

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	22 (1949)
<b>Artikel:</b>	Sul comportamento asintotico dell'n-esimo polinomio di Laguerre nell'intorno dell'ascissa $4n$ .
<b>Autor:</b>	Tricomi, Francesco
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-19196">https://doi.org/10.5169/seals-19196</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sul comportamento asintotico dell' $n$ -esimo polinomio di Laguerre nell'intorno dell'ascissa $4n$

Per FRANCESCO TRICOMI, Torino

1. — Nello studio del comportamento asintotico per  $n \rightarrow \infty$  dell' $n$ -esimo polinomio di Laguerre :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}$$

si constata il fatto, a prima vista un po' strano, che gli intorni dei punti  $x = 0$  ed  $x = 4n$  si rivelano come singolari. Ad esempio ciò risulta in modo oltremodo evidente da un lavoro del *Moecklin* (relativo al caso  $\alpha = 0$ ) pubblicato nel 1934 in questa stessa rivista<sup>1)</sup>, dalla trattazione contenuta nella fondamentale opera di *Szegö* sui polinomi ortogonali<sup>2)</sup>, nonchè da una mia Nota del 1941<sup>3)</sup> in cui, generalizzando uno dei risultati ottenuti dal Moecklin al caso  $\alpha \neq 0$ , facevo vedere come una semplicissima formula asintotica per  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , mentre dava risultati sorprendentemente esatti nell'interno dell'intervallo  $(0, 4n)$ , cadeva invece insensibilmente in difetto nelle prossimità degli estremi di questo.

Per quel che concerne il punto  $x = 0$  la difficoltà può considerarsi ormai come completamente superata perchè in un altro mio precedente lavoro<sup>4)</sup> — recentemente generalizzato alle funzioni ipergeometriche confluenti<sup>5)</sup> — ho mostrato come  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , nell'intorno destro di  $x = 0$ , possa svilupparsi (supposto  $\alpha > -1$ ) in una serie non solo asintotica, ma

<sup>1)</sup> *E. Moecklin*, Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome, Comment. Math. Helv. 7, 1934—35, p. 24—46.

<sup>2)</sup> *G. Szegö*, Orthogonal Polynomials, New York 1939; Amer. Math. Soc. Colloquium publ. n° 23, p. 192 e seg.

<sup>3)</sup> *F. Tricomi*, Generalizzazione di una formula asintotica sui polinomi di Laguerre e sue applicazioni, Atti R. Acc. Scienze Torino 76, 1940—41, p. 288—316.

<sup>4)</sup> *F. Tricomi*, Sviluppo dei polinomi di Laguerre e di Hermite in serie di funzioni di Bessel, Giorn. Ist. Ital. Attuari 12, 1941, p. 14—33.

<sup>5)</sup> *F. Tricomi*, Sulle funzioni ipergeometriche confluenti, Annali di Matematica (4) 26, 1947—48, p. 141—175.

addirittura assolutamente ed uniformemente convergente, del tipo

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^{hx} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\frac{m-\alpha}{2}} J_{\alpha+m}(2\sqrt{nx}) ,$$

dove  $h$  è un'arbitraria costante non negativa (con privilegio per il valore  $h = \frac{1}{2}$ ) e le  $J$  denotano funzioni di Bessel. Fra l'altro, con l'ausilio della precedente formula, ho ultimamente ottenuto <sup>6)</sup> uno sviluppo asintotico dei *primi* zeri dei polinomi di Laguerre, cioè dei più piccoli fra essi, da cui si deduce in particolare la seguente, molto *aderente*<sup>7)</sup> formula asintotica :

$$\lambda_{n,r}^{(\alpha)} = \frac{j_{\alpha,r}^2}{\nu} \left[ 1 + \frac{2(\alpha^2 - 1) + j_{\alpha,r}^2}{\nu^2} \right] + O(n^{-4}), \quad \nu = 4n + 2(\alpha + 1), \quad (1)$$

dove  $\lambda_{n,r}^{(\alpha)}$  denota l' $r$ -esimo degli  $n$  zeri (tutti reali e positivi) di  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , disposti in ordine crescente e  $j_{\alpha,r}$  l' $r$ -esimo zero reale-positivo della funzione di Bessel  $J_{\alpha}(x)$ .

Meno soddisfacente è invece lo stato attuale della questione per quel che concerne l'intorno del punto  $x = 4n$ , perché lo sviluppo all'uopo ottenuto dal Moecklin col metodo del colle, oltre ad essere valido soltanto per  $\alpha = 0$ , è desolantemente complicato<sup>8)</sup>, mentre i più generali ed eleganti risultati ottenuti con lo stesso metodo dallo Szegö (op. cit.) nell'intorno del punto  $x = \nu = 4n + 2(\alpha + 1)$  non vanno oltre il primo termine, e la complicazione dei calcoli fa passare la voglia di andare oltre per la stessa via.

Per queste ragioni non mi sembra privo d'interesse far qui vedere come, combinando il metodo del colle con un ancora poco conosciuto metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, sia possibile ottenere senza troppe difficoltà quanti si vogliano termini di uno sviluppo, non solo asintotico ma *assolutamente ed uniformemente convergente* di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  nel-

<sup>6)</sup> F. Tricomi, Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica, Annali di Matematica. (4) 26, 1947—48, p. 283—300.

<sup>7)</sup> Ad esempio nel caso  $\alpha = 0$ ,  $n = 10$ ,  $r = 1$  la (1) fornisce  $\lambda_{10,1}^{(0)} = 0,13779$  mentre il valore esatto è 0,13781. Dianzi si conosceva soltanto, se non m'inganno, la formula

$$\lambda_{n,r}^{(\alpha)} = \frac{j_{\alpha,r}^2}{4n} + O(n^{-2}) .$$

(Szegö, op. cit. p. 123—124, Tricomi, op. cit. <sup>3)</sup>, p. 305.)

<sup>8)</sup> E' probabile che il Moecklin sarebbe giunto a risultati più semplici se avesse sviluppato intorno all'ascissa  $x = \nu = 4n + 2$  invece che intorno ad  $x = 4n$ . Ma nel caso  $\alpha = 0$  ciò si presentava ben poco spontaneo! Colgo l'occasione per avvertire che i valori esplicitamente dati dal Moecklin per i coefficienti da lui indicati con  $a_{21}$  e  $a_{22}$  non sono esatti: devono moltiplicarsi per l'unità immaginaria  $i$ .

l'intorno del predetto punto  $x = \nu$ ; sviluppo di cui calcolerò esplicitamente i due primi termini ottenendo così la formula

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \gamma_1 \left\{ A_1(t) + \left[ \frac{t^2}{5} A'_1(t) + \frac{3+5\alpha}{10} \left\{ t - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left\{ A_1(t) \right\} \right] \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \nu^{-\frac{2}{3}} \right\} + O(n^{-\frac{5}{3}}) \quad (2)$$

dove si è posto

$$x = \nu - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} t, \quad \gamma_1 = (-1)^n \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \left[ \sqrt[3]{6} \nu^{-\frac{1}{3}} + \frac{3+5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \nu^{-1} \right] + O(n^{-\frac{5}{3}}) \quad (3)$$

e si è denotata con  $A_1(t)$  la cosiddetta *funzione di Airy*, la cui espressione mediante funzioni di Bessel è la seguente:

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{t}{3}} \left\{ J_{-\frac{1}{3}} \left[ 2 \left( \frac{t}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + J_{\frac{1}{3}} \left[ 2 \left( \frac{t}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}. \quad (4)$$

Fra l'altro, la (2) conduce alla seguente rappresentazione asintotica degli *ultimi* zeri dei polinomi di Laguerre:

$$\lambda_{n,n-r+1}^{(\alpha)} = \nu - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} i_r \nu^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{5} \left( \sqrt[3]{\frac{4}{3}} i_r \right)^2 \nu^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-1}), \quad (5)$$

dove  $i_r$  denota l' $r$ -esimo zero reale-positivo della funzione di Airy<sup>9)</sup>, che nel caso  $r = 1$  rettifica una formula sull'ultimo zero di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  precedentemente ottenuta da *V. E. Spencer*<sup>10)</sup> col metodo di confronto di Sturm.

2. — Il suaccennato nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, che può forse farsi risalire al mio indimenticabile collega ed amico *G. Fubini*<sup>11)</sup>, non sembra ancora molto conosciuto, nonostante sia stato

<sup>9)</sup> Le  $i_r$  sono legate agli zeri  $s_r$  della funzione  $J_{-\frac{1}{3}}(x) + J_{\frac{1}{3}}(x)$ , di cui è data una tabella a p. 751 delle *Bessel Functions* di *G. N. Watson*, dalla relazione  $2(i_r/3)^{\frac{3}{2}} = s_r$  che implica

$$\sqrt[3]{\frac{4}{3}} i_r = (3 s_r)^{\frac{2}{3}}.$$

<sup>10)</sup> *V. E. Spencer*, Asymptotic expressions for the zeros of generalized Laguerre polynomials and Weber functions, Duke Math. Journ. 3, 1937, p. 667—675. La formula analoga alla (5) dello Spencer (la (42), alla fine del lavoro) va corretta nel senso che in luogo di  $4n + 2\alpha$  deve essere scritto  $\nu$ , cioè  $4n + 2\alpha + 2$ ; il che non è privo d'importanza perché il primo termine di essa si altera della quantità finita 2, mentre la formula finisce, come la nostra (5), con  $O(n^{-1})$ .

<sup>11)</sup> *G. Fubini*, Studi asintotici per alcune equazioni differenziali, Rend. Acc. Lincei (6) 26, 1937, p. 253—259.

già ripetutamente adoperato, specie in Italia<sup>12)</sup>. Vale pertanto la pena di esporne rapidissimamente il concetto restando, per semplicità, nell'ambito delle equazioni del *second'ordine*, benchè la sua estensione all'ordine  $n$  e perfino a certi tipi di equazioni non lineari, non presenti particolari difficoltà.

Il metodo è fondato sull'osservazione che se una data equazione differenziale lineare di 2º ordine si scrive sotto la forma

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y \quad (6)$$

dove

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

sia un'equazione che si sa integrare esplicitamente, di cui si conoscono cioè due integrali linearmente indipendenti :

$$y_1 = F_1(x), \quad y_2 = F_2(x);$$

alla (6) può formalmente applicarsi il procedimento lagrangiano della variazione delle costanti arbitrarie che, posto

$$y = C_1(x)F_1(x) + C_2(x)F_2(x), \quad y' = C_1(x)F'_1(x) + C_2(x)F'_2(x) \quad (7)$$

conduce, nell'ipotesi che sia  $A(x) \neq 1$ , alle due equazioni integrali di Volterra nelle funzioni incognite  $C_1(x)$  e  $C_2(x)$  :

$$\begin{cases} C_1(x) = \gamma_1 - \int_{x_0}^x F_2(\xi) [\Phi_1(\xi)C_1(\xi) + \Phi_2(\xi)C_2(\xi)]d\xi \\ C_2(x) = \gamma_2 + \int_{x_0}^x F_1(\xi) [\Phi_1(\xi)C_1(\xi) + \Phi_2(\xi)C_2(\xi)]d\xi \end{cases}$$

avendo denotato con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due costanti legate ai valori di  $y$  e  $y'$  per  $x = x_0$  dalle equazioni

$$y(x_0) = \gamma_1 F_1(x_0) + \gamma_2 F_2(x_0), \quad y'(x_0) = \gamma_1 F'_1(x_0) + \gamma_2 F'_2(x_0) \quad (8)$$

e con  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  le (note) funzioni date dalla formula

$$\Phi_i(x) = \frac{A(x)F''_i(x) + B(x)F'_i(x) + C(x)F_i(x)}{[1 - A(x)]W(x)}, \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

dove  $W(x)$  denota il wronskiano dei due integrali  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$ .

Anzi il precedente sistema integrale può, con facili trasformazioni, ridursi alle due equazioni integrali ad una sola incognita :

<sup>12)</sup> Per esempio nel mio recente libro: *Equazioni differenziali* (Torino, Einaudi, 1948) che contiene un'appendice esplicitamente dedicata a detto metodo. Esso comprende in se come caso particolare il metodo "di Liouville-Steckloff" ripetutamente usato da G. Szegö nell'opera cit.<sup>2)</sup>.

$$G_i(x) - \int_{x_0}^x K(x, \xi) G_i(\xi) d\xi = \Phi_i(x), \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

avendo posto

$$K(x, \xi) = \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ \Phi_1(x) & \Phi_2(x) \end{vmatrix}, \quad (11)$$

e si giunge così alla seguente formula di rappresentazione degli integrali della data equazione :

$$y = \gamma_1 Y_1(x) + \gamma_2 Y_2(x); \quad Y_i(x) = F_i(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ F_1(x) & F_2(x) \end{vmatrix} G_i(\xi) d\xi, \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

dove  $G_i$  — quale soluzione dell'equazione integrale di Volterra di seconda specie (10) — è data dalla serie *assolutamente ed uniformemente convergente* :

$$G_i(x) = \Phi_i(x) + \int_{x_0}^x [K(x, \xi) + K_2(x, \xi) + K_3(x, \xi) + \dots] \Phi_i(\xi) d\xi, \quad (13)$$

avendo, come di consueto, designato con  $K_2, K_3, \dots$  i successivi *iterati* del nucleo  $K(x, \xi)$ .

E' molto notevole il fatto che le considerazioni precedenti si applicano „qualunque“ siano, piccoli o grandi, i coefficienti  $A, B$  e  $C$  del secondo membro della (6). Tuttavia se tali coefficienti sono „piccoli“, cioè se — contenendo l'equazione un certo parametro  $\mu$  — si possa asserire che per  $\mu \rightarrow 0$  è (uniformemente rispetto ad  $x$ )

$$A(x) = O(\mu^h), \quad B(x) = O(\mu^h), \quad C(x) = O(\mu^h), \quad (h > 0) \quad (14)$$

sarà in conseguenza

$$\Phi_i(x) = O(\mu^h), \quad K(x, \xi) = O(\mu^h), \quad K_2(x, \xi) = O(\mu^{2h}), \quad K_3(x, \xi) = O(\mu^{3h}), \dots$$

e lo sviluppo ottenuto sostituendo nella seconda delle (12) la serie (13) assumerà anche un carattere asintotico ; il che implica che, in particolare, si avrà

$$\begin{aligned} Y_i(x) &= F_i(x) + O(\mu^h), \\ Y_i(x) &= F_i(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} F_1(\xi) & F_2(\xi) \\ F_1(x) & F_2(x) \end{vmatrix} \Phi_i(\xi) d\xi + O(\mu^{2h}), \dots \end{aligned} \quad (15)$$

3. — Il metodo di cui sopra può, fra l'altro, applicarsi, e in molteplici modi, all'equazione differenziale delle funzioni ipergeometriche confluenti :

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0 \quad (16)$$

il cui integrale regolare nell'origine ed assumente ivi il valore 1 — che si designa abitualmente con  ${}_1F_1(a; c; x)$  o, più semplicemente, con  $F(a, c; x)$  — è legato ai polinomi di Laguerre dall'uguaglianza

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{\alpha + n}{n} F(-n, \alpha + 1; x). \quad (17)$$

Agli scopi che abbiamo qui in vista conviene praticare anzitutto nella (16) la sostituzione

$$y = e^{\frac{x}{2}} z$$

con che essa diviene

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + c \frac{dz}{dx} + (2c - 4a - x) \frac{z}{4} = 0$$

e successivamente, posto per brevità<sup>13)</sup>

$$2c - 4a = \nu$$

cambiare la variabile indipendente  $x$  in una nuova variabile  $t$  legata alla precedente dalla relazione

$$x = \nu - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} t \quad (18)$$

con che si giunge all'equazione differenziale :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3} t z = \left( t \frac{d^2 z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} \right) \mu, \quad \left( \mu = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \nu^{-\frac{2}{3}} \right) \quad (19)$$

che si presta egregiamente all'applicazione del metodo precedente, perchè nel caso dei polinomi di Laguerre, cioè nel caso in cui è

$$a = -n, \quad c = \alpha + 1, \quad \nu = 4n + 2(\alpha + 1)$$

i coefficienti del secondo membro sono  $O(n^{-\frac{2}{3}})$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Inoltre l'equazione ottenuta uguagliando a zero il primo membro della (19) e cioè l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3} t z = 0 \quad (20)$$

è un'equazione che s'integra facilmente mediante funzioni di Bessel d'ordine  $\pm \frac{1}{3}$ . Precisamente essa è l'equazione cui soddisfa la funzione di Airy cui si è già accennato, epperò due suoi integrali linearmente indipendenti sono

$$y_1 = A_1(x), \quad y_2 = A_2(x)$$

<sup>13)</sup> La quantità  $\nu = 2c - 4a$  coincide col quadruplo del primo dei due parametri  $k$  ed  $m$  introdotti dal Whittaker nello studio delle funzioni ipergeometriche confluenti.

dove  $A_1(x)$  è data dalla (4) ed  $A_2(x)$  dall'analoga formula

$$A_2(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{t} \left\{ J_{-\frac{1}{3}} \left[ 2 \left( \frac{t}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - J_{\frac{1}{3}} \left[ 2 \left( \frac{t}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \quad (21)$$

dove si è cambiato il segno interposto fra le due funzioni di Bessel e inoltre si è moltiplicato tutto per  $\sqrt{3}$ .

Questi due integrali sono effettivamente indipendenti perché, essendo

$$\begin{aligned} A_2(0) &= \sqrt{3} A_1(0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{2}{3})} , \\ A'_2(0) &= -\sqrt{3} A'_1(0) = -\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{1}{3})} , \end{aligned} \quad (22)$$

il loro wronskiano  $W$  — necessariamente costante perché nella (20) manca il termine con la derivata prima — è dato dalla formula

$$W = \begin{vmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A'_1(t) & A'_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1(0) & A_2(0) \\ A'_1(0) & A'_2(0) \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{3} . \quad (23)$$

Bastano già queste poche considerazioni per potere asserire — utilizzando la prima delle (15) — che se  $y(x)$  è una qualsiasi funzione ipergeometrica confluente, cioè una qualsiasi soluzione della (16); dette  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due opportune costanti, al divergere del parametro  $\nu$ , cioè per  $a \rightarrow -\infty$ , dovrà avversi

$$e^{-\frac{x}{2}} y(x) = \gamma_1 [A_1(t) + O(\nu^{-\frac{2}{3}})] + \gamma_2 [A_2(t) + O(\nu^{-\frac{2}{3}})] , \quad (24)$$

ciò che — a prescindere dalla determinazione delle costanti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  — è in sostanza il risultato ottenuto dallo Szegö pei polinomi di Laguerre. Invero, avendosi allora (v. più avanti, § 9)

$$\gamma_1 = (-1)^n \frac{2^{-\alpha}}{\pi} 6^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-1}) , \quad \gamma_2 = O(n^{-1}) ,$$

la (24) coincide con la formula (8.22.11) a p. 195 dell'op. cit. sotto<sup>2)</sup>.

4. — Per ottenere una maggiore approssimazione non c'è che da calcolare un termine successivo, cioè servirsi della seconda invece che della prima delle (15). All'uopo occorre anzitutto calcolare  $\Phi_i$  per mezzo della (9), che nel caso attuale fornisce :

$$\Phi_i(\xi) = [\xi^2 A_i(\xi) - 3c A'_i(\xi)] \frac{\mu}{\pi} + O(\mu^2) , \quad (i = 1, 2)$$

epperò, detti  $Z_1$  e  $Z_2$  due integrali linearmente indipendenti della (16) e supposto  $x_0 = 0$ , potrà porsi

$$Z_i(t) = A_i(t) + \frac{\mu}{\pi} \int_0^t [A_1(\xi)A_2(t) - A_2(\xi)A_1(t)] [\xi^2 A_i(\xi) - 3c A'_i(\xi)] d\xi + O(\mu^2) . \quad (25)$$

Sono ora da calcolare gli 8 integrali indefiniti:

$$I_{i,j} = \int \xi^2 A_i(\xi) A_j(\xi) d\xi , \quad I'_{i,j} = \int A_i(\xi) A'_j(\xi) d\xi , \quad (i, j = 1, 2)$$

di cui alcuni sono quasi immediati. Invero si ha anzitutto che

$$I'_{i,i} = \frac{1}{2} A_i^2(\xi)$$

e successivamente, tenendo conto della (23), si hanno le due equazioni

$$I'_{1,2} + I'_{2,1} = A_1(\xi) A_2(\xi) , \quad I'_{1,2} - I'_{2,1} = \int W d\xi = -\frac{\pi}{3} \xi$$

che forniscono subito i valori dei rimanenti  $I'$ . Quanto agli integrali  $I_{i,j}$  non c'è che da osservare che, con una facile derivazione in cui giova tener conto della (20), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [\xi^3 A_i A_j + 3(A_i - \xi A'_i)(A_j - \xi A'_j)] &= 3\xi^2 A_i A_j + \xi^3 (A'_i A_j + A_i A'_j) \\ &\quad + 3(-\xi A''_i)(A_j - \xi A'_j) + 3(A_i - \xi A'_i)(-\xi A''_j) \\ &= 3\xi^2 A_i A_j + \xi^3 (A'_i A_j + A_i A'_j) + \xi^2 A_i (A_j - \xi A'_j) \\ &\quad + \xi^2 A_j (A_i - \xi A'_i) = 5\xi^2 A_i A_j \end{aligned}$$

dove segue che

$$I_{i,j} = \frac{1}{5} \xi^3 A_i(\xi) A_j(\xi) + \frac{3}{5} [A_i(\xi) - \xi A'_i(\xi)] [A_j(\xi) - \xi A'_j(\xi)] .$$

Passando al calcolo degli integrali definiti che a noi servono si trovano così le formule

$$\begin{aligned} \int_0^t \xi^2 A_1(\xi) A_2(\xi) d\xi &= \frac{1}{5} t^3 A_1(t) A_2(t) + \frac{3}{5} [A_1(t) - t A'_1(t)] [A_2(t) - t A'_2(t)] - \frac{3}{5} A_1(0) A_2(0) , \\ \int_0^t \xi^2 A_i^2(\xi) d\xi &= \frac{1}{5} t^3 A_i^2(t) + \frac{3}{5} [A_i(t) - t A'_i(t)]^2 - \frac{3}{5} A_i^2(0) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t A_i(\xi) A'_i(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} A_i^2(t) - \frac{1}{2} A_i^2(0) , \\ \int_0^t A_1(\xi) A'_2(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} A_1(t) A_2(t) - \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2} A_1(0) A_2(0) , \end{aligned}$$

$$\int_0^t A'_1(\xi) A_2(\xi) d\xi = \frac{1}{2} A_1(t) A_2(t) + \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2} A_1(0) A_2(0) .$$

Sostituendo questi valori nella (25) avvengono molte semplificazioni e a calcoli effettuati — nel cui corso giova tener presente la (23) — si giunge alla formula

$$\begin{aligned} Z_i(t) = A_i(t) + \left\{ \frac{t^2}{5} A'_i(t) + \left( \frac{c}{2} - \frac{1}{5} \right) \left[ t + (-1)^i \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right] A_i(t) \right. \\ \left. - (-1)^i \left( \frac{c}{2} - \frac{1}{5} \right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} A_{i+1}(t) \right\} \mu + O(\mu^2), \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (26)$$

dove per  $i = 2$  è da porre  $A_{i+1}(t) = 3A_1(t)$ . In particolare, nel caso dei polinomi di Laguerre, dette  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due costanti opportune, vale la formula :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \gamma_1 \left\{ A_1(t) + \left[ \frac{t^2}{5} A'_1(t) + \alpha' (t - \beta) A_1(t) + \alpha' \frac{\beta}{\sqrt{3}} A_2(t) \right] \mu + O(\mu^2) \right\} \\ + \gamma_2 \left\{ A_2(t) + \left[ \frac{t^2}{5} A'_2(t) + \alpha' (t + \beta) A_2(t) - \alpha' \sqrt{3} \beta A_1(t) \right] \mu + O(\mu^2) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

avendo, per abbreviare, posto

$$\frac{c}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3 + 5\alpha}{10} = \alpha', \quad \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \beta. \quad (28)$$

5. — La sola difficoltà che si presenta nell'utilizzazione pratica della (27) — o delle più generali formule che potrebbero ottenersi calcolando ulteriori termini della serie (13) — sta nell'effettiva determinazione delle due costanti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Vedremo fra breve come questa difficoltà possa venire superata completamente col metodo del colle che, dovendo venir così utilizzato soltanto per la valutazione asintotica di un determinato valore di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  (quello corrispondente ad  $x = \nu$ ), subisce sostanziali semplificazioni.

Merita tuttavia la pena di osservare che — utilizzando i risultati ottenuti da Szegö limitatamente al fatto che da essi risulta che

$$\gamma_1 = O(\mu^{\frac{1}{2}}), \quad \gamma_2 = O(\mu^{\frac{3}{2}}), \quad (29)$$

ed ammettendo come evidente che in una formula di rappresentazione asintotica di una funzione *limitata* non possano figurare funzioni non limitate — quanto è stato stabilito nel § precedente basta già per otte-

nere la rappresentazione asintotica (5) degli ultimi zeri dei polinomi di Laguerre.

Invero, tenendo conto delle (29), la (27) può scriversi

$$\frac{1}{\gamma_1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = A_1(t) + \left[ \frac{t^2}{5} A'_1(t) + \alpha' (t - \beta) A_1(t) \right] \mu + \left( \frac{\alpha' \beta}{\sqrt{3}} + \frac{\gamma_2}{\mu \gamma_1} \right) A_2(t) \mu + O(\mu^2)$$

ma — ammesso il principio suaccennato — nella rappresentazione asintotica della funzione

$$\frac{1}{\gamma_1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)$$

che è limitata (anzi tende a zero) per  $x \rightarrow +\infty$ , cioè per  $t \rightarrow -\infty$ , non può figurare la funzione  $A_2(t)$  che tende invece ad  $\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ , perchè i soli integrali della (20) che restano limitati per  $t \rightarrow -\infty$  sono notoriamente quelli del tipo  $C A_1(t)$ ; dunque dovrà necessariamente essere

$$\frac{\alpha' \beta}{\sqrt{3}} + \frac{\gamma_2}{\mu \gamma_1} = O(\mu) , \quad (30)$$

il che implica che gli zeri di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  possono pensarsi ottenuti risolvendo un'equazione della forma :

$$A_1(t) + \left[ \frac{t^2}{5} A'_1(t) + \alpha' (t - \beta) A_1(t) \right] \mu + O(\mu^2) = 0 ,$$

ciò che, per un teorema generale contenuto nel mio lavoro cit.<sup>6</sup>), implica che, detto  $t_r$  il valore di  $t$  corrispondente all'  $(n - r + 1)$ -esimo zero di  $L_n^{(\alpha)}(x)$  ed  $i_r$  l' $r$ -esimo zero reale-positivo di  $A_1(t)$ , può senz'altro scriversi che

$$t_r = i_r - \frac{1}{A'_1(i_r)} \left[ \frac{i_r^2}{5} A'_1(i_r) + \alpha' (i_r - \beta) A_1(i_r) \right] \mu + O(\mu^2)$$

cioè

$$t_r = i_r - \frac{i_r^2}{5} \mu + O(\mu^2)$$

e di qui il passaggio alla (5) è immediato.

Il teorema generale cui si è ora alluso ha l'enunciato seguente :

*Se la funzione  $f(x, \mu)$  è suscettibile (uniformemente rispetto ad  $x$ ) della rappresentazione asintotica*

$$f(x, \mu) = \sum_{k=0}^m g_k(x, \mu) \mu^k + O(\mu^{m+1})$$

dove  $g_k(x, \mu)$  denota una funzione derivabile almeno  $m - k + 1$  volte rispetto ad  $x$  nell'intorno di uno zero semplice  $x_0$  della funzione  $g_0(x, \mu)$ ; dato il numero positivo  $\varepsilon$ , piccolo a piacere, per  $|\mu|$  minore di un opportuno  $\delta$ , la funzione  $f(x, \mu)$  ha almeno uno zero  $x_0^*$  compreso fra  $x_0 - \varepsilon$  ed  $x_0 + \varepsilon$ , e tale che risulta

$$x_0^* = x_0 + \mu \sum_{k=0}^{m-1} w_k \mu^k + O(\mu^{m+1}) ,$$

dove  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$  sono opportune quantità dipendenti dai valori per  $x = x_0$  delle  $g_k$  e delle loro derivate, di cui la prima ha l'espressione seguente

$$w_0 = - \frac{g_1(x_0, \mu)}{g'_0(x_0, \mu)} ,$$

dove l'apice denota derivazione rispetto ad  $x$ .

6. — Per svincolare i precedenti risultati da qualsiasi „principio“ non rigorosamente dimostrato e dalla trattazione di Szegö, nonché per porci in grado di adoperare la (27) nella sua integrità, converrà cercare ora di determinare direttamente le costanti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , facendo poi vedere che le (29) e la (30) sono effettivamente verificate.

All'uopo ci serviamo del metodo del colle che, come si è già accennato, permette di determinare con grande precisione e relativa semplicità i valori dell' $n$ -esimo polinomio di Laguerre e della sua derivata nel punto  $x = \nu$ , o, più esattamente, i valori di

$$k_1 = \left[ e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \right]_{x=\nu} ,$$

$$k_2 = \left\{ \frac{d}{dx} \left[ e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \right] \right\}_{x=\nu} = e^{-\frac{\nu}{2}} \left[ L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\nu) + \frac{1}{2} L_n^{(\alpha)}(\nu) \right] ,$$

che, come risulta dalle (8), sono legati alle costanti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dalle equazioni

$$\gamma_1 A_1(0) + \gamma_2 A_2(0) = k_1, \quad \gamma_1 A'_1(0) + \gamma_2 A'_2(0) = k_2 \frac{dx}{dt} = - \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} k_2$$

da cui si traggono facilmente le formule

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} k_1 - \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \nu^{\frac{1}{3}} k_2 , \quad \gamma_2 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} k_1 + \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \nu^{\frac{1}{3}} k_2 . \quad (31)$$

Cominciamo con l'osservare che la ben nota rappresentazione integrale dei polinomi di Laguerre :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-z} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^n \left(1 + \frac{z}{x}\right)^\alpha \frac{dz}{z} \quad (32)$$

dove  $C$  denota una curva chiusa del piano complesso  $z$  (da percorrersi in verso positivo nell'integrazione) comprendente nel suo interno il punto  $z = 0$  ma lasciante fuori il punto  $z = -x$ , può mettersi sotto una rimarchevole nuova forma notando anzitutto che può manifestamente scriversi che

$$\begin{aligned} (-1)^n L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-z} \left(\frac{x+z}{-z}\right)^{n+\frac{\alpha+1}{2}} \left(\frac{x+z}{-z}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left(\frac{x+z}{x}\right)^\alpha \frac{dz}{z} = \\ &= -\frac{x^{-\alpha}}{2\pi i} \oint_C e^{-z} \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x+2z}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{x+2z}{2}}\right)^{\frac{\nu}{4}} \left(\frac{x}{2} + \frac{x+2z}{2}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{x+2z}{2}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} dz = \\ &= -\frac{x^{-\alpha}}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1} \oint_C e^{-z} \left(\frac{1 + \frac{x+2z}{x}}{1 - \frac{x+2z}{x}}\right)^{\frac{\nu}{4}} \left[1 - \left(\frac{x+2z}{x}\right)^2\right]^{\frac{\alpha-1}{2}} dz \end{aligned}$$

e praticando successivamente il cambiamento di variabile

$$\frac{x+2z}{x} = \zeta$$

che conduce alla formula

$$(-1)^n e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{2^{-\alpha}}{2\pi i} \oint_{C'} e^{-\frac{x\zeta}{2}} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{\nu}{4}} (1-\zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} d\zeta \quad (33)$$

dove  $C'$  è una qualsiasi curva chiusa del piano  $\zeta$  (corrispondente alla curva  $C$  del piano  $z$ ) comprendente nel suo interno il punto  $\zeta = 1$  ma lasciante fuori il punto  $\zeta = -1$ .

In forma un po' diversa, se poniamo

$$\log \left[ e^{-\frac{x\zeta}{2}} \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\frac{\nu}{4}} \right] = \frac{\nu}{2} \varphi_x(\zeta)$$

il che conduce alla formula

$$\varphi_x(\zeta) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{x}{\nu} \zeta = \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \dots \quad (34)$$

e, in particolare, per  $x = \nu$ , alla formula :

$$\varphi_\nu(\zeta) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \zeta = \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \frac{\zeta^7}{7} + \dots \quad (34')$$

potremo scrivere che è

$$(-1)^n e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{2^{-\alpha}}{2\pi i} \oint_{C'} e^{\frac{\nu}{2}\varphi_x(\zeta)} (1-\zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} d\zeta . \quad (35)$$

7. — La rappresentazione integrale (35) — che pone in chiara luce il peculiare carattere dell'ascissa  $x = \nu$ , che è la sola per cui la funzione  $\varphi_x(\zeta)$  ha uno zero del terz'ordine per  $\zeta = 0$  — può essere evidentemente applicata usando come curva  $C'$  una curva del tipo di quella indicata in figura, cioè composta dai due segmenti uguali  $AO$  ed  $OB$  delle due semirette  $r_1$  ed  $r_2$  uscenti dall'origine con le anomalie  $\pm\varphi$  — dove  $\varphi$  è un angolo acuto (pel momento) qualsiasi — e dall'arco  $K$  fra esse compreso della circonferenza di centro  $O$  e raggio  $OA = R > 1$ , da percorrersi nel verso da  $B$  ad  $A$ . Dico anzi che essendo (almeno nel caso  $x = \nu$ )

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_K e^{\frac{\nu}{2}\varphi_\nu(\zeta)} (1-\zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} d\zeta = 0 \quad (36)$$

si può passare al limite per  $R \rightarrow \infty$ ; ciò che, considerato che i contributi delle due semirette indefinite  $r_1$  ed  $r_2$  (percorse entrambe nel verso da 0 ad  $\infty$ ) all'integrale sono manifestamente complessi coniugati, epperò è

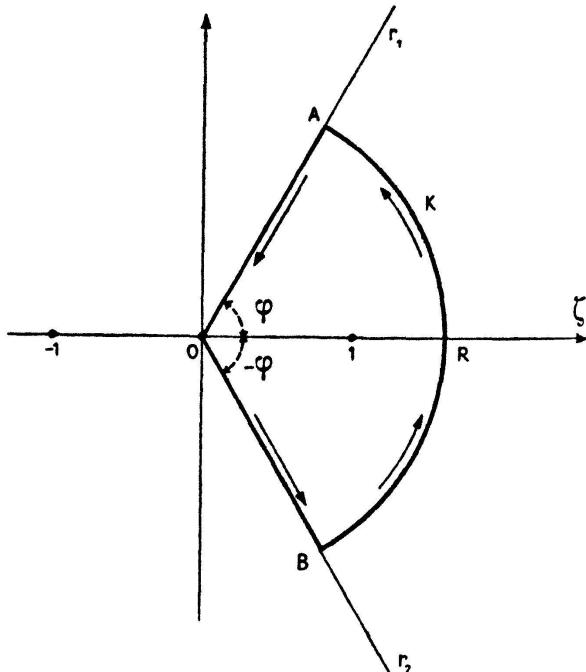
$$-\int_{r_1} + \int_{r_2} = -2i \Im \int_{r_1} ,$$

implica la possibilità di sostituire alla (35), almeno nel caso  $x = \nu$ , la più semplice formula

$$(-1)^n e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) = \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \Im \int_{r_1} e^{-\frac{\nu}{2}\varphi_\nu(\zeta)} (1-\zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} d\zeta . \quad (37)$$

