

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	22 (1949)
<b>Artikel:</b>	Über die Randwerte meromorpher Funktionen einer Veränderlichen.
<b>Autor:</b>	Weigand, Leonhard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-19195">https://doi.org/10.5169/seals-19195</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Randwerte meromorpher Funktionen einer Veränderlichen

Von LEONHARD WEIGAND, München

## Einleitung

1. Nach dem klassischen Spiegelungsprinzip von *H. A. Schwarz* ist eine im Kreise  $|z| < 1$  analytische Funktion  $f(z)$ , die auf einem Bogen  $AB$  der Kreisperipherie stetig und reell ist, regulär in jedem Punkte von  $AB$ . Vor kurzem<sup>1)</sup> wurde von Herrn *C. Carathéodory* eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes angegeben, wobei auf die Stetigkeit der Funktion  $f(z)$  auf  $AB$  verzichtet wird. Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf folgende Definition des Randwertes einer Funktion.

**Definition.** Ist  $f(z)$  eine beliebige, in einem Gebiete  $G$  definierte reelle oder komplexe Funktion und bezeichnen wir mit  $\zeta$  irgendeinen Randpunkt von  $G$ , so nennen wir eine Zahl  $\alpha$  einen Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta$ , wenn es mindestens eine gegen  $\zeta$  konvergierende Folge von Punkten  $z_\nu$  in  $G$  gibt, für welche

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu) = \alpha \quad (1.1)$$

gilt.

2. Das Hauptresultat der erwähnten Arbeit von *Carathéodory* ist ein allgemeiner Satz über das Verhalten einer in einem beschränkten Gebiete meromorphen Funktion in einem Randpunkte. Da unser Ziel die Umkehrung dieses Satzes ist, werden wir ihn hier anführen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir auf der Riemannschen Zahlkugel eine „normale Überdeckungsfolge“<sup>2)</sup>

$$K_1, K_2, K_3, \dots \quad (2.1)$$

von offenen Kreisen, d. h. eine abzählbare Menge von Kreisen, wobei einem beliebigen Kreise  $\kappa$  der Riemannschen Kugel mit  $P$  als Mittelpunkt mindestens ein Kreis der Folge (2.1) zugeordnet werden kann, der im Inneren von  $\kappa$  liegt und den Punkt  $P$  in seinem Inneