

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen.
Autor: Petersson, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19197>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen

Von HANS PETERSSON, Hamburg

1. Bei der Untersuchung metrischer Eigenschaften der automorphen Funktionen hat sich bisher gezeigt, daß man zu völlig übersichtlichen Darstellungen für die Skalarprodukte ganzer automorpher Formen nur gelangt, wenn der eine der Skalarfaktoren als Linearkombination Poincaréscher Reihen gegeben ist, während vom andern gewisse Fourier- oder analoge Entwicklungskoeffizienten bekannt sind¹⁾. In der vorliegenden Abhandlung entwicke ich, ausgehend von einem Ansatz von Rankin²⁾, ein Verfahren zur Bestimmung des Skalarprodukts zweier ganzen Modulformen höherer Stufe aus deren Fourierreihen. Als Ergebnis kann eine Formel angesehen werden, die dieses Skalarprodukt durch das Residuum einer gewissen Dirichletreihe ausdrückt; obwohl damit das ursprüngliche auf ein neues Problem reduziert wird, gelingt auf diesem Wege erstmalig die numerische Berechnung eines allgemein bestimmten Systems solcher Skalarprodukte.

Für die Modulformen höherer Stufe sind mit den genannten beiden Ansätzen nunmehr zwei Möglichkeiten gegeben, Skalarprodukte explizit zu bestimmen. Ein etwas genauerer Vergleich der beiden Verfahren ist nicht ohne Interesse und soll deshalb hier folgen.

Vorgelegt sei die Aufgabe, das Skalarprodukt (f, g) zu berechnen; dabei seien die ganzen Modulformen $f(\tau)$ und $g(\tau)$ (von der gleichen reellen Dimension $-r$) durch ihre Fourierentwicklungen gegeben, d. h. es seien die n -ten Fourier-Koeffizienten b_n, c_n von $f(\tau)$ bzw. $g(\tau)$ bekannt. Dann kann man entweder das hier dargestellte Verfahren an-

¹⁾ H. Petersson, Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Annalen 117 (1940); Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 14 (1941).

²⁾ R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II: The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, Proc. Cambr. Philos. Soc. Vol. 35 (1939).

wenden und gelangt so zu der Aufgabe der Residuenbestimmung der Dirichletreihe mit dem n -ten Koeffizienten $b_n \bar{c}_n$. Oder aber man kann versuchen, die Darstellung von $f(\tau)$ als Linearkombination endlich vieler Poincaréschen Reihen $G(\tau, \nu)$, etwa des parabolischen Typus zur Spitze ∞ , heranzuziehen. Gelingt es, die dabei auftretenden Koeffizienten λ_ν zu berechnen, so erhält man das Skalarprodukt in der einfachen Gestalt $e_r \sum_\nu \lambda_\nu \alpha_\nu \bar{c}_\nu$ mit einer numerischen Konstanten e_r und elementaren konstanten Faktoren α_ν . Die genannte Residuenbestimmung ist also mit der Bestimmung der Koeffizienten λ_ν äquivalent, und diese Koeffizientenbestimmung setzt im allgemeinen voraus, daß die Fourier-Koeffizienten der Poincaré-Reihen $G(\tau, \nu)$ in ihren wesentlichen Eigenschaften bekannt sind. In dieser Forderung begegnen wir einem der schwierigsten der noch ungelösten Probleme aus der Theorie der Modulfunktionen. Durch seine Beziehung zu den Residuen der erwähnten Dirichletreihen wird ein Zusammenhang aufgedeckt, der die Poincaré-Reihen in eine engere Verbindung zu den Begriffen der klassischen analytischen Zahlentheorie bringt.

Aus dem hier kurz dargestellten Sachverhalt geht hervor, daß man das an erster Stelle genannte Verfahren der Residuenbestimmung vornehmlich dann anwenden wird, wenn es sich in der gestellten Aufgabe um eine konkrete Berechnung handelt. Von dieser Art sind die in den letzten Abschnitten der Arbeit mitgeteilten numerischen Formeln. Ihr wesentlicher Wert liegt u. a. darin, daß sie Beispiele für die arithmetischen Eigenschaften der Skalarprodukte arithmetisch ausgezeichneter ganzer Modulformen liefern.

In gewissen anderen Fällen hat sich bereits gezeigt, daß den Skalarprodukten metrisch und arithmetisch ausgezeichneter Modulformen eine arithmetische Bedeutung zukommt³⁾. Betrachtet man etwa die von Hecke eingeführten modifizierten Eisensteinreihen $G_r^*(\tau, a_1, a_2, N)$ (r ganz und ≥ 3) und ihre Analoga für eine beliebige Kongruenzuntergruppe Γ der Modulgruppe $\Gamma(1)$, so erweisen sich diese ganzen Modulformen, die wir allgemein mit $E_{-r}(\tau, \alpha, \Gamma)$ ($\alpha = \{a_1, a_2\}$) bezeichnen wollen, als metrisch und arithmetisch in hohem Maße ausgezeichnet. Einerseits nämlich stehen sie auf der vollen Schar der ganzen Spitzenformen der gleichen Dimension $-r$ und der gleichen Gruppe Γ senkrecht, andererseits verhält sich die einzelne Funktion $E_{-r}(\tau, \alpha, \Gamma)$ in den Spitzen eines Fundamentalbereichs \mathfrak{F} von Γ in der Weise, daß sie in allen

³⁾ H. Petersson, Metrische Theorie der Eisensteinreihen, Monographie, erscheint später mit erweitertem Inhalt in Einzelabhandlungen.

Spitzen mit genau einer Ausnahme verschwindet, in dieser einen Spitz aber — bei Wahl der üblichen Ortsvariablen — das konstante Glied 1 oder 2 aufweist. Überdies gestattet jede Funktion $E_{-r}(\tau, a, \Gamma)$ Entwicklungen nach diesen Ortsvariablen mit Koeffizienten, die für passendes N dem Körper der N -ten Einheitswurzeln angehören und hier als Brüche mit einem gemeinsamen festen Nenner geschrieben werden können.

Die dabei verwendete Metrik beruht auf der üblichen Erklärung des Skalarprodukts (f, g) der ganzen Modulformen $f(\tau), g(\tau)$, die zur gleichen Gruppe Γ , zur gleichen reellen Dimension $-r$ und zum gleichen Multiplikatorsystem v des Betrages 1 gehören: Für jeden (etwa als hyperbolisches Polygon auffaßbaren) Fundamentalbereich \mathfrak{F} von Γ ist

$$(f, g) = (f(\tau), g(\tau)) = (f(\tau), g(\tau); \Gamma) = \iint_{\mathfrak{F}} f(\tau) \bar{g}(\tau) y^{r-2} dx dy. \quad (1)$$

Wir nennen diese Funktionen $f(\tau), g(\tau)$ Modulformen $\{\Gamma, -r, v\}$ oder bei ganzem r , wenn alle Multiplikatorwerte v gleich 1 sind, auch Modulformen $\{\Gamma, -r\}$.

Die oben mit $E_{-r}(\tau, a, \Gamma)$ bezeichneten ganzen Modulformen $\{\Gamma, -r\}$ sind durch die genannten Eigenschaften, und zwar bereits durch deren erste und zweite, eindeutig bestimmt. Daher bilden die Skalarprodukte je zweier verschiedenen $E_{-r}(\tau, a, \Gamma)$ ein durch Γ und r völlig festgelegtes endliches Zahlensystem \mathfrak{Z} . (Das Skalarprodukt einer Reihe $E_{-r}(\tau, a, \Gamma)$ mit sich selbst existiert nicht.) Wird die Gruppe Γ auf irgendeinen bestimmten Typus von Kongruenzgruppen einer der Stufen $N=1, 2, 3, \dots$ eingeschränkt, so hängt \mathfrak{Z} nur noch von den natürlichen Zahlen N, r ab, und eine weitere Spezialisierung von Γ auf gewisse numerisch fixierte Matrizengruppen bewirkt, daß \mathfrak{Z} durch r allein eindeutig bestimmt ist. Dies gilt insbesondere für den einfachsten in Betracht kommenden Fall eines solchen numerisch spezialisierten Γ , d. i. die von

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2)$$

erzeugte Gruppe $\Gamma = \Gamma_s$ des Theta-Nullwerts

$$\vartheta_3(\tau) = \vartheta(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau m^2}. \quad (3)$$

Hier enthält ein Fundamentalbereich \mathfrak{F} von $\Gamma = \Gamma_s$ die für unser Problem niedrigst-mögliche Anzahl von genau zwei inäquivalenten Spitzen, und \mathfrak{Z} besteht aus einer einzigen, nur von dem geraden ganzzahligen Parameter $r \geq 4$ abhängigen Zahl $\tilde{\omega}_r$.

Das in der Abhandlung³⁾ entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Skalarprodukte allgemeiner automorphen Eisensteinreihen reeller Dimension ergibt im Spezialfall der Modulformen $\{\Gamma_0, -r\}$, daß $\tilde{\omega}_r$ bis auf einen angebbaren rationalen Zahlfaktor mit $\pi^{-(r-1)} \zeta(r-1)$ übereinstimmt (r gerade und ≥ 4). Es läge also nahe, die $\tilde{\omega}_r$ als die Analoga der Bernoullischen Zahlen für die Werte der Riemannschen Zetafunktion in den ungeraden Zahlen anzusehen. Hierzu sei bemerkt, daß sich einerseits die verwendete Gruppe Γ_0 in besonders einfacher Weise kennzeichnen läßt, und daß andererseits $\tilde{\omega}_r$ der bis auf angebbare rationale Zahlfaktoren einzige Wert ist, der als Skalarprodukt von ganzen Modulformen $\{\Gamma_0, -r\}$ mit der oben genannten Orthogonalitätseigenschaft überhaupt auftreten kann, vorausgesetzt lediglich, daß die konstanten Glieder dieser Modulformen in den Spitzen von \mathfrak{F} rational sind. Als spezielle Formel besonders einfacher Bauart sei aus diesem Zusammenhang die folgende mit den Theta-Nullwerten

$$\vartheta_0(\tau) = \vartheta_3(\tau + 1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{\pi i \tau m^2}, \vartheta_2(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau (m+\frac{1}{2})^2} \quad (4)$$

gebildete Relation zitiert :

$$\zeta(3) = \frac{\pi^3}{7} (\vartheta_3^8, (\vartheta_0 \vartheta_2)^4; \Gamma_0) . \quad (5)$$

Eine befriedigende Analogie der $\tilde{\omega}_r$ zu den Bernoullischen Zahlen wäre jedoch erst dann hergestellt, wenn es gelänge, die arithmetische Natur der $\tilde{\omega}_r$ aufzuklären. Hierüber ist gegenwärtig nichts bekannt. Es läge nahe, zu vermuten, daß das Skalarprodukt zweier ganzen Modulformen rationaler Dimension, die zu einer Kongruenzgruppe in $\Gamma(1)$ gehören, und deren Multiplikatoren sämtlich Einheitswurzeln sind, falls es existiert und nicht verschwindet, transzendent ist, vorausgesetzt, daß die Entwicklungskoeffizienten dieser Modulformen in den Spitzen bei Wahl der üblichen Ortsvariablen einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades angehören und sich als Brüche mit einem gemeinsamen festen Nenner schreiben lassen. Aus diesem Satze würde die Transzendentz aller $\tilde{\omega}_r$ und damit aller $\pi^{-(r-1)} \zeta(r-1)$ unmittelbar folgen. Aber die Beispiele von Modulformen der Dimension $-\frac{3}{2}$ in der vorliegenden Abhandlung zeigen, daß diese Vermutung nicht in der angegebenen Allgemeinheit zu treffen kann.

Das im folgenden entwickelte Verfahren zur Berechnung der Skalarprodukte führt bei allgemeinen Theta-Null- und Teilwerten, u. a. also auch bei den Funktionen $\eta(\tau) = \sqrt[24]{\Delta(\tau)}$ und $\eta^3(\tau) = \sqrt[8]{\Delta(\tau)}$, zu numerischen Ergebnissen. Im Falle der Dimension $-\frac{1}{2}$ entstehen Werte, die sich

von π um rationale oder reell-quadratisch irrationale Faktoren unterscheiden, im Falle der Dimension $-\frac{3}{2}$ sind die Skalarprodukte selbst rational oder reelle quadratische Irrationalitäten.

Die Durchführung der Beweise gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil (Abschnitt 2, 3, 4) kommen nur die Fälle zur Sprache, in denen das Produkt $f(\tau)g(\tau)$ in allen Spitzen verschwindet. Hier läßt sich die erste Identität (Satz 4, (20)) für beliebige Grenzkreisgruppen von erster Art mit der Spitze ∞ beweisen. Dagegen ergibt sich die Übereinstimmung des Skalarprodukts (f, g) mit dem durch gewisse elementare Faktoren modifizierten Residuum der erwähnten Dirichletreihe nur für Kongruenzuntergruppen Γ der Modulgruppe $\Gamma(1)$. Zum Beweise auf Grund von Satz 4 genügt die Heranziehung einfacher Umformungen der Eisensteinreihen nach dem Vorgang von Hecke ⁴⁾.

Im zweiten Teil (Abschnitt 5, 6, 7) handelt es sich um die Dimensionen $-r$ mit $0 < r < 1$ und die Paare ganzer Modulformen $f(\tau), g(\tau)$ in $\{\Gamma, -r, v\}$ mit der Eigenschaft, daß $f(\tau)g(\tau)$ nicht in allen Spitzen verschwindet. Mit Hilfe der Primform-Logarithmen werden aus f und g ganze Modulformen von stetig veränderlicher reeller Dimension hergestellt, deren Produkt in allen Spitzen verschwindet, und auf die daher die im ersten Teil bewiesene Formel angewendet werden kann. Die allgemeine Schlußformel des Satzes 8 in Abschnitt 6 entsteht aus dieser durch einen Grenzübergang.

In den letzten Abschnitten 7 und 8 werden die allgemeinen Ergebnisse auf eine gewisse Klasse von einfachen Thetareihen angewendet. Welche arithmetischen Anwendungen zu erwarten sind, wird aus den Entwicklungen des Abschnitts 8 deutlich; hier gelingt es in einem Beispiel, die lineare Schar der zu den ganzen Spitzenformen orthogonalen Funktionen explizit aus ternären Thetareihen zusammenzusetzen.

Zu dem etwas komplizierten Approximationsverfahren des zweiten Teils, also zu der Heranziehung der Primform-Logarithmen und der automorphen Formen stetig veränderlicher Dimension, ist zu bemerken, daß die gleichen Hilfsmittel auch bei der Berechnung der Skalarprodukte der automorphen Eisensteinreihen, also etwa beim Beweise von (5), die entscheidende Rolle spielen. An den Schlußformeln der vorliegenden Abhandlung ist der Umstand hervorzuheben, daß sie zwar nur für Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe, aber für beliebige reelle Dimension und beliebige Multiplikatoren des Betrages 1 bewiesen wird.

⁴⁾ E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 5 (1927).

Bei Rankin tritt — stark spezialisiert und als Mittel zu ganz anderen Zwecken — zum ersten Male diejenige Umformung auf, die hier in Abschnitt 3 für allgemeine Grenzkreisgruppen von erster Art zu der Darstellung (20) von Satz 4 führt. Diese Umformung steht in engster Beziehung zu dem Verfahren, durch das in der Abhandlung ¹⁾ die metrischen Eigenschaften der Poincaréschen Reihen bestimmt werden. Abgesehen von der genannten Umformung sind die Methoden der vorliegenden Abhandlung von denen der Rankinschen Arbeit ²⁾ völlig verschieden.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man mit dem Verfahren der vorliegenden Abhandlung auch gewisse spezielle Ergebnisse der Untersuchung ³⁾ ableiten kann. So erhält man die Werte der Skalarprodukte der Eisensteinreihen von gerader Dimension $-r \leq -4$ mit Multiplikatoren Eins zu den Kongruenzgruppen $\Gamma_0(q)$ (q Primzahl) und ihren Transformierten, also insbesondere auch zur Gruppe Γ_0 des Theta-Nullwerts (3): $\vartheta(\tau)$, und damit den einleitend hervorgehobenen Sachverhalt über die Werte der Riemannschen $\zeta(s)$ für die ungeraden $s = k \geq 3$. Die Resultate von Fußnote 3 in dieser Richtung gehen über die hier erwähnten Sonderfälle weit hinaus. Sie geben die Werte der Skalarprodukte der automorphen Eisensteinreihen von reeller Dimension $-r$ unterhalb -2 mit beliebigen Multiplikatoren des Betrages Eins zu beliebigen Grenzkreisgruppen Γ von erster Art.

Hinsichtlich der Bezeichnungen werde folgendes verabredet:

Der konjugiert-komplexe Wert einer komplexwertigen Funktion $f_{i,j,k}(x, y, z, \dots)$ wird meistens mit $\bar{f}_{i,j,k}(x, y, z, \dots)$ bezeichnet. Gelegentlich werden Hinweise auf Gleichungen, Sätze und Zitate des Textes in eckigen Klammern gegeben.

Die obere Halbebene $y > 0$ der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ (x, y reell) wird mit \mathfrak{H} , die zweite Zeile einer Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\underline{S} = \{c, d\}$, die zweireihige Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit I , die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (N reell) mit U^N bezeichnet.

C_1, C_2, \dots bedeuten positive Konstanten; $C_k(f, g, \dots)$ gibt eine nur von f, g, \dots abhängige positive Zahl an.

Für einige allgemeine Begriffe und Konstruktionen der Theorie der automorphen Funktionen vgl. die Abhandlungen ^{1), 5)} des Verfassers.

2. Unter einer Grenzkreisgruppe von erster Art verstehen wir hier eine Matrizengruppe Γ von folgender Beschaffenheit:

⁵⁾ H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, II. Math. Annalen 115 (1938), im folgenden zitiert mit G I, G II.

Die Matrizen L von Γ haben die Gestalt $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit reellen Elementen und der Determinante $|L| = 1$. Die den L von Γ durch

$$\tau' = L\tau \equiv L(\tau) = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad (\tau = x + iy, \quad x \text{ reell}, \quad y > 0)$$

zugeordneten Substitutionen bilden eine Substitutionsgruppe $\bar{\Gamma}$, die in der oberen τ -Halbebene \mathfrak{H} einen kanonischen Fundamentalbereich \mathfrak{R} besitzt. Das Parkett der Bereiche $L\mathfrak{R}$ ($L \subset \Gamma$) verdichtet sich gegen die ganze reelle τ -Achse.

Kennzeichnend für jeden kanonischen Fundamentalbereich \mathfrak{R} ist, daß aus \mathfrak{R} durch Zuordnung äquivalenter Kantenzüge eine geschlossene Riemannsche Fläche \mathfrak{B} von endlichem Geschlecht p_0 entsteht, auf der die Kantenzüge eine kanonische Zerschneidung bestimmen. \mathfrak{H} ist universelle, über endlich vielen Punkten in vorgegebenen Ordnungen verzweigte Überlagerungsfläche von \mathfrak{B} . Das kanonische Schnittsystem besteht aus erstens p_0 Paaren von Rückkehrschnitten, deren zwei beliebige einen festen Punkt, den Kreuzungspunkt miteinander gemein haben, zweitens aus den vom Kreuzungspunkt zu den Verzweigungspunkten führenden Verzweigungsschnitten. Keine zwei Schnitte haben einen anderen Punkt als den Kreuzungspunkt miteinander gemein.

Die Verzweigungspunkte entsprechen den elliptischen und parabolischen Fixpunkten von Γ in \mathfrak{H} bzw. auf der reellen Achse oder im Unendlichen. \mathfrak{R} enthält aus jedem System untereinander äquivalenter solcher Fixpunkte genau einen Vertreter und zu jedem von diesen in dessen Nähe eine volle Umgebung von nach Γ inäquivalenten Punkten in \mathfrak{H} . Es kann und soll angenommen werden, daß \mathfrak{R} von endlich vielen hyperbolischen Strecken und Halbgeraden berandet wird. Die parabolischen Fixpunkte von Γ (d. h. die Fixpunkte parabolischer Substitutionen von $\bar{\Gamma}$) heißen parabolische Spitzen oder auch kurz Spitzen.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß Γ die Matrix $-I$ und daß $\bar{\Gamma}$ parabolische Substitutionen enthält; die erste dieser Voraussetzungen verursacht keine Beschränkung der Allgemeinheit. Bei gewissen Grenzkreisgruppen ist sie notwendig erfüllt, sie soll daher zunächst generell unterstellt werden. In den Sonderfällen solcher Γ , die $-I$ nicht enthalten, sind an den zu beweisenden Formeln geringfügige Modifikationen anzu bringen.

Ist $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spalte von Γ , so wird dabei stets A als reelle Matrix mit $|A| = 1$ angenommen, $\underline{A} = \{a_1, a_2\}$ geschrieben, unter N die kleinste positive Zahl derart verstanden, daß $P = A^{-1}U^N A \subset \Gamma$, und

$= \exp\left(2\pi i \frac{A\tau}{N}\right)$ als ortsuniformisierende Variable des Punktes ζ i. b. a.

Γ gewählt. Eine ganze automorphe Form $\{\Gamma, -r, v\}$ ist eine in \mathfrak{H} reguläre analytische Funktion $f(\tau)$, die dort überall den Transformationsgleichungen

$$f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r f(\tau) \quad (L \subset \Gamma, \underline{L} = \{\gamma, \delta\}) \quad (6)$$

genügt und für jede Spitze ζ von Γ eine Entwicklung von der Gestalt

$$f(\tau) = (a_1\tau + a_2)^{-r} f_A(A\tau), \quad f_A(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A, f) e^{2\pi i(n+\kappa)\frac{\tau}{N}} \quad (7)$$

zuläßt. Die hier auftretenden Werte $v(L)$ konstituieren ein (kohärentes) Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß alle Multiplikatorwerte den Betrag 1 haben. Unter dieser Voraussetzung existieren nicht-konstante ganze automorphe Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ einer reellen Dimension $-r$ nur für $r > 0$. Es sei also überdies $r > 0$. In (7) wird κ wie üblich durch

$$v(P) = e^{2\pi i \kappa} \quad (P = A^{-1} U^N A, \quad 0 \leq \kappa < 1)$$

und $(m_1\tau + m_2)^r$ für reelle $m_1, m_2 \neq 0, 0$ durch

$$- \pi < \arg(m_1\tau + m_2) \leq +\pi \quad (\tau \in \mathfrak{H})$$

bestimmt (G I, passim). Wir nehmen ferner an, daß $\bar{\Gamma}$ parabolische Substitutionen mit dem Fixpunkt ∞ enthalte, d. h. also, daß $\zeta = \infty$ eine Spitze von Γ sei. Dies bedeutet, daß $U^N \subset \Gamma$ mit passendem $N > 0$ trifft, und kann erforderlichenfalls durch eine auf Γ auszuübende Transformation mit einer reellen Matrix der Determinante 1 bewirkt werden.

Es bezeichne σ_0 die Anzahl der Spalten $\zeta = A^{-1}\infty$ eines kanonischen Fundamentalbereichs \mathfrak{K} von Γ . Wir zerlegen \mathfrak{K} in σ_0 Bereiche (Spitzensektoren) \mathfrak{B}_ζ von folgender Beschaffenheit: \mathfrak{B}_ζ enthält genau eine Spitze von \mathfrak{K} , nämlich ζ , und mit dieser eine volle Umgebung von nach Γ inäquivalenten Punkten in \mathfrak{H} . \mathfrak{B}_ζ wird wie \mathfrak{K} von endlich vielen hyperbolischen Strecken und Halbgeraden berandet. Zwei verschiedene solche Bereiche \mathfrak{B}_ζ haben höchstens Randpunkte miteinander gemein; der einzelne Bereich \mathfrak{B}_ζ besteht aus einem Gebiet und aus einem Teil von dessen Rand.

Gelegentlich werden die Spalten von \mathfrak{K} numeriert. Wir schreiben dann

$$\zeta = \zeta_h = A_h^{-1}\infty, \quad A_h \text{ reell}, \quad |A_h| = 1 \quad (1 \leq h \leq \sigma_0)$$

und verwenden die Symbole A_h, P_h, N_h, κ_h für das betreffende $\zeta = \zeta_h$ in der oben angegebenen Bedeutung. Speziell sei $\zeta_1 = \infty, A_1 = I$, und,

wenn von dieser Spitze die Rede ist, $\kappa_1 = \kappa$. Für jedes $\zeta = A^{-1} \infty \subset \mathfrak{K}$ liegt $A \mathfrak{B}_\zeta$ in einem Vertikalhalbstreifen positiver Mindesthöhe und füllt für hinreichend große Ordinaten einen (i. a. anderen) solchen Halbstreifen genau aus.

Mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$ bezeichnen wir die Schar der ganzen Formen, mit $\mathfrak{C}^+ = \mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$ die Schar der ganzen Spitzenformen (d. h. der ganzen in allen Spitzen verschwindenden Formen) $\{\Gamma, -r, v\}$. $f(\tau) \subset \mathfrak{C}^+$ heißt $f(\tau) \subset \mathfrak{C}$ und $b_0(A_h, f) = 0$ für diejenigen h ($1 \leq h \leq \sigma_0$) mit $\kappa_h = 0$. Wir schreiben zur Abkürzung, wenn f und g in \mathfrak{C} liegen:

$$b_n(I, f) = b_n, \quad b_n(I, g) = c_n \quad (f, g \subset \mathfrak{C}); \quad N, \kappa \text{ für } N_1, \kappa_1 \quad (8)$$

und beweisen nun die folgenden Aussagen, deren erste mit ihrem Beweis aus der neueren Literatur über Modulfunktionen wohlbekannt ist:

Satz 1. Für $\tau \subset \mathfrak{H}$, $f(\tau) \subset \mathfrak{C}^+$ gilt $|f(\tau)| \leq C_1(f) y^{-\frac{r}{2}}$.

Beweis: $y^{\frac{r}{2}} |f(\tau)|$ ist gegenüber den Substitutionen von Γ voll invariant und im Bereich \mathfrak{K} beschränkt.

Satz 2. Für $\tau \subset \mathfrak{H}$, $y \leq \alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$ beliebig, aber fest), $f(\tau) \subset \mathfrak{C}$ gilt

$$|f(\tau)| \leq C_2(f, \alpha_1) y^{-r}.$$

Beweis: Es sei μ_0 die untere Grenze der $y = \Im \tau$ für $\tau \subset \mathfrak{B}_\infty$, \mathfrak{h} die Strecke $\xi \leq x \leq \xi + N$, $y = y_0$ ($0 < y_0 < \mu_0$). Jeder Punkt τ_0 von \mathfrak{h} liegt in einem Bereich $L^{-1} \mathfrak{K}$ und daher in einem Teilbereich $L^{-1} \mathfrak{B}_\zeta$ ($L \subset \Gamma$). Dies besagt

$$M \tau_0 \subset A \mathfrak{B}_\zeta, \quad M = AL, \quad \zeta = A^{-1} \infty \text{ eine Spitze von } \mathfrak{K}, \quad L \subset \Gamma.$$

Für beliebige $\tau \subset \mathfrak{H}$ folgt aus (6) und (7)

$$f(\tau) = \frac{f(L\tau)}{v(L)(\gamma\tau + \delta)^r} = \frac{(m_1\tau + m_2)^{-r}}{\sigma(A, L)v(L)} f_A(M\tau) \quad (\underline{M} = \{m_1, m_2\}),$$

Daher ist $|f(\tau_0)| = |m_1\tau_0 + m_2|^{-r} |f_A(M\tau_0)| \leq C_3(f) |m_1\tau_0 + m_2|^{-r}$. Die Verwendung der Konstanten $C_3(f)$ erklärt sich aus der Struktur von $A \mathfrak{B}_\zeta$, der Lage von $M\tau_0$ und daraus, daß nur endlich viele A in Betracht kommen. Wenn m_1 verschwindet, so gilt $\infty = M^{-1}\infty = L^{-1}\zeta$ ($L \subset \Gamma$), also $\zeta = \infty$, $A = I$, $M = L = \pm U^{hN}$ mit ganzem h und $M\tau_0 = \tau_0 + hN \subset \mathfrak{B}_\infty$, was der Voraussetzung $y_0 < \mu_0$ widerspricht (GI, Satz 2, Zusatz). Nach GI, Satz 2 ist also $|m_1| \geq \vartheta_0(A, \Gamma)$ (ϑ_0 konstant), und daraus folgt die Behauptung zunächst für $y < \mu_0$. Andrerseits hat

$y^r |f(\tau)|$ die Periode N , ist also für $\frac{1}{2}\mu_0 \leq y \leq \alpha_1$ beschränkt. Dies gibt die volle Gültigkeit von Satz 2.

Im folgenden setzen wir wie angekündigt $\kappa_1 = \kappa$ ($\zeta_1 = \infty$),

$$\lambda = \lambda(f) = r \quad \text{für } f \subset \mathfrak{C}, \quad \lambda = \lambda(f) = \frac{r}{2} \quad \text{für } f \subset \mathfrak{C}^+$$

und erhalten

$$|f(\tau)| \leq C_4(f, \alpha_1) y^{-\lambda} \quad (0 < y \leq \alpha_1, \alpha_1 > 0, \quad C_4 = C_1 \text{ oder } C_2), \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} b_n = b_n(I, f) &= \int_{\xi+i\alpha}^{\xi+N+i\alpha} f(\tau) e^{-2\pi i(n+\kappa)\frac{\tau}{N}} \frac{d\tau}{N}, \quad \xi \text{ reell,} \\ |b_n| &\leq C_5(f) (n+\kappa)^\lambda \quad (n+\kappa > 0, \quad C_5 = e^{\frac{2\pi}{N}} C_4), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$0 \leq \int_{\xi}^{\xi+N} |f(x+iy)|^2 \frac{dx}{N} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 e^{-4\pi(n+\kappa)\frac{y}{N}} \leq C_4^2 y^{-2\lambda}, \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^n |b_k|^2 \leq C_6(f) (n+\kappa)^{2\lambda} \quad (n+\kappa > 0, \quad C_6 = e^{\frac{4\pi}{N}} C_4^2), \quad (12)$$

$$\sum_{k=0}^n |b_k c_k| \leq C_7(f, g) (n+\kappa)^{\lambda+\lambda'} \quad (n+\kappa > 0, \quad C_7(f, g) = \sqrt{C_6(f) C_6(g)}); \quad (13)$$

hier wurde $\lambda' = \lambda(g)$ für $g \subset \mathfrak{C}$ (oder $g \subset \mathfrak{C}^+$) geschrieben.

Aus (13) folgt die absolute Konvergenz der Dirichletreihe

$$D(s; f, g) = D(s; f, g; \Gamma) = \sum_{n+\kappa > 0} \frac{b_n \bar{c}_n}{(n+\kappa)^s} \quad (f, g \subset \mathfrak{C}) \quad (14)$$

für $\sigma > \lambda + \lambda'$ ($s = \sigma + it$; σ, t reell).

Es seien nunmehr f und g ganze Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ derart, daß fg in allen Spitzen von Γ verschwindet. Wir setzen

$$\psi(y) = \psi(y; f, g) = \sum_{n+\kappa > 0} b_n \bar{c}_n e^{-4\pi(n+\kappa)\frac{y}{N}} = \int_{\xi}^{\xi+N} f(x+iy) \bar{g}(x+iy) \frac{dx}{N}$$

und behaupten: Für alle komplexen s mit $\sigma = \Re s > \lambda + \lambda'$ gilt

$$\int_0^\infty \psi(y; f, g) y^{s-1} dy = \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s; f, g). \quad (15)$$

Zum Beweise erschließen wir nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus (11) zunächst

$$0 \leq \sum_{n+\kappa > 0} |b_n c_n| e^{-4\pi(n+\kappa)\frac{y}{N}} \leq C_8(f, g) y^{-\lambda-\lambda'} \quad (y > 0).$$

Diese Abschätzung besteht mit $C_4(f, \alpha_1) C_4(g, \alpha_1)$ an Stelle von $C_8(f, g)$ ursprünglich nur für $0 < y \leq \alpha_1$, läßt sich aber sofort auf ganz \mathfrak{H} ausdehnen. Daß (15) gilt, folgt aus

$$\sum_{n=p}^{\infty} |b_n c_n| e^{-4\pi(n+\kappa)\frac{y}{N}} \leq e^{-2\pi p \frac{y}{N}} C_8(f, g) \left(\frac{y}{2}\right)^{-\lambda-\lambda'},$$

$$\left| \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=p}^{\infty} b_n c_n e^{-4\pi(n+\kappa)\frac{y}{N}} \right) y^{s-1} dy \right| \leq C_8(f, g) 2^{\lambda+\lambda'} \int_0^{\infty} e^{-2\pi p \frac{y}{N}} y^{\sigma-\lambda-\lambda'-1} dy.$$

Es bezeichne nun \mathfrak{B} den Vertikalhalbstreifen $\xi \leq x \leq \xi + N$, $y > 0$. Dann besagt (15) den folgenden (nunmehr bewiesenen)

Satz 3. *Es sei $f \subset \mathfrak{C}$, $g \subset \mathfrak{C}$, und es verschwinde fg in allen Spitzen von Γ ; es sei $\sigma = \operatorname{Re} s > \lambda + \lambda'$ und $D(s; f, g)$ durch (14) erklärt. Dann existieren beide Seiten der folgenden Gleichung im Sinne absoluter Konvergenz:*

$$\frac{1}{N} \iint_{\mathfrak{B}} f(\tau) \overline{g}(\tau) y^{s-1} dx dy = \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s; f, g). \quad (16)$$

Nach dem Beweise von Satz 1 existiert sowohl die linke Seite dieser Gleichung als auch das mit ihr übereinstimmende $\int_0^{\infty} \psi(y; f, g) y^{s-1} dy$ im Sinne absoluter Konvergenz bereits für $\sigma > r$; $\lambda + \lambda'$ ist $= r$ oder $= \frac{3}{2}r$ oder $= 2r$. Die linke Seite von (16) hängt von ξ nicht ab.

Über die Möglichkeit einer Verschärfung der in diesem Abschnitt bewiesenen Abschätzungen seien noch einige Bemerkungen gestattet. Was zunächst die Verschärfung der Aussagen von Satz 1 und 2 angeht, so hat man hierunter, da diese Sätze wesentlich nur für $y \rightarrow 0$ in Betracht kommen, eine Ungleichung

$$|f(\tau)| \leq C' \mu(y) \quad (C' > 0 \text{ konstant})$$

zu verstehen, in der $\mu(y) y^{\frac{r}{2}}$ für $f \subset \mathfrak{C}^+$ und $\mu(y) y^r$ für $f \subset \mathfrak{C}$, $f \not\subset \mathfrak{C}^+$ mit y gegen Null streben.

In diesem Sinne ist Satz 1 niemals verschärfbar⁶⁾. Ferner erkennt man aus (7), daß eine ganze Form $\{\Gamma, -r, v\}$ ($r > 0$, $|v| = 1$), die nicht in allen Spitzen verschwindet, bei senkrechter Annäherung an die reellen Spitzen, in denen sie nicht verschwindet, in der genauen Ordnung r ins Unend-

⁶⁾ H. Petersson, Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension —2 zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren, Math. Zeitschrift 49 (1944), s. insbesondere § 5, Satz 7.

liche wächst. Was die Abschätzung der Fourier-Koeffizienten b_n angeht, so läßt sich für die Formen f mit $r > 2$ der Exponent $\lambda = r$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung (10) um eine volle Einheit erniedrigen, falls f nicht in allen Spitzen verschwindet. Daß eine weitere Verschärfung der so entstehenden Abschätzung nicht allgemein stattfinden kann, zeigen die expliziten Formeln für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen ganzer Dimension $-r \leq -3$ mit Multiplikatoren 1 zu den Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe.

Der genau analoge Sachverhalt besteht für den Exponenten $2\lambda = 2r$ auf der rechten Seite von (12). Er kann für $r > 2$, wenn f nicht in allen Spitzen verschwindet, um eine volle Einheit erniedrigt werden, und zwar gilt dies für die allgemeinen oben eingeführten automorphen Formen auf Grund der Tatsache, daß sich diese mit Hilfe der Linearkombinationen der automorphen Eisensteinreihen additiv auf ganze Spitzenformen reduzieren lassen. Eine weitere Verschärfung der dadurch entstehenden Abschätzung wird abermals durch die speziellen Eisensteinreihen ganzer Dimension der Kongruenzgruppen widerlegt.

Schließlich zeigt Theorem 1 bei Rankin²⁾, daß die rechte Seite von (12) für jede ganze Spitzenform von ganzer Dimension mit Multiplikatoren 1 zu einer der genannten Kongruenzgruppen die genaue Größenordnung der Quadratsummen der Koeffizienten-Beträge angibt.

Im übrigen gelten die hier mitgeteilten Aussagen über die Verminderung der Exponenten in den Abschätzungen (10) und (12) für ganze Nicht-Spitzenformen nicht mehr allgemein, sobald $0 < r < 2$ ist. So beträgt die Verminderung dieser Exponenten für die klassischen einfachen Theta-Null- und Teilwerte von der Dimension $-\frac{1}{2}$ genau $\frac{1}{2}$. Für die in Abschnitt 7 diskutierten einfachen Thetareihen $\vartheta_1(\tau, h, N)$ von der Dimension $-\frac{3}{2}$, die in allen Spitzen verschwinden, gilt (10) mit $\lambda = \frac{1}{2} = \frac{r}{2} - \frac{1}{4}$. Es besteht Anlaß zu der Vermutung, daß (10) für alle ganzen Spitzenformen mit $\lambda = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ zutrifft. (Vgl. Fußnoten²⁾,⁷⁾ und die in Fußnote²⁾ angegebene Literatur.)

3. Es sei $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ , $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ ein volles System von Matrizen M aus $A\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen. Die „Poincarésche Betragreihe“

$$\Phi(s, \tau, A, \Gamma) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A, \Gamma)} \frac{1}{|m_1\tau + m_2|^s} \quad (M = \{m_1, m_2\}, \sigma = \Re s > 2) \quad (17)$$

⁷⁾ H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta Mathematica 58 (1932).

konvergiert für festes s mit $\sigma > 2$ auf jedem Vertikalhalbstreifen von positiver Mindesthöhe in \mathfrak{H} gleichmäßig absolut. Sie genügt den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}\Phi(s, S\tau, A, \Gamma) &= |c\tau + d|^s \Phi(s, \tau, AS, S^{-1}\Gamma S) \\ (S \text{ reell}, |S| &= 1, \underline{S} = \{c, d\}) \\ \Phi(s, L\tau, A, \Gamma) &= |\gamma\tau + \delta|^s \Phi(s, \tau, A, \Gamma) \\ (L \subset \Gamma, \underline{L} &= \{\gamma, \delta\}) .\end{aligned}\tag{17a}$$

Wir betrachten für $\sigma > r$ das Doppelintegral

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{1}{N} \iint_{\mathfrak{R}} f(\tau) \bar{g}(\tau) \Phi(2s - 2r + 2, \tau, I, \Gamma) y^{s-1} dx dy .\tag{18}$$

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß $W(s; f, g; \Gamma)$ bis auf einen konstanten Zahlfaktor mit der linken Seite von (16) übereinstimmt. Zu diesem Zwecke zerlegen wir das Doppelintegral über \mathfrak{R} in die Doppelintegrale über die Teilbereiche \mathfrak{B}_ξ , führen in deren jedem die neue Variable $\tau' = A\tau$ ein und finden mit $\tau' = x' + iy'$ nach (17a), am einfachsten unter Benutzung der Identität

$$\begin{aligned}\frac{y^{s-1}}{|m_1\tau + m_2|^{2s-2r+2}} dx dy &= \frac{y^{s-r+1}}{|m_1\tau + m_2|^{2s-2r+2}} y^{r-2} dx dy = \\ &= (\Im M\tau)^{s-r+1} y^r \frac{dx dy}{y^2} : .\end{aligned}$$

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \subset \mathfrak{R}} J_{\mathfrak{B}_\xi}(s; f, g) ,\tag{19}$$

$$J_{\mathfrak{B}_\xi}(s; f, g) = \frac{1}{N} \iint_{A\mathfrak{B}_\xi} f_A(\tau') \bar{g}_A(\tau') \left(\sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma) \\ M' = MA^{-1}}} \frac{1}{|m'_1\tau' + m'_2|^{2s-2r+2}} \right) y'^{s+1} \frac{dx' dy'}{y'^2} .\tag{19a}$$

Hier kann, weil $f_A(\tau') \bar{g}_A(\tau')$ im Unendlichen exponentiell verschwindet, die Summe mit dem Doppelintegral legal vertauscht werden. Geschieht dies, und wird die erwähnte Variablentransformation wieder rückgängig gemacht, so ergibt sich

$$J_{\mathfrak{B}_\xi}(s; f, g) = \frac{1}{N} \sum_{M \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma)} \iint_{\mathfrak{B}_\xi} \frac{f(\tau) \bar{g}(\tau)}{|m_1\tau + m_2|^{2s-2r+2}} y^{s+1} \frac{dx dy}{y^2} .$$

Diese Reihe konvergiert nach ihrer Herkunft für beschränkte s mit $\sigma > r + \alpha$ ($\alpha > 0$ fest) gleichmäßig absolut, und es wird nunmehr nach (7)

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{1}{N} \sum_{M \subset \mathfrak{S}(I, \Gamma)} \iint_{M\mathfrak{R}} f(\tau) \bar{g}(\tau) y^{s-1} dx dy .$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdrucks bedienen wir uns der Konstruktion J III, § 4. Da der Integrand auf der rechten Seite gegenüber den U^{hN} (h ganz) offenbar translationsinvariant ist und die Summe von der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(I, \Gamma)$ nicht abhängt, findet man zunächst

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{2}{N} \sum_{M \subset \mathfrak{S}_0^*} \iint_{M\mathfrak{R}} f(\tau) \bar{g}(\tau) y^{s-1} dx dy ;$$

hier bezeichnet \mathfrak{S}_0^* ein vollständiges Teilsystem eines passend bestimmten Systems $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(I, \Gamma)$ derart, daß \mathfrak{S}_0^* von jedem Matrizenpaar M, M' aus \mathfrak{S}_0 , für welches $\underline{M}' = -\underline{M}$ gilt, genau einen Vertreter enthält. Daß die rechte Seite der letzten Gleichung bis auf den Faktor 2 mit der linken Seite von (16) übereinstimmt, läßt sich genau so wie der entsprechende Sachverhalt in J III, § 4, beweisen (wo sich auch die Erklärung von \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{R}_M findet), so daß wir auf die Darstellung des Beweises verzichten können.

Wir erhalten daher

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen und in den Bezeichnungen von Satz 2, (17) und (18) gilt: Es existiert $W(s; f, g; \Gamma)$ für alle komplexen s mit $\sigma > r$. Wird $D(s; f, g; \Gamma)$ gemäß (14) erklärt, so besteht die Formel*

$$W(s; f, g; \Gamma) = 2 \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s; f, g; \Gamma) \quad (\sigma > \lambda + \lambda') . \quad (20)$$

Von Wichtigkeit für die fernere Theorie ist der Nachweis dafür, daß $W(s; f, g; \Gamma)$ beim Übergang von Γ zu einem Normalteiler Γ' von endlichem Index in Γ ungeändert bleibt. Zum Beweise zerlege man das System der Spitzen $L^{-1}\infty$ ($L \subset \Gamma$) in Äquivalenzklassen nach Γ' . Durchläuft $\zeta' = A'^{-1}\infty$ ($A' \subset \Gamma$) ein Vertretersystem dieser Klassen, und bezeichnet $P' = A'^{-1}U^{cN}A'$ die Grundmatrix von ζ' i. b. a. Γ' , so hängt die natürliche Zahl c von A' nicht ab, und es besteht die mengentheoretische Zerlegung

$$\Gamma = \sum_{\nu=0}^{c-1} \sum_{A'} U^{\nu N} A' \Gamma' .$$

Sie bedeutet, daß $\sum_{\nu=0}^{c-1} \sum_{A'} U^{\nu N} A' \mathfrak{R}$ einen Fundamentalbereich \mathfrak{F}' von Γ' darstellt; aus ihr folgt

$$\Phi(s, \tau, I, \Gamma) = \sum_{A'} \Phi(s, \tau, A', \Gamma') = \sum_{A'} |a'_1 \tau + a'_2|^{-s} \Phi(s, A'\tau, I, \Gamma') ,$$

$(A' = \{a'_1, a'_2\})$, und es wird demnach

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{1}{N} \sum_{A'} \iint_{A' \times \mathfrak{A}} f(\tau) \bar{g}(\tau) \Phi(2s - 2r + 2, \tau, I, \Gamma') y^{s-1} dx dy.$$

Da auch $\Phi(s, \tau, U^\beta, \Gamma') = \Phi(s, \tau, I, \Gamma')$ für jedes reelle β zutrifft, kann nach (17a) in der Summe auf der rechten Seite A' durch $U^{\nu N} A'$ ersetzt werden. Geschieht dies und wird sodann über $\nu = 0, 1, 2, \dots, c-1$ summiert, so ergibt sich gemäß

$$W(s; f, g; \Gamma) = \frac{1}{cN} \sum_{\nu=0}^{c-1} \sum_{A'} \iint_{U^{\nu N} A' \times \mathfrak{A}} f(\tau) \bar{g}(\tau) \Phi(2s - 2r + 2, \tau, I, \Gamma') y^{s-1} dx dy$$

die Behauptung.

Wünscht man diese Invarianz für die rechte Seite von (20) direkt zu bestätigen, so hat man f, g durch Reihen von der Gestalt

$$f(\tau) = \sum_{n'=0}^{\infty} \beta_{n'} e^{2\pi i (n' + \kappa') \frac{\tau}{cN}}, \quad g(\tau) = \sum_{n'=0}^{\infty} \gamma_{n'} e^{2\pi i (n' + \kappa') \frac{\tau}{cN}}$$

auszudrücken und dabei κ' durch

$$v(U^{cN}) = e^{2\pi i c\kappa} = e^{2\pi i \kappa'}, \quad \text{d. h.} \quad c\kappa = n_0 + \kappa' \quad (0 \leq \kappa' < 1, \quad n_0 \text{ ganz})$$

zu bestimmen. Wegen

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i (cn + c\kappa) \frac{\tau}{cN}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i (cn + n_0 + \kappa') \frac{\tau}{cN}}$$

wird in der Tat

$$D(s; f, g; \Gamma') = \sum_{n'+\kappa'>0} \frac{\beta_{n'} \bar{\gamma}_{n'}}{(n' + \kappa')^s} = \sum_{n+\kappa>0} \frac{b_n \bar{c}_n}{(cn + n_0 + \kappa')^s} = c^{-s} D(s; f, g; \Gamma).$$

Wir formulieren dieses Ergebnis als

Satz 5. *Beide Seiten der Gleichung (20) von Satz 4 bleiben ungeändert, wenn Γ durch einen Normalteiler Γ' von endlichem Index in Γ ersetzt wird.*

4. Die weiteren Umformungen von $W(s; f, g; \Gamma)$ erfolgen unter der Voraussetzung, daß Γ — abgesehen von einer notwendigen Modifikation, die die Matrix $-I$ betrifft — mit der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ (bestehend aus den ganzzahligen unimodularen $L \equiv I \pmod{N}$) übereinstimmt. Da diese Matrizengruppe die Matrix $-I$ nur für $N = 1, 2$ enthält, ist (20) dahin zu ändern, daß nunmehr

$$W(s; f, g; \Gamma(N)) = \delta^{-} \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s; f, g; \Gamma(N)), \quad \delta^{-} = \begin{cases} 2 & \text{für } N = 1, 2 \\ 1 & \text{für } N > 2 \end{cases}. \quad (20a)$$

Es habe der Vektor $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ ganzzahlige Komponenten. Wir setzen

$$F(s, \tau, \mathbf{a}, N) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ (m_1, m_2) = 1}} \frac{1}{|m_1 \tau + m_2|^s}, \quad \tilde{F}(s, \tau, \mathbf{a}, N) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1, m_2 \neq 0, 0}} \frac{1}{|m_1 \tau + m_2|^s}; \quad (21)$$

offenbar gilt $\Phi(s, \tau, A, \Gamma(N)) = F(s, \tau, \underline{A}, N)$. Wir bilden ferner die Dirichletreihen

$$Q(s, k, N) = \sum_{\substack{k n \equiv 1(N) \\ n \neq 0}} \frac{\mu(|n|)}{|n|^s}, \quad P(s, h, N) = \sum_{\substack{n \equiv h(N) \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|^s}. \quad (22)$$

Sie treten in der nach dem Vorgange von Hecke⁴⁾ leicht beweisbaren Beziehung auf:

$$F(s, \tau, \mathbf{a}, N) = \frac{1}{2} \sum_{k \bmod N} Q(s, k, N) \tilde{F}(s, \tau, k \mathbf{a}, N) \quad ((a_1, a_2, N) = 1) \quad (23)$$

Wir benutzen (23), um aus der Fourier-Entwicklung von \tilde{F} die Fourier-Entwicklung von F abzuleiten. Man hat zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s, \tau, \mathbf{a}, N) &= \\ &= \delta\left(\frac{a_1}{N}\right) P(s, a_2, N) + \frac{\sqrt{\pi}}{N} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} y^{1-s} P(s-1, a_1, N) + H(s, \tau, \mathbf{a}, N), \\ H(s, \tau, \mathbf{a}, N) &= \frac{1}{N} \sum_{\substack{m_1, n = -\infty \\ m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0 \neq n}}^{+\infty} |m_1|^{1-s} e^{2\pi i n \frac{|m_1| x + a_2}{N}} y^{1-s} B\left(s, n |m_1| \frac{y}{N}\right), \\ B(s, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \mu u} (u+i)^{-\frac{s}{2}} (u-i)^{-\frac{s}{2}} du \quad (\mu \text{ reell}), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ ganz,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} F(s, \tau, \mathbf{a}, N) &= \delta(\varepsilon(\mathbf{a})) + \frac{\sqrt{\pi}}{2N} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} y^{1-s} \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N)=1}} Q(s, k, N) P(s-1, k a_1, N) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N)=1}} Q(s, k, N) H(s, \tau, k \mathbf{a}, N). \end{aligned} \quad (24)$$

mit $\varepsilon(\mathbf{a}) = 1$ für $\mathbf{a} \equiv \pm\{0, 1\} \pmod{N}$, $\varepsilon(\mathbf{a}) = 0$ sonst.

Um nun das Verhalten des Integrals $W(s; f, g; \Gamma)$ ($\Gamma = \Gamma(N)$) als Funktion von s zu bestimmen, zerlegen wir es nach (19), (19a) in die Bestandteile

$$J_{\mathfrak{B}_\zeta}(s; f, g) = \frac{1}{N} \iint_{A \mathfrak{B}_\zeta} f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) F(2s - 2r + 2, \tau, \mathfrak{a}', N) y^{s-1} dx dy \quad (25)$$

$(\mathfrak{a}' = \underline{A^{-1}}, A \subset \Gamma(1))$

Offenbar wird nun $\varepsilon(\mathfrak{a}') = \varepsilon(\mathfrak{a}) = \varepsilon_0(\zeta) = \begin{cases} 1 & (\zeta = \infty) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$ ($\zeta = A^{-1}\infty \subset \mathfrak{K}$), und wir erhalten daher

$$J_{\mathfrak{B}_\zeta}(s; f, g) = J_{\zeta,1}(s) + J_{\zeta,2}(s) + J_{\zeta,3}(s) ,$$

$$J_{\zeta,1}(s) = \delta^- \varepsilon_0(\zeta) \frac{1}{N} \iint_{\mathfrak{B}_\infty} f(\tau) \bar{g}(\tau) y^{s-1} dx dy ,$$

$$J_{\zeta,2}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} \frac{\Gamma(s - r + \frac{1}{2})}{\Gamma(s - r + 1)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N) = 1}} Q(2s - 2r + 2, k, N) P(2s - 2r + 1, k a'_1, N) \iint_{A \mathfrak{B}_\zeta} f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) y^{r-s+r-2} dx dy ,$$

$$J_{\zeta,3}(s) = \frac{1}{2N} \sum_{\substack{k \bmod N \\ (k, N) = 1}} Q(2s - 2r + 2, k, N) \iint_{A \mathfrak{B}_\zeta} f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) H(2s - 2r + 2, \tau, k \mathfrak{a}', N) y^{s-1} dx dy . \quad (26)$$

Hier erweist sich zunächst $J_{\zeta,1}(s)$ unmittelbar als eine ganze Funktion von s . Berücksichtigt man ferner, daß eine Abschätzung $|B(s, \mu)| \leq C_9(C) e^{-\pi|\mu|}$ für $|s| \leq C$ und alle reellen $\mu \neq 0$ zutrifft, so sieht man, daß auch das Integral in der Darstellung von $J_{\zeta,3}(s)$ eine ganze Funktion von s ist; dies gilt sogar bereits dann, wenn von der Funktion $f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau)$ nur feststeht, daß sie auf $A \mathfrak{B}_\zeta$ beschränkt ist. Daraus folgt, daß sich $J_{\zeta,3}(s)$ in der Halbebene $\sigma > r - \frac{1}{2}$ regulär-analytisch verhält. Was schließlich $J_{\zeta,2}(s)$ betrifft, so ist a) der Γ -Quotient, b) jeder Faktor Q in der Summe über k für $\sigma > r - \frac{1}{2}$ regulär; c) jeder Faktor P in dieser Summe bis auf einen einfachen Pol im Punkte $s = r$ überall regulär, d) das Integral eine ganze Funktion von s . Dies besagt, daß $J_{\zeta,2}(s)$ für alle s in der Halbebene $\sigma > r - \frac{1}{2}$ mit möglicher Ausnahme eines einfachen Polen im Punkte $s = r$ überall regulär ist. Das Residuum von $J_{\zeta,2}(s)$ in diesem Pol $s = r$ hat den Wert

$$\frac{\pi}{2N^2} 2 \sum_{\substack{(n, N) = 1 \\ n > 0}} \frac{\mu(n)}{n^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \iint_{A \mathfrak{B}_\zeta} f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) y^{r-2} dx dy ,$$

und damit ergibt sich nach Satz 5 schließlich als erstes Hauptresultat der folgende

Satz 6. *Es sei Γ eine durch endlich viele Kongruenzen definierte Untergruppe der Modulgruppe, es seien $f(\tau), g(\tau)$ ganze Modulformen $\{\Gamma, -r, v\}$ der reellen Dimension $-r < 0$ mit lauter Multiplikatoren v des Betrages 1, es verschwinde $f(\tau)g(\tau)$ in allen Spitzen von Γ . Bildet man die Fourier-Entwicklungen von $f(\tau), g(\tau)$ in der Gestalt*

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i(n+\kappa)\frac{\tau}{N}}, \quad g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi i(n+\kappa)\frac{\tau}{N}} \quad (0 \leqq \kappa < 1)$$

und aus ihren Koeffizienten die Dirichletreihe

$$D(s; f, g; \Gamma) = \sum_{n+\kappa > 0} \frac{b_n \bar{c}_n}{(n+\kappa)^s},$$

so ist diese für $\sigma > 2r$ absolut konvergent, in die Halbebene $\sigma > r - \frac{1}{2}$ analytisch fortsetzbar und dort überall regulär mit der einzigen möglichen Ausnahme eines einfachen Poles im Punkte $s = r$. Das Residuum von $D(s; f, g; \Gamma)$ im Punkte $s = r$ hat stets den Wert

$$\text{Res}_{s=r} D(s; f, g; \Gamma) = \frac{(4\pi)^{r-1}}{N^r \Gamma(r)} \frac{12}{\mu} (f, g; \Gamma). \quad (27)$$

Dabei bezeichnet: N die Breite des Fundamentalbereichs von Γ im Unendlichen, κ die durch $v(U^N) = e^{2\pi i \kappa}$ ($0 \leqq \kappa < 1$) erklärte Zahl, μ den Index der Substitutionsgruppe $\bar{\Gamma}$ in der Modulgruppe $\Gamma(1)$ (diese als Substitutionsgruppe aufgefaßt) und $(f, g; \Gamma)$ das Skalarprodukt von f mit g i. b. a. Γ .

5. Wenn $0 < r < 1$ ist, so läßt sich zwei beliebigen ganzen automorphen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ gemäß (2) ein Skalarprodukt zuordnen. Es soll nun bewiesen werden, daß auch in diesem Falle Satz 6 in allen wesentlichen Teilen zutrifft. Zum Beweis bedienen wir uns eines Approximationsverfahrens, das sich auf die Eigenschaften der automorphen Primformen gründet.

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art im Sinne von 2., \mathfrak{K} ein kanonischer Fundamentalbereich von Γ . Jeder Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von \mathfrak{K} entspricht eine automorphe Primform $Z(\tau, \zeta) \subset \{\Gamma, -\varrho_0, \mu_\zeta\}$, d. h. eine ganze automorphe Form von folgender Beschaffenheit: $Z(\tau, \zeta)$ ist in allen Punkten von \mathfrak{K} , gemessen in den ortsuniformisierenden Variablen, ausnahmslos regulär und in allen Punkten von \mathfrak{K} mit der einzigen Ausnahme der Spitze ζ von Null verschieden. In ζ hat $Z(\tau, \zeta)$ eine Nullstelle von erster Ordnung. Die Formenklasse $\{\Gamma, -\varrho_0, u_\zeta\}$ von $Z(\tau, \zeta)$ ist mit einer positiven universellen Gruppenkonstanten ϱ_0 und mit einem

gewissen Multiplikatorsystem u_ζ des Betrages 1 zu bilden, und $Z(\tau, \zeta)$ ist durch die genannten Eigenschaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Um $Z(\tau, \zeta)$ völlig festzulegen, schreibt man vor, daß der niedrigste Fourier-Koeffizient $b_1(A, Z(\tau, \zeta))$ in der Entwicklung (6) von $Z(\tau, \zeta)$ nach Potenzen von $t = \exp\left(2\pi i \frac{A \tau}{N}\right)$ den Wert 1 haben soll. Man kann demnach den Logarithmus $\Lambda(\tau, \zeta)$ von $Z(\tau, \zeta)$ durch

$$\Lambda(\tau, \zeta) = \log Z(\tau, \zeta) = -\varrho_0 \log(a_1 \tau + a_2) + 2\pi i \frac{A \tau}{N} + t \mathfrak{Q}_0(t, A)$$

eindeutig bestimmen, wobei man unter $\mathfrak{Q}_0(t, A)$ eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe in t zu verstehen hat.

Wir schreiben ζ_h für ζ , verwenden N_h , A_h mit $A_h = \{a_{h1}, a_{h2}\}$ in der unter 2. angegebenen Bedeutung und erhalten im Sinne von (6)

$$\begin{aligned} \Lambda_h(\tau) \equiv \Lambda(\tau, \zeta_h) &= -\varrho_0 \log(a_{j1} \tau + a_{j2}) + \delta_{hj} 2\pi i \frac{A_j \tau}{N_j} + \mathfrak{Q}(t_j; A_j, \Lambda_h), \\ t_j &= \exp\left(2\pi i \frac{A_j \tau}{N_j}\right), \quad \mathfrak{Q}(t_j; A_j, \Lambda_h) \quad \text{für} \quad |t_j| < 1 \text{ konvergent}; \\ h, j &= 1, 2, \dots, \sigma_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Sodann bilden wir mit den Parametern $\eta_h \geq 0$ ($1 \leq h \leq \sigma_0$) die Funktion

$$\mathbf{P}(\tau, (\eta)) = \exp\left(\sum_{h=1}^{\sigma_0} \eta_h \Lambda_h(\tau)\right) = \prod_{h=1}^{\sigma_0} Z(\tau, \zeta_h)^{\eta_h} \quad [\exp x = e^x]. \quad (29)$$

$\mathbf{P}(\tau, (\eta))$ stellt ersichtlich eine ganze automorphe Form $\{\Gamma, -\varrho_0 \tilde{\eta}, u_{(\eta)}\}$ von der Dimension $-\varrho_0 \tilde{\eta} = -\varrho_0 \sum_{h=1}^{\sigma_0} \eta_h$ und zu einem gewissen Multiplikatorsystem $u_{(\eta)}$ des Betrages 1 dar. Ferner gilt nach (28), (29):

$$\mathbf{P}(\tau, (\eta)) = (a_{j1} \tau + a_{j2})^{-\varrho_0 \tilde{\eta}} e^{2\pi i \eta_j \frac{A_j \tau}{N_j}} \exp\left(\sum_{h=1}^{\sigma_0} \eta_h \mathfrak{Q}(t_j; A_j, \Lambda_h)\right)$$

und daher im Sinne von (6)

$$\mathbf{P}_{A_j}(\tau, (\eta)) = e^{2\pi i \eta_j \frac{\tau}{N_j}} \exp\left(\sum_{h=1}^{\sigma_0} \eta_h \mathfrak{Q}\left(e^{2\pi i \frac{\tau}{N_j}}; A_j, \Lambda_h\right)\right). \quad (30)$$

Wir verstehen nun unter $f(\tau), g(\tau)$ zunächst zwei beliebige ganze automorphe Formen der Klasse $\{\Gamma, -r_0, v_0\}$, wo r_0 eine feste Zahl mit $0 < r_0 < 1$ und v_0 ein festes Multiplikatorsystem des Betrages 1 angibt. Wir teilen die natürlichen Zahlen $h = 1, 2, \dots, \sigma_0$ in zwei Klassen \mathfrak{h}_1

und \mathfrak{h}_2 ein: $h \subset \mathfrak{h}_1$ bedeute, daß $f(\tau)g(\tau)$ in der Spitze ζ_h nicht verschwindet, $h \subset \mathfrak{h}_2$, daß $f(\tau)g(\tau)$ in ζ_h verschwindet. Für $h \subset \mathfrak{h}_2$ gilt also entweder $\kappa_h > 0$ oder $b_0(A_h, f)b_0(A_h, g) = 0$ oder beides. Für $h \subset \mathfrak{h}_1$ hingegen gilt sowohl $\kappa_h = 0$ als auch $b_0(A_h, f)b_0(A_h, g) \neq 0$; dabei ist Γ von erster Art und κ_h aus $v_0(P_h) = e^{2\pi i \kappa_h}$ ($0 \leq \kappa_h < 1$, $1 \leq h \leq \sigma_0$) zu bestimmen.

Über die Parameter η_h setzen wir voraus, daß sie den Bedingungen

$$0 \leq \eta_h \leq \eta_h^0 \quad (h \subset \mathfrak{h}_1), \quad \eta_h = 0 \quad (h \subset \mathfrak{h}_2) \quad (31)$$

genügen, wo η_h^0 eine für jedes $h \subset \mathfrak{h}_1$ im Laufe der Untersuchung geeignete bestimmende positive Konstante $\leq \frac{1}{2}$ angibt; solange eine solche Bestimmung noch nicht getroffen ist, werde $\eta_h^0 = \frac{1}{2}$ gesetzt. Wir schreiben im folgenden $(\eta) > 0$, wenn $\eta_h > 0$ für alle $h \subset \mathfrak{h}_1$; dagegen bedeute $(\eta) \geq 0$ lediglich das Bestehen der Relationen (31). Den durch (31) für die η_h ($h \subset \mathfrak{h}_1$) beschriebenen Variabilitätsbereich nennen wir \mathfrak{R}^0 .

Aus (30) erhält man den im folgenden sehr oft, auch ohne ausdrückliches Zitat anzuwendenden und für beliebige Γ von erster Art gültigen

Satz 7. Für jede Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von \mathfrak{R} ist $\mathbf{P}_A(\tau, (\eta))$ eine auf der Menge $\tau \subset A\mathfrak{B}_\zeta$, $(\eta) \subset \mathfrak{R}^0$ simultan stetige und beschränkte Funktion von τ und (η) .

Für alle Wertsysteme $(\eta) \geq 0$ sind $f(\tau)\mathbf{P}(\tau, (\eta))$ und $g(\tau)\mathbf{P}(\tau, (\eta))$ ganze automorphe Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ mit $r = r_0 + \varrho_0 \tilde{\eta}$, $v = v_0 u_{(\eta)}$. Für $(\eta) > 0$ verschwindet ihr Produkt in allen Spitzen. Daher gilt nach (20), wenn $\sigma > 2r = 2r_0 + 2\varrho_0 \tilde{\eta}$:

$$W(s; f\mathbf{P}, g\mathbf{P}; \Gamma) = 2 \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} \sum_{n+\kappa^* > 0} \frac{b_n(I, f\mathbf{P}) \bar{b}_n(I, g\mathbf{P})}{(n + \kappa^*)^s} \quad ((\eta) > 0). \quad (32)$$

Hier ist $\kappa^* = \kappa_1 = \kappa$ ein von (η) unabhängiger fester Wert, falls $1 \subset \mathfrak{h}_2$; dagegen $\kappa^* = \eta_1$ im Falle $1 \subset \mathfrak{h}_1$ (man beachte $\zeta_1 = \infty$). In jedem Falle sind alle Koeffizienten $b_n(I, f\mathbf{P})$, $b_n(I, g\mathbf{P})$ ($n \geq 0$) nach (10) und Satz 7 stetige Funktionen von (η) auf \mathfrak{R}^0 , und es gilt

$$\sum_{k=0}^n |b_k(I, f\mathbf{P}) \bar{b}_k(I, g\mathbf{P})| \leq C_{10}(f, g) (n + \kappa^*)^{2r_0 + 2\varrho_0 \tilde{\eta}} \quad ((\eta) \subset \mathfrak{R}^0), \quad (33)$$

wo $C_{10}(f, g)$ nach Satz 7 und dem Beweise des Satzes 2 von (η) nicht abhängt; daraus folgt, daß die Summe der Glieder mit $n \geq 1$ in der Dirichletreihe auf der rechten Seite von (32) für alle beschränkten s mit

$$\sigma \geq 2r_0 + 2\varrho_0 \tilde{\eta} + \alpha \quad (\alpha > 0), \quad ((\eta) \subset \mathfrak{R}^0) \quad [\tilde{\eta} = \sum_{h \subset \mathfrak{h}_1} \eta_h] \quad (34)$$

gleichmäßig in s und den η_h absolut konvergiert.

6. Zur genaueren Diskussion von $W(s, f \mathbf{P}, g \mathbf{P}; \Gamma(N))$ ($\Gamma = \Gamma(N)$) zerlegen wir dieses Integral nach dem Schema (19), (19a), (25) in die Teilintegrale $J_{\mathfrak{B}_\zeta}(s; f \mathbf{P}, g \mathbf{P})$ ($\zeta \subset \mathfrak{K}$) und deren jedes in die entsprechend (26) bestimmten Summanden

$$J_{\zeta,1}(s, (\eta)), \quad J_{\zeta,2}(s, (\eta)), \quad J_{\zeta,3}(s, (\eta)).$$

Hier erweist sich zunächst

$$J_{\zeta,1}(s, (\eta)) = \delta - \frac{1}{N} \iint_{\mathfrak{B}_\infty} f(\tau) \bar{g}(\tau) |\mathbf{P}(\tau, (\eta))|^2 y^{s-1} dx dy \quad (\zeta = \infty, (\eta) > 0) \quad (35)$$

als eine für alle komplexen s und alle (η) in \Re^0 simultan stetige, in s regulär-analytische Funktion von s und (η) , falls $1 \subset \mathfrak{h}_2$. In diesem Falle ist auch in (32) κ^* fest, und wenn κ^* verschwindet, so beginnt die Reihe in (32) frühestens mit $n = 1$. Diese Dirichletreihe $D(s; f \mathbf{P}, g \mathbf{P}, \Gamma(N))$ ist also unter den Bedingungen (34) eine simultan stetige Funktion von s und (η) .

Es sei zweitens $1 \subset \mathfrak{h}_1$, also $\kappa^* = \eta_1$, $b_0(I, f) \neq 0 \neq b_0(I, g)$. Wir schreiben η für η_1 und vollziehen im Integranden von (35) die Zerlegung

$$\begin{aligned} & f(\tau) \bar{g}(\tau) |\mathbf{P}(\tau, (\eta))|^2 = \\ & = b_0(I, f \mathbf{P}) \bar{b}_0(I, g \mathbf{P}) e^{-4\pi\eta \frac{y}{N}} + e^{-2\pi(1+2\eta) \frac{y}{N}} R(\tau, (\eta)) \quad ((\eta) \geq 0); \end{aligned} \quad (36)$$

hier stellt $R(\tau, (\eta))$ eine auf $\tau \subset \mathfrak{B}_\infty$, $(\eta) \subset \Re^0$ simultanstetige beschränkte Funktion von τ und (η) dar.

Im folgenden werden wir jede im Bereiche

$$\sigma > \max(r_0 + \varrho_0 \tilde{\eta} - \frac{1}{2}, r_0 + \varrho_0 \tilde{\eta} - (1 - r_0 - \varrho_0 \tilde{\eta}), 0), \quad (\eta) \subset \Re^0$$

in s und (η) simultan stetige, in s regulär-analytische Funktion von s und (η) unterschiedslos mit $\Omega(s, (\eta))$ bezeichnen, und zwar auch dann, wenn sie etwa in einer nur für $(\eta) > 0$ gültigen Gleichung auftritt. Außerdem sollen jetzt die η_h^0 ($h \subset \mathfrak{h}_1$) einander gleich und so klein gewählt werden, daß $\varrho_0 \tilde{\eta} < \frac{1}{4}$ und $2\varrho_0 \tilde{\eta} < \frac{1}{2}(1 - r_0)$ für alle (η) in \Re^0 zutrifft. Diese Bedingung ist, wenn etwa $\eta_h^0 = \frac{1}{2}$ gesetzt und r_0 festgehalten wird, für alle hinreichend großen N von selbst erfüllt, weil nach einem Fundamentalsatz über automorphe Formen

$$\varrho_0 = \varrho_0(N) = \frac{12}{\mu(N)}, \quad \mu(N) = [\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(N)].$$

Im Sinne dieser Festsetzungen gilt nach (36) zunächst

$$J_{\infty,1}(s,(\eta)) = \frac{\delta^-}{N} b_0(I, f \mathbf{P}) \bar{b}_0(I, g \mathbf{P}) \iint_{\mathfrak{B}_\infty} e^{-4\pi\eta \frac{y}{N}} y^{s-1} dx dy + \Omega(s,(\eta))$$

$$((\eta) > 0) .$$

Da \mathfrak{B}_∞ für die τ mit $y \geq \vartheta^0$ einen Vertikalhalbstreifen der Breite N genau ausfüllt, wofern ϑ^0 passend gewählt wird, ergibt sich weiter

$$J_{\infty,1}(s,(\eta)) = \delta^- b_0(I, f \mathbf{P}) \bar{b}_0(I, g \mathbf{P}) \int_{\vartheta^0}^{\infty} e^{-4\pi\eta \frac{y}{N}} y^{s-1} dy + \Omega(s,(\eta))$$

$$= \delta^- b_0(I, f \mathbf{P}) \bar{b}_0(I, g \mathbf{P}) \left(\frac{N}{4\pi\eta} \right)^s \Gamma(s) + \Omega(s,(\eta)) \quad ((\eta) > 0) . \quad (37)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung stimmt mit demjenigen Ausdruck auf der rechten Seite von (32) überein, welchen man erhält, indem man von der dort auftretenden Dirichletreihe alle Glieder mit $n > 0$ tilgt. Nennt man nun κ_0 die zu v_0 gehörige (früher mit κ_1 bezeichnete, aus der Relation $v_0(U^N) = e^{2\pi i \kappa_0}$ ($0 \leq \kappa_0 < 1$) erklärte) feste Zahl, so gewinnt man aus (35), (37) die sowohl für $1 \subset \mathfrak{h}_1$ als auch für $1 \subset \mathfrak{h}_2$, aber zunächst nur für $(\eta) > 0$ gültige Darstellung

$$\delta^- \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} \sum_{n+\kappa_0 > 0} \frac{b_n(I, f \mathbf{P}) \bar{b}_n(I, g \mathbf{P})}{(n + \kappa^*)^s} =$$

$$= \sum_{\xi \subset \mathfrak{R}} J_{\xi,2}(s,(\eta)) + \sum_{\xi \subset \mathfrak{R}} J_{\xi,3}(s,(\eta)) + \Omega(s,(\eta)) \quad ((\eta) > 0) . \quad (38)$$

Man erhält $J_{\xi,3}(s,(\eta))$ aus dem entsprechenden $J_{\xi,3}(s)$ in (26), indem man dort $f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau)$ durch $f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) |\mathbf{P}_A(\tau,(\eta))|^2$ und r durch $r_0 + \varrho_0 \tilde{\eta}$ ersetzt. Eine Wiederholung der früher über $J_{\xi,3}(s)$ angestellten Betrachtungen läßt erkennen, daß die zweite Summe auf der rechten Seite in (38) in dem Ausdruck $\Omega(s,(\eta))$ aufgeht, da das Integral die geforderten Stetigkeits- und Regularitäts-Eigenschaften sogar für alle komplexen s und alle $(\eta) \geq 0$ aufweist.

Wir untersuchen schließlich $J_{\xi,2}(s,(\eta))$ in der wie bei $J_{\xi,3}(s,(\eta))$ modifizierten Darstellung (26). Sowohl der Γ -Quotient als auch die Faktoren Q in der Summe über k sind Funktionen vom Typus $\Omega(s,(\eta))$. Das gleiche gilt ersichtlich vom Doppelintegral über $A \mathfrak{B}_\xi$. Denn nach Satz 7 ist

$$f_A(\tau) \bar{g}_A(\tau) |\mathbf{P}_A(\tau,(\eta))|^2 \quad \text{auf} \quad \tau \subset A \mathfrak{B}_\xi, \quad (\eta) \subset \mathfrak{R}^0$$

in $\tau, (\eta)$ simultan stetig und beschränkt. Berücksichtigt man schließlich, daß die Faktoren P sämtlich bis auf den einzigen allen gemeinsamen

Pol $s = r_0 + \varrho_0 \tilde{\eta}$ überall reguläre Funktionen von $s - r_0 - \varrho_0 \tilde{\eta}$ sind, so erlangt man die Berechtigung zu der folgenden Deduktion:

Man wähle feste Werte s, η^0 mit $0 < \eta^0 \leq \frac{1}{2}$, $\sigma - 2r_0 > 2\varrho_0 \eta^0 \sum_{h \subset \mathfrak{h}_1} 1$, setze $\eta_h^0 = \eta^0$ und lasse den variablen Vektor (η) (mit den Komponenten $\eta_h (h \subset \mathfrak{h}_1)$) in dem Würfel $0 \leq \eta_h \leq \eta^0$ gegen den Nullvektor $(\eta) = 0$ streben. Aus (38) folgt dann

$$\delta - \frac{N^s \Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s; f, g; \Gamma(N)) = \sum_{\xi \subset \mathfrak{A}} J_{\xi, 2}(s, 0) + Q(s, 0) \quad ((\eta) = 0) . \quad (39)$$

Hier stellt die rechte Seite eine für $\sigma > \max(r_0 - \frac{1}{2}, r_0 - (1 - r_0), 0)$ mit der einzigen möglichen Ausnahme eines einfachen Poles bei $s = r_0$ reguläre analytische Funktion von s dar. Das Residuum in diesem Pole hat den oben angegebenen Wert (27).

Die damit für $0 < r < 1$ bewiesene Erweiterung des ersten Hauptatzes 6 hat folgenden Wortlaut:

Satz 8. *Satz 6 gilt — mit einer einzigen geringfügigen Modifikation — auch dann, wenn $0 < r < 1$ ist und $f(\tau), g(\tau)$ völlig beliebige ganze Modulformen $\{\Gamma, -r, v\}$ sind (Γ, v wie in Satz 6). Die Modifikation besagt: $D(s; f, g; \Gamma)$ ist in die s -Halbebene $\sigma > \max(r - \frac{1}{2}, r - (1 - r), 0)$ analytisch fortsetzbar.*

7. Die im folgenden mitgeteilten Beispiele beziehen sich sämtlich auf Modulformen von den Dimensionen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$. Aus (27) folgt für $r = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} (f, g; \Gamma) &= 2\pi \sqrt{N} \frac{\mu}{12} \operatorname{Res}_{s=\frac{1}{2}} D(s; f, g; \Gamma) \quad (r = \frac{1}{2}) , \\ (f, g; \Gamma) &= \frac{1}{4} N^{\frac{3}{2}} \frac{\mu}{12} \operatorname{Res}_{s=\frac{3}{2}} D(s; f, g; \Gamma) \quad (r = \frac{3}{2}) . \end{aligned} \quad (40)$$

Dies ergibt zunächst für $f = g = \vartheta_3$, $\Gamma = \Gamma_s$ [(2) (3)]:

$$(\vartheta_3, \vartheta_3; \Gamma) = \pi \sqrt{2} . \quad (41)$$

Den gleichen Wert findet man für die Skalarprodukte von ϑ_0 und ϑ_2 mit sich selbst, wenn man in jedem Falle Γ_s durch eine passend bestimmte, zu Γ_s äquivalente Untergruppe von $\Gamma(1)$ ersetzt.

In der Formenklasse $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_s\}$ mit

$$\begin{aligned} v_s(L) &= \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)_* = \left(\frac{\gamma}{|\delta|} \right) (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} \gamma - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} \delta - 1}{2}} \\ \text{für } L &\equiv I \pmod{4}, \quad \underline{L} = \{\gamma, \delta\}, \gamma \neq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$\left(\left(\frac{0}{1}\right)_* = 1\right)$ liegen die ganzen Modulformen

$$\Theta_{00}(\tau) = \vartheta_3\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad \Theta_{01}(\tau) = \vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad \Theta_{10}(\tau) = \vartheta_2(2\tau) . \quad (43)$$

Da der Rang der Schar \mathfrak{S} der ganzen Modulformen $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ gleich 2 ist, sind die Funktionen (43) linear abhängig. In der Tat gilt

$$\Theta_{00}(\tau) - \Theta_{01}(\tau) - 2\Theta_{10}(\tau) = 0 . \quad (44)$$

Die Skalarprodukte der Θ_{00} , Θ_{01} zu je zweien erhalten nach (40) die Werte

$$(\Theta_{00}, \Theta_{00}; \Gamma(4)) = (\Theta_{01}, \Theta_{01}; \Gamma(4)) = 16\pi, \quad (\Theta_{00}, \Theta_{01}; \Gamma(4)) = 0 , \quad (45)$$

Θ_{00} und Θ_{01} bilden also eine Orthogonalbasis, $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Theta_{00}$ und $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Theta_{01}$ eine normierte Orthogonalbasis von \mathfrak{S} . Daß

$$(\Theta_{10}, \Theta_{10}; \Gamma(4)) = (\Theta_{00}, \Theta_{10}; \Gamma(4)) = -(\Theta_{01}, \Theta_{10}; \Gamma(4)) = 8\pi$$

ist, kann direkt aus (40) oder nach den Rechenregeln über Skalarprodukte aus (44), (45) erschlossen werden.

Zu den einfachen Thetareihen gehört ferner nach einer Eulerschen Identität die Funktion

$$\eta(\tau) = \sqrt[24]{\Delta(\tau)} = e^{\pi i \frac{\tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\pi i \frac{\tau}{12}(6n+1)^2} , \quad (46)$$

die eine ganze Modulform von der Dimension $-\frac{1}{2}$ zur vollen Modulgruppe darstellt. Für das Skalarprodukt von η mit sich selbst findet man nach (40) und Satz 6

$$(\eta, \eta; \Gamma(1)) = \frac{\pi\sqrt{6}}{18} . \quad (47)$$

Bei der Bestimmung der Skalarprodukte ganzer Modulformen von der Dimension $-\frac{3}{2}$ hat man darauf zu achten, daß das Produkt der Skalarfaktoren in allen Spitzen der betreffenden Gruppe verschwinden muß. An expliziten Beispielen für niedere Stufen bieten sich zunächst die folgenden ganzen Spitzenformen dar⁸⁾:

$$\begin{aligned} \eta^3(\tau) &= \sqrt[8]{\Delta(\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{\pi i \frac{\tau}{4}(2n-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{k}\right) k e^{\pi i \frac{\tau}{4}k^2} , \\ \eta^4(\tau) \vartheta_3^{-1}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3n+1) e^{\pi i \frac{\tau}{3}(3n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3}\right) k e^{\pi i \frac{\tau}{3}k^2} . \end{aligned} \quad (48)$$

⁸⁾ Die Funktionen ϑ_3 , η , η^3 , η^4 , ϑ_3^{-1} spielen in der systematischen Theorie der Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung (bei dem heutigen Stande dieser Theorie) eine ausgezeichnete Rolle, vgl. E. Hecke, Herleitung des Eulerprodukts der Zetafunktion und einiger L-Reihen aus ihren Funktionaleigenschaften, Math. Annalen 119 (1944).

Nach (40) und Satz 6 erhält man als Skalarprodukte dieser Modulformen mit sich selbst die Werte

$$(\eta^3, \eta^3; \Gamma(1)) = \frac{\sqrt{2}}{12}, \quad (\eta^4 \vartheta_3^{-1}, \eta^4 \vartheta_3^{-1}; \Gamma_3) = \frac{\sqrt{6}}{8}. \quad (49)$$

Zur Aufstellung einfacher Thetareihen höherer Stufe macht man üblicherweise einen Ansatz von der Gestalt

$$f(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h(N)} e^{2\pi i m^2 \frac{\tau}{\lambda N}}, \quad (50)$$

in der λ eine passend zu bestimmende natürliche Zahl derart bezeichnet, daß die entstehenden Funktionen f möglichst einfach gebauten Transformationsgleichungen genügen. Ich habe früher⁹⁾ die Reihen (50) für beliebiges natürliches N , ganzes h und $\lambda = 4$ diskutiert, mich aber inzwischen davon überzeugt, daß man die damals untersuchten Thetareihen aus einem anderen, jenem gegenüber nur geringfügig modifizierten Funktionensystem erhält, welches sich bei Modulsubstitutionen nach besonders einfachen Formeln umsetzt.

Wir wählen in (50) $N > 0$ gerade, h ganz, $\lambda = 2$ und bilden sogleich neben den Reihen (50) die entsprechend normierten Teilwerte der Ableitungen der elliptischen Thetafunktion nach der Gittervariablen:

$$\vartheta_0(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h(N)} e^{\pi i \frac{\tau}{N} m^2}, \quad \vartheta_1(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h(N)} m e^{\pi i \frac{\tau}{N} m^2}. \quad (51)$$

Um die Funktionaleigenschaften dieser Reihen zu formulieren, fassen wir die beiden Gleichungen (51) gemäß

$$\vartheta_\lambda(\tau, h, N) = \sum_{m \equiv h(N)} m^\lambda e^{\pi i \frac{\tau}{N} m^2} \quad (\lambda = 0, 1)$$

zu einer Formel zusammen und verstehen im folgenden unter λ stets eine der beiden Zahlen 0, 1. Es gilt

$$\vartheta_\lambda(\tau, -h, N) = (-1)^\lambda \vartheta_\lambda(\tau, h, N), \quad (52)$$

$$\vartheta_\lambda(\tau + 1, h, N) = e^{\pi i \frac{h^2}{N}} \vartheta_\lambda(\tau, h, N), \quad (53)$$

$$\vartheta_\lambda(\tau, h, N) = \sum_{\substack{k \bmod m_0 N \\ k \equiv h(N)}} \vartheta_\lambda(m_0 \tau, k, m_0 N) \quad (m_0 > 0 \text{ ganz}), \quad (54)$$

$$\vartheta_\lambda\left(\frac{-1}{\tau}, h, N\right) = (-i)^\lambda \sqrt{(-i\tau)^{1+2\lambda}} N^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \bmod N} e^{2\pi i \frac{hj}{N}} \vartheta_\lambda(\tau, j, N). \quad (55)$$

⁹⁾ H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 8 (1930).

Man gewinnt (55) durch eine Fourier-Entwicklung unter Benutzung des Poissonschen Summationsverfahrens. Aus den Formeln (52), (53), (54), (55) ergeben sich nach dem üblichen Vorgehen¹⁰⁾ auf Grund einer längeren Rechnung die genauen und vollständigen Aussagen über das Verhalten der $\vartheta_\lambda(\tau, h, N)$ bei Ausübung von Modulsubstitutionen.

Es sei erstens $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma(1)$, $c > 0$. Dann gilt ($\lambda = 0, 1$)

$$\vartheta_\lambda(S\tau, h, N) = (-1)^\lambda e^{-\frac{\pi i}{4}} (c\tau + d)^{\frac{1}{2} + \lambda} (cN)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu \bmod N} e^{-\frac{\pi i b}{N}(d\nu^2 + 2h\nu)} \mu\left(\frac{a}{c}, h + d\nu, N\right) \vartheta_\lambda(\tau, \nu, N) \quad (56)$$

mit

$$\mu\left(\frac{a}{c}, j_0, N\right) = \sum_{\substack{k \bmod cN \\ k \equiv j_0(N)}} e^{\pi i \frac{ak^2}{cN}} \quad (j_0 \text{ ganz}).$$

Es sei zweitens $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma_0(2N)$ (d. h. $S \subset \Gamma(1)$, $c \equiv 0 \pmod{2N}$, $c \geq 0$). Dann gilt

$$\vartheta_\lambda(S\tau, h, N) = (c\tau + d)^{\frac{1}{2} + \lambda} e^{\pi i \frac{d-1}{4}} \left(\frac{cN}{d}\right)_* e^{\pi i \frac{abh^2}{N}} \vartheta_\lambda(\tau, ah, N) \quad (57)$$

mit $\left(\frac{m}{n}\right)_*$ nach (42) für ganze $m \neq 0$, $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Es sei drittens $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma(2N)$, $\gamma \geq 0$. Dann gilt

$$\vartheta_\lambda(L\tau, h, N) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* (\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2} + \lambda} \vartheta_\lambda(\tau, h, N). \quad (58)$$

Nach (56), (58) sind die $\vartheta_0(\tau, h, N)$ sämtlich ganze Modulformen $\{\Gamma(2N), -\frac{1}{2}, v_0\}$ (vgl. (42), (58)), die $\vartheta_1(\tau, h, N)$ sämtlich ganze Spitzenformen $\{\Gamma(2N), -\frac{3}{2}, v_0\}$. Mit Rücksicht auf (52) genügt es, die $\vartheta_0(\tau, h, N)$ für $0 \leq h \leq \frac{N}{2}$, die $\vartheta_1(\tau, h, N)$ für $1 \leq h < \frac{N}{2}$ zu betrachten; diese Funktionen sind linear unabhängig.

Die Skalarprodukte der $\vartheta_0(\tau, h, N)$ und der $\vartheta_1(\tau, h, N)$ je untereinander lassen sich überaus einfach bestimmen. Es ergibt sich nach (40), Satz 6 und Satz 8:

$$(\vartheta_\lambda(\tau, h, N), \vartheta_\lambda(\tau, h', N); \Gamma(2N)) = 0, \text{ wenn } \begin{cases} 0 \leq h \leq \frac{N}{2} \\ 0 \leq h' \leq \frac{N}{2} \end{cases}, \quad h \neq h', \lambda = 0, 1, \quad (59)$$

¹⁰⁾ E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1926).

$$(\vartheta_0(\tau, h, N), \vartheta_0(\tau, h, N); \Gamma(2N)) = \delta_0 2\pi \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\mu(2N)}{12} \quad \left(0 \leq h \leq \frac{N}{2}\right)$$

mit

$$\delta_0 = \begin{cases} 1 & \left(0 < h < \frac{N}{2}\right) \\ 2 & \left(h = 0, \frac{N}{2}\right) \end{cases}, \quad \mu(2N) = [\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(2N)], \quad (60)$$

wo allgemein $\bar{\Gamma}$ die Gruppe der Substitutionen $\tau' = L\tau$ mit $L \subset \Gamma$ bezeichnet; ebenso findet man

$$(\vartheta_1(\tau, h, N), \vartheta_1(\tau, h, N); \Gamma(2N)) = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu(2N)}{12} \quad \left(0 < h < \frac{N}{2}\right) \quad (61)$$

Der Zusammenhang der Reihen (51) mit den (für beliebiges natürliches N' gebildeten) Funktionen

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau, h, N') &= \sum_{m \in h(N')} e^{\frac{\pi i m^2 \tau}{2N'}}, & \vartheta_{01}(\tau, h, N') &= \sum_{m \in h(N')} (-1)^{\frac{m-h}{N'}} e^{\frac{\pi i m^2 \tau}{2N'}}, \\ \vartheta_{10}(\tau, h, N') &= \sum_{m \in h(N')} e^{\frac{2\pi i (m+\frac{1}{2})^2 \tau}{N'}} \end{aligned} \quad (62)$$

aus ⁹⁾ wird ersichtlich durch die Formeln

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau, h, N') &= \vartheta_0(\tau, h, 2N') + \vartheta_0(\tau, h + N', 2N'), \\ \vartheta_{01}(\tau, h, N') &= \vartheta_0(\tau, h, 2N') - \vartheta_0(\tau, h + N', 2N'), \\ \vartheta_{10}(\tau, h, N') &= \vartheta_0(\tau, 2h + 1, 2N') \end{aligned} \quad (63)$$

vermittelt; analog (44) gilt hier

$$\vartheta_{00}(\tau, 2h + 1, N') + \vartheta_{01}(\tau, 2h + 1, N') = 2\vartheta_{10}(\tau, h, N').$$

Die Skalarprodukte der Funktionen (62) untereinander können aus (59), (60) leicht berechnet werden.

Im übrigen darf man die Einführung der Funktionen (62) nicht als überflüssig ansehen. Das Beispiel (vgl. (46))

$$\eta(\tau) = \vartheta_{01}(\tau, 1, 6) \quad (63a)$$

zeigt, daß aus den oben betrachteten $\vartheta_0(\tau, h, N)$ (N gerade) durch passende Linearkombination ganze Spitzenformen von der Dimension $-\frac{1}{2}$ mit ϑ -Multiplikatoren gebildet werden können. Analog (63a) gilt

$$\eta^3(\tau) = \vartheta_1(\tau, 1, 4), \quad \eta^4(\tau) \vartheta_3^{-1}(\tau) = \vartheta_1(2\tau, 1, 6) - \vartheta_1(2\tau, 2, 6). \quad (63b)$$

8. Im folgenden soll an einem Beispiel erläutert werden, in welcher Richtung Anwendungen der vorliegenden Theorie zu erwarten sind. Zunächst bemerken wir über die Funktionen $\vartheta_\lambda(\tau, h, N)$, daß sie, falls

$N \equiv 0 \pmod{4}$, als Modulformen bereits zu der Gruppe $\tilde{\Gamma}(N)$ der Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma(1) \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{N}, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2N}$$

und dort zu einem gewissen Multiplikatorsystem $\tilde{v}(L) = \tilde{v}_N(L) = \pm 1$ gehören:

$$\begin{aligned} \vartheta_\lambda(L\tau, h, N) &= \tilde{v}_N(L) (\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2} + \lambda} \vartheta_\lambda(\tau, h, N), \\ \tilde{v}(L) &= \tilde{v}_N(L) = (-1)^{\frac{\delta-1}{4}} \left(\frac{\gamma N}{\delta} \right)_* \quad (L \subset \tilde{\Gamma}(N), N \equiv 0 \pmod{4}). \end{aligned} \quad (64)$$

$\tilde{\Gamma}(N)$ ist ein Normalteiler in $\Gamma(1)$, und $\Gamma(2N)$ hat in $\tilde{\Gamma}(N)$ den Index 2. Da alle Spitzen von $\tilde{\Gamma}(N)$ nach ihrer Transformation ins Unendliche (mit Hilfe je einer Matrix aus $\Gamma(1)$) die Breite $2N$ haben, so ist die Anzahl der inäquivalenten Spitzen eines Fundamentalbereichs $\tilde{\mathfrak{F}}_N$ von $\tilde{\Gamma}(N)$ halb so groß, wie die entsprechende Anzahl $\sigma(2N) = \frac{\mu(2N)}{2N}$ für $\Gamma(2N)$. $\tilde{\Gamma}(N)$ enthält wegen $\tilde{\Gamma}(N) \subset \bar{\Gamma}(N)$ keine elliptischen Substitutionen.

Wir wollen auf die ganzen Formen der Dimensionen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$ zur Gruppe $\tilde{\Gamma}(4)$ sogleich den Riemann-Rochschen Satz in seiner Ausdehnung auf automorphe Formen reeller Dimensionen anwenden (G II) und bemerken deshalb, daß, wie man nachrechnet,

$$\tilde{v}_N(P) = 1 \quad (65)$$

für jede parabolische Erzeugende $P = A^{-1}U^{2N}A$ von $\tilde{\Gamma}(N)$, wo A , wie üblicherweise bei Untergruppen der Modulgruppe, in $\Gamma(1)$ liegend angenommen wird.

Es sei nun $N = 4$. Wir bezeichnen mit \tilde{p}_4 das Geschlecht, mit $\tilde{q}_4 = \tilde{\sigma}_4$ die oben genannte Spitzenanzahl $\frac{\sigma(2N)}{2}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}_N$ für $N = 4$, mit $\tilde{\mu}_4$ den Index $[\bar{\Gamma}(1) : \tilde{\Gamma}(4)]$. Dann wird zunächst $\tilde{\sigma}_4 = 12$, $\frac{\tilde{\mu}_4}{12} = 8$, und die Fundamentalrelation

$$\tilde{p}_4 - 1 + \frac{\tilde{q}_4}{2} = \frac{\tilde{\mu}_4}{12} \quad (66)$$

ergibt $\tilde{p}_4 = 3$.