Per legittimare questo passaggio occorre però dimostrare la (36), ciò che si fa abbastanza agevolmente osservando anzitutto che sulla circonferenza  $K$ , su cui è  $|\zeta| = R$ , si ha ovviamente

$$R^2 - 1 \leq |\zeta^2 - 1| \leq R^2 + 1$$



donde segue

$$\left| (1 - \zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \right| \leq (R^2 \pm 1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad (38)$$

intendendosi assunto il segno *più* o il segno *meno* secondo che è  $\alpha \geq 1$  oppure  $-1 < \alpha \leq 1$ . In secondo luogo osserviamo che, sull'arco  $K$ , si ha pure che

$$\Re \zeta \geq R \cos \varphi$$

ciò che, tenuto conto che  $\cos \varphi > 0$  e che ovviamente è

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} = 0$$

porta con sè che — detto  $\eta$  un numero positivo qualsiasi — per  $R$  maggiore di un opportuno  $R_0$  — sull'arco  $K$  si avrà simultaneamente

$$\Re \zeta > \eta , \quad \left| \Re \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right| < \eta ,$$

donde, per la (34'), segue che

$$\begin{aligned} -\Re \varphi_\nu(x) &= \Re \zeta - \frac{1}{2} \Re \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} = \\ &= \frac{1}{2} \Re \zeta + \frac{1}{2} \left[ \Re \zeta - \Re \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right] > \frac{1}{2} \Re \zeta \geq \frac{1}{2} R \cos \varphi . \end{aligned} \quad (39)$$

Dalle due disuguaglianze (38) e (39) è facile desumere la relazione di limite (36). Infatti da dette disuguaglianze segue subito che

$$\begin{aligned} \left| \int_K e^{\frac{\nu}{2} \Re \varphi_\nu(\zeta)} (1 - \zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} d\zeta \right| &\leq \int_K e^{\frac{\nu}{2} \Re \varphi_\nu(\zeta)} \left| (1 - \zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \right| d\zeta < \\ &< \int_K e^{-\frac{\nu}{4} R \cos \varphi} (R^2 \pm 1)^{\frac{\alpha-1}{2}} |d\zeta| < \pi e^{-\frac{\nu}{4} R \cos \varphi} (R^2 \pm 1)^{\frac{\alpha-1}{2}} , \end{aligned}$$

il che dimostra l'assunto perchè l'ultimo membro tende visibilmente a zero per  $R \rightarrow \infty$ .

8. — Lo sviluppo in serie della funzione  $\varphi_\nu(\zeta)$  indicato nella (34'), e di cui non ci siamo finora serviti, non vale ovviamente che per  $|\zeta| < 1$ . Però ancorchè sia  $|\zeta| \geq 1$  esso vale come sviluppo *asintotico*, nel senso che, qualunque sia l'intero  $m$ , può asserirsi che è

$$\varphi_\nu(\zeta) = \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \cdots + \frac{\zeta^{2m-1}}{2m-1} + O(\zeta^{2m+1})$$

ciò che, con Poincaré, si traduce nella scrittura

$$\varphi_\nu(\zeta) \sim \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \dots$$

dove si trae ulteriormente che

$$e^{\frac{\nu}{2}\varphi_\nu(\zeta)} \sim e^{\frac{\nu\zeta^3}{6}} e^{\frac{\nu\zeta^5}{10}} e^{\frac{\nu\zeta^7}{14}} \dots \sim e^{\frac{\nu\zeta^3}{6}} \left(1 + \frac{\nu\zeta^5}{10} + \frac{1}{2!} \frac{\nu^2\zeta^{10}}{100} + \dots\right) \left(1 + \frac{\nu\zeta^7}{14} + \dots\right) \dots \sim \\ \sim e^{\frac{\nu\zeta^3}{6}} \left(1 + \frac{\nu\zeta^5}{10} + \frac{\nu\zeta^7}{14} + \frac{\nu\zeta^9}{18} + \frac{\nu^2\zeta^{10}}{200} + \dots\right).$$

Analogamente può porsi

$$(1 - \zeta^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sim 1 + \frac{1-\alpha}{2} \zeta^2 + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{8} \zeta^4 + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)}{48} \zeta^6 + \dots$$

da cui, moltiplicando fra loro le due serie asintotiche e sostituendo nella (37), si deduce che

$$(-1)^n e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) \sim \\ \sim \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \Im \int_{r_1}^{\frac{\nu\zeta^3}{6}} e^{\frac{\nu\zeta^3}{6}} \left[ 1 + \frac{1-\alpha}{2} \zeta^2 + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{8} \zeta^4 + \frac{\nu}{10} \zeta^5 + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)}{48} \zeta^6 + \frac{\nu}{14} \zeta^7 + \dots \right] d\zeta.$$

Giunti a questo punto procuriamo di determinare l'angolo acuto  $\varphi$  in modo conforme allo spirito del metodo del colle, cioè in modo che, posto  $\zeta = \varrho e^{i\varphi}$ , l'esponenziale decresca il più rapidamente possibile al crescere di  $\varrho$ ; ciò che, essendo

$$\frac{\nu\zeta^3}{6} = \frac{\nu\varrho^3}{6} (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

si realizza evidentemente ponendo  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , il che implica

$$\frac{\nu\zeta^3}{6} = -\frac{\nu\varrho^3}{6}, \quad \zeta^k = \varrho^k e^{\frac{k\pi}{3}i}, \quad d\zeta = e^{\frac{\pi}{3}i} d\varrho.$$

Conseguentemente la precedente formula assume l'aspetto

$$(-1)^n e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) \sim \tag{40}$$

$$\sim \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \Im \int_0^\infty e^{-\frac{\nu\varrho^3}{6}} \left[ e^{\frac{\pi}{3}i} + \frac{1-\alpha}{2} \varrho^2 e^{\frac{3\pi}{3}i} + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{8} \varrho^4 e^{\frac{5\pi}{3}i} + \frac{\nu}{10} \varrho^5 e^{\frac{6\pi}{3}i} + \dots \right] d\varrho$$

da cui, tenendo conto che è

$$\Im e^{\frac{\pi}{3}i} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Im e^{3\frac{\pi}{3}i} = 0, \quad \Im e^{5\frac{\pi}{3}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \Im e^{6\frac{\pi}{3}i} = 0, \dots$$

si ha

$$(-1)^n e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) \sim \\ \mathcal{O} \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\nu \varrho^3}{6}} \left[ 1 - \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{8} \varrho^4 + \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)}{48} \varrho^6 + \frac{\nu}{14} \varrho^7 + \dots \right] d\varrho.$$

