 266—270.  
 (6) Intégration par quadratures de l'équation parabolique générale, à coefficients constants sur les caractéristiques, C. R. Acad. Paris, Vol. 197 (1933), p. 969—971.

- (7) Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque, *Mem. Accad. Italia*, cl. sc. fis. mat. nat., vol. 8 (1937), p. 613—651.
- (8) Il punto di vista reale e quello analitico nella teoria delle equazioni a derivate parziali, *Boll. Unione Mat. Ital.*, ser. 2, 3. Jg. (1941), p. 188—195.
- (9) Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque, *Rend. Accad. Italia*, ser. 7, vol. 2 (1941), fasc. 12.
- (10) L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi, *Ann. Mat. pur. appl.*, ser. 4, vol. 22 (1943), p. 181—289.
- L. Fantappiè-F. Pellegrino*: (1) *La théorie des fonctionnelles analytiques*, wird in der Edition du Griffon, Neuchâtel, erscheinen.
- H. G. Haefeli-F. Pellegrino*: (1) Über die Stetigkeit der analytischen Funktionale, *Comm. Math. Helv.*, vol. 21 (1948), p. 225.
- J. Horn*: (1) *Partielle Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (1929).
- S. Pincherle*: (1) Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni, *Mem. Accad. Bologna* (4), vol. 8 (1887), p. 125—143.
- B. Riemann*: (1) Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, *Ges. Werke*, 2. Aufl., p. 156—175.