Wir kombinieren die wegen $\tilde{v}_4(L) = \pm 1$ und (65), (66) gültige Formel

$$\nu_0(-\frac{1}{2}, \tilde{v}_4, \langle 1 \rangle) = 4 - 3 + 1 + \nu_0(-\frac{3}{2}, \tilde{v}_4, \mathfrak{a}) = 2 + \nu_0(-\frac{3}{2}, \tilde{v}_4, \mathfrak{a}) \quad (67)$$

des genannten allgemeinen Riemann-Rochschen Satzes mit der Tatsache, daß $\vartheta_1(\tau, 1, 4)$ eine nicht identisch verschwindende ganze Spitzenform $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$ darstellt, daß also $\nu_0(-\frac{3}{2}, \tilde{v}_4, \mathfrak{a})$ mindestens gleich 1 ist. Nach (67) wird deshalb

$$\nu_0(-\frac{1}{2}, \tilde{v}_4, \langle 1 \rangle) \geq 3 ,$$

was auch unmittelbar aus der linearen Unabhängigkeit der $\vartheta_0(\tau, h, 4)$ ($0 \leq h \leq 2$) hervorgeht. Multipliziert man $\vartheta_1(\tau, 1, 4)$ mit einem vollen System linear unabhängiger ganzen Formen $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{1}{2}, \tilde{v}_4\}$, so erhält man ebenso viele linear unabhängige Differentiale erster Gattung. Nach (66) kann daher nicht $\nu_0(-\frac{1}{2}, \tilde{v}_4, \langle 1 \rangle) > 3$ sein; es folgt also

$$\nu_0(-\frac{1}{2}, \tilde{v}_4, \langle 1 \rangle) = 3 , \quad \nu_0(-\frac{3}{2}, \tilde{v}_4, \mathfrak{a}) = 1 , \quad (68)$$

und die Funktionen $\varphi_h(\tau) = \vartheta_0(\tau, h, 4)$ ($h = 0, 1, 2$) bilden eine Basis der Schar der ganzen Formen $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, \tilde{v}_4\}$. Daß in dieser Schar keine ganzen Spitzenformen enthalten sind, erkennt man etwa durch den folgenden Schluß:

Angenommen, es sei $\varphi^+(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{1}{2}, \tilde{v}_4\}$. Dann gewinnt man in den Funktionen $f_h = (\varphi^+)^2 \varphi_h$ ($h = 0, 1, 2$) drei linear unabhängige ganze Spitzenformen $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$, im Gegensatz zu (68). Folglich gilt

$$\nu_0(-\frac{1}{2}, \tilde{v}_4, \mathfrak{a}) = 0 , \quad \nu_0(-\frac{3}{2}, \tilde{v}_4, \langle 1 \rangle) = 10 . \quad (69)$$

Für beliebiges gerades $N > 0$ und beliebige ganze h_1, h_2, h_3 mit $0 \leq h_i \leq \frac{N}{2}$ setzen wir

$$\Theta(\tau; h_1, h_2, h_3; N) \equiv \Theta(\tau, \mathfrak{h}, N) = \prod_{i=1}^3 \vartheta_0(\tau, h_i, N) \\ (\mathfrak{h} = \{h_1, h_2, h_3\}) . \quad (70)$$

Alle diese $\Theta(\tau, \mathfrak{h}, N)$ stellen offenbar ganze Modulformen $\{\Gamma(2N), -\frac{3}{2}, v_{\mathfrak{h}}\}$ und für $N \equiv 0 \pmod{4}$ auch ganze Modulformen $\{\tilde{\Gamma}(N), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_N\}$ dar. Sie gestatten die Entwicklungen

$$\Theta(\tau, \mathfrak{h}, N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathfrak{h}, N) e^{\pi i \frac{\tau}{N} n} \quad (71)$$

mit

$a_n(\mathfrak{h}, N)$ = Anzahl der Darstellungen $n = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ mit ganzen $m_i \equiv h_i \pmod{N}$.

Im Falle $N = 4$ kommen die 10 Vektoren $\mathfrak{h} = \{h_1, h_2, h_3\} = \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 2\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 2, 2\}, \{2, 2, 2\}$ (72)

in Betracht. Dadurch, daß man für jedes dieser \mathfrak{h} die Restklassen mod 8 oder 16 oder 32 bestimmt, in denen ein $n = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ mit $m_i \equiv h_i \pmod{4}$ liegen muß, gewinnt man mit Hilfe primitiver Rechnungen eine volle Einsicht in die lineare Struktur des Systems der elf ganzen Modulformen

$$\Theta(\tau, \mathfrak{h}, 4) \quad (\mathfrak{h} \text{ aus (72)}), \quad \vartheta_1(\tau, 1, 4) \quad (73)$$

aus der Klasse $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$. Es zeigt sich, daß einerseits die zehn Formen $\Theta(\tau, \mathfrak{h}, 4)$ in (73) linear unabhängig sind, also wegen (69) die Schar der ganzen Modulformen $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$ aufspannen; daß andererseits zwischen den elf Funktionen (73) eine und (abgesehen von konstanten Faktoren) nur eine lineare Relation, nämlich

$$\vartheta_1(\tau, 1, 4) = \Theta(\tau; 0, 0, 1; 4) - \Theta(\tau; 1, 2, 2; 4) \quad (74)$$

besteht.

Die Skalarprodukte zwischen den allgemeinen Thetareihen $\Theta(\tau, \mathfrak{h}, N)$ einerseits und $\vartheta_1(\tau, h, N)$ andererseits lassen sich nach Satz 6 durch die Residuen der Dirichletreihen

$$D(s) = D^*(s; \mathfrak{h}, h, N) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv h(N)}}^{\infty} \frac{a_{m^2}(\mathfrak{h}, N)}{m^{2s-1}} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv -h(N)}}^{\infty} \frac{a_{m^2}(\mathfrak{h}, N)}{m^{2s-1}} \quad (75)$$

im Punkte $s = \frac{3}{2}$ ausdrücken. $D^*(s; \mathfrak{h}, h, N)$ verschwindet in sehr vielen Fällen identisch, insbesondere für

$$N = 4, \quad h = 1 \quad \text{und alle } \mathfrak{h} \text{ aus (72) mit } \mathfrak{h} \neq \{0, 0, 1\}, \quad \mathfrak{h} \neq \{1, 2, 2\}. \quad (76)$$

Wir bezeichnen nun für irgendeine der unter 2. erklärten Scharen $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$ mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma, -r, v)$ die lineare Schar aller derjenigen Formen aus $\mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$, welche auf der vollen Schar $\mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$ der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ senkrecht stehen, und nennen \mathfrak{N} kurz die Normalschar von \mathfrak{C}^+ (innerhalb von \mathfrak{C}). Man erkennt im vorliegenden Sonderfall $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$, daß alle acht $\Theta(\tau, \mathfrak{h}, 4)$ (\mathfrak{h} nach (76)) der Normalschar \mathfrak{N} angehören. Wegen (74) liegen hingegen nicht die beiden übrigen

$$\Theta(\tau, \mathfrak{h}, 4) = \Theta(\tau; 0, 0, 1; 4), \quad \Theta(\tau; 1, 2, 2; 4)$$

zugleich in \mathfrak{N} , wohl aber ist eine gewisse lineare Verbindung

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \lambda_0 \Theta(\tau; 0, 0, 1; 4) + \lambda_1 \Theta(\tau; 1, 2, 2; 4) \\ (\lambda_0, \lambda_1 &\neq 0, 0 \text{ konstant}) \end{aligned} \quad (77)$$

in \mathfrak{N} enthalten. \mathfrak{N} hat nach (68), (69) den Rang 9; die Funktionen $\Theta(\tau, \mathfrak{h}, 4)$ (\mathfrak{h} nach (76)) und $\Lambda(\tau)$ bilden also eine Basis von \mathfrak{N} .

Zur Herleitung arithmetischer Identitäten für die Darstellungsanzahlen $a_n(\mathfrak{h}, 4)$ hätte man die Eisensteinreihen der betreffenden Formenklasse $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$ aufzustellen. Leider sind in den diesbezüglichen Untersuchungen von H. Maaß¹¹⁾ gerade die hier in Betracht kommenden Stufen 4, 8, 12 ausgeschlossen worden, so daß von dieser Seite gegenwärtig keine Aufklärung erfolgen kann. Zwar darf erwartet werden, daß eine solche im Sonderfall der Klasse $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$ auch mit den vorhandenen Hilfsmitteln möglich ist, obwohl anderseits gerade aus der Arbeit¹¹⁾ hervorgeht, daß es zur völligen Durchdringung der komplizierten Verhältnisse im Bereich der allgemeinen Eisensteinreihen aus $\{\Gamma(2N), -\frac{3}{2}, v_{\vartheta}\}$ neuartiger Methoden bedarf. Die ungewöhnlichen Schwierigkeiten des hier erwähnten Problems werden durch die folgenden Tatsachen beleuchtet:

Einerseits hängen die Fourier-Koeffizienten spezieller Eisensteinreihen von der Dimension $-\frac{3}{2}$ aufs engste mit den Klassenzahlen der imaginär-quadratischen Zahlkörper zusammen; die allgemeinen Eisensteinreihen $\{\Gamma(2N), -\frac{3}{2}, v_{\vartheta}\}$ müssen also auf ein System arithmetischer Funktionen führen, die als die nächstliegenden Verallgemeinerungen dieser Klassenzahlen aufzufassen sind. Andererseits müßte eine befriedigende Theorie dieser Eisensteinreihen erweisen, daß die Reihen die Normalschar $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma(2N), -\frac{3}{2}, v_{\vartheta})$ aufspannen; mit diesem Sachverhalt ist nach allen bisher an Eisensteinreihen gemachten Erfahrungen zu rechnen (vgl. J III, §§ 3, 4 und Fußnote¹²⁾). Die allgemeine Theorie der Normalscharen zeigt nun, daß die Normalschar von der Dimension $-\frac{3}{2}$ durch die konstanten Glieder der ganzen Formen von der Dimension $-\frac{1}{2}$ in den Spitzen eindeutig bestimmt ist. Von den Gesetzen aber, die diese konstanten Glieder befolgen, ist gegenwärtig nur sehr wenig bekannt. —

Nach erfolgter Konstruktion der Eisensteinreihen $\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{3}{2}, \tilde{v}_4\}$ lassen sich die gesuchten arithmetischen Identitäten für die sämtlichen $a_n(\mathfrak{h}, 4)$ durch den Vergleich der ersten Fourier-Koeffizienten der betreffenden Theta- und Eisensteinreihen elementar gewinnen. Ebenso ergibt sich die nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Funktion $\Lambda(\tau)$ und mit ihr wegen

$$(\Lambda(\tau), \vartheta_1(\tau, 1, 4); \tilde{\Gamma}(4)) = 0$$

¹¹⁾ H. Maaß, Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ -Multiplikatoren in einer und zwei Variablen, Abhandl. Math. Seminar Hamburg 12 (1937).

¹²⁾ H. Petersson, Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen, erscheint in den Abhandl. Math. Seminar Hamburg.

das Verhältnis sowohl der Skalarprodukte

$$(\Theta(\tau; 0, 0, 1; 4), \vartheta_1(\tau, 1, 4); \tilde{\Gamma}(4)), \quad (\Theta(\tau; 1, 2, 2; 4), \vartheta_1(\tau, 1, 4); \tilde{\Gamma}(4))$$

als auch der Residuen der Dirichletreihen $D^*(s; \mathfrak{h}, 1, 4)$ für $\mathfrak{h} = \{0, 0, 1\}$ und $\mathfrak{h} = \{1, 1, 2\}$ im Punkte $s = \frac{3}{2}$. —

In einigen der oben mitgeteilten Beispiele beruht die Orthogonalität gewisser Paare von Thetafunktionen darauf, daß die Systeme der Fourier-Exponenten der beiden Thetareihen eines Paares in verschiedenen Restklassen nach einem passend bestimmten Modul liegen. Zur Ableitung solcher Orthogonalitätsrelationen kann man sich häufig des folgenden Zusammenhangs bedienen:

Es sei $\Gamma = \Gamma(N)$, $r > 0$, $|v| = 1$ und die zur Spitze ∞ von $\Gamma(N)$ gehörige reelle Zahl $\kappa = 0$. Sind zwei ganze Modulformen $f(\tau)$, $g(\tau)$ aus $\{\Gamma(N), -r, v\}$ vorgelegt, deren Fourier-Exponenten (vgl. (7) mit $A = I$) den Restklassen α bzw. $\beta \pmod{N}$ angehören, so gilt

$$f_1(\tau) \equiv f(\tau + 1) = e^{2\pi i \frac{\alpha}{N}} f(\tau), \quad g_1(\tau) \equiv g(\tau + 1) = e^{2\pi i \frac{\beta}{N}} g(\tau). \quad (78)$$

Aus den Grundeigenschaften des Skalarprodukts (dessen Existenz vorausgesetzt werde) ergibt sich nun einerseits $(f_1, g_1) = (f, g)$, andererseits nach (78)

$$(f_1, g_1) = e^{2\pi i \frac{\alpha-\beta}{N}} (f, g).$$

Daher ist $(f, g) = 0$, falls $\alpha \not\equiv \beta \pmod{N}$. Unter gewissen Annahmen über v läßt sich jede ganze Form $f \in \{\Gamma(N), -r, v\}$ linear mit konstanten Koeffizienten aus solchen ganzen Formen $\{\Gamma(N), -r, v\}$ kombinieren, deren Fourier-Exponenten jeweils einer festen Restklasse \pmod{N} angehören. Für die ganzen Formen $\{\Gamma(N), -r, 1\}$ (r ganz) ist der hier dargestellte Zusammenhang ein Sonderfall eines allgemeinen Satzes über die Orthogonalität von Formensystemen, die sich bei den Transformationen der vollen Modulgruppe nach zwei inäquivalenten irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe umsetzen¹³⁾.

(Eingegangen den 23. Januar 1948.)

¹³⁾ H. Petersson, Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung II, Math. Annalen 117 (1940), s. insbesondere Satz 11, § 2.