Finalmente eseguiamo l'ultimo cambiamento di variabile

$$\frac{\nu \varrho^3}{6} = t, \quad \varrho = 6^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}, \quad d\varrho = \frac{1}{3} 6^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}} dt$$

con che gli integrali dei singoli termini vengono ricondotti a quello che definisce la funzione  $\Gamma$  e si conclude che è

$$e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) \sim \\ \mathcal{O} \frac{(-1)^n}{\pi} 2^{-\frac{2}{3}-\alpha} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \nu^{-\frac{1}{3}} - 6^{\frac{4}{3}} \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)}{8} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \nu^{-\frac{5}{3}} + 6^{\frac{7}{3}} \frac{1}{14} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \nu^{-\frac{8}{3}} + \dots \right]$$

donde, essendo  $\nu = O(n)$ , si deduce in particolare che è

$$k_1 = e^{-\frac{\nu}{2}} L_n^{(\alpha)}(\nu) = \frac{(-1)^n}{\pi} 2^{-\frac{2}{3}-\alpha} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \nu^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{5}{3}}), \quad (41)$$

cioè che basta già ai nostri scopi.

Per valutare anche  $k_2$ , cioè, in sostanza,  $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\nu)$ , non c'è che da osservare che, per la (32), si ha

$$L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-z} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{z}{x}\right)^{\alpha+1} \frac{dz}{z} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-z} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^n \left(1 + \frac{z}{x}\right)^{\alpha} \frac{z}{x} \frac{dz}{z}$$

cioè che la sola diversità rispetto al caso precedente sta nell'aggiunta sotto integrale del fattore

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{2}.$$

Conseguentemente dalla (40) può senz'altro dedursi che

$$(-1)^n e^{-\frac{\nu}{2}} [L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\nu) + \frac{1}{2} L_n^{(\alpha)}(\nu)] \sim \\ \sim \frac{2^{-\alpha-1}}{\pi} \Im \int_0^\infty e^{-\frac{\nu \varrho^3}{6}} \left[ e^{\frac{\pi}{3}i} + \frac{1-\alpha}{2} \varrho^2 e^{3\frac{\pi}{3}i} + \dots \right] \varrho e^{\frac{\pi}{3}i} d\varrho$$

da cui, con calcoli perfettamente analoghi a quelli più sopra eseguiti, si trae che

$$e^{-\frac{\nu}{2}} [L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\nu) + \frac{1}{2} L_n^{(\alpha)}(\nu)] \sim \\ \sim \frac{(-1)^n}{\pi} 2^{-\frac{4}{3}-\alpha} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \nu^{-\frac{2}{3}} + 6^{-\frac{1}{3}} \frac{3+5\alpha}{5} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \nu^{-\frac{4}{3}} + \dots \right]$$

donde, cambiando il segno, segue in particolare che

$$k_2 = -\frac{(-1)^n}{\pi} 2^{-\frac{4}{3}-\alpha} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \nu^{-\frac{2}{3}} + 6^{-\frac{1}{3}} \frac{3+5\alpha}{5} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \nu^{-\frac{4}{3}} \right] + O(n^{-2}) . \quad (42)$$

9. — Dalle precedenti espressioni asintotiche di  $k_1$  e  $k_2$  si passa immediatamente a quelle di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  servendosi delle (31); precisamente, con facilissimi calcoli, si trovano così le formule

$$\gamma_1 = (-1)^n \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \left[ 6^{\frac{1}{3}} \nu^{-\frac{1}{3}} + \frac{3+5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \nu^{-1} \right] + O(n^{-\frac{5}{3}}) , \\ \gamma_2 = (-1)^n \frac{2^{-\alpha}}{\sqrt[3]{\pi}} \frac{3+5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \nu^{-1} + O(n^{-\frac{5}{3}}) . \quad (43)$$

Queste formule confermano anzitutto le (29). In secondo luogo da esse si ricava immediatamente che

$$\frac{\gamma_2}{\mu \gamma_1} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \nu^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \frac{3+5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} + O(n^{-\frac{2}{3}})$$

cioè, ricordando le (28),

$$\frac{\gamma_2}{\mu \gamma_1} = -\frac{\alpha' \beta}{\sqrt[3]{3}} + O(\mu)$$

il che conferma anche la (30). Restano con ciò pienamente legittimate la fondamentale formula (2) col valore di  $\gamma_1$  dato dalla (3), nonché le conseguenze che ne abbiamo tratte e principalmente la (5).

Notiamo finalmente che dividendo l'una per l'altra le espressioni precedentemente trovate di  $k_1$  e  $k_2$  si può subito ottenere una non spregevole espressione asintotica della derivata logaritmica dell'*n-esimo* polinomio di Laguerre nello speciale punto  $x = \nu$ . Precisamente si ha così

$$\left\{ \frac{\frac{d}{dx} \left[ e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \right]}{e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)} \right\}_{x=\nu} = \\ = \frac{L_n^{(\alpha)'}(\nu)}{L_n^{(\alpha)}(\nu)} - \frac{1}{2} = \frac{k_2}{k_1} = -\frac{6^{\frac{1}{3}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \nu^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \frac{3+5\alpha}{5} \nu^{-1} + O(n^{-\frac{5}{3}})$$

da cui segue senz'altro che

$$\frac{L_n^{(\alpha)'}(\nu)}{L_n^{(\alpha)}(\nu)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \nu^{-\frac{1}{3}} + \frac{3+5\alpha}{10} \nu^{-1} + O(n^{-\frac{5}{3}}), \\ (\nu = 4n + 2\alpha + 2). \quad (44)$$

(Reçu le 16 mars 1948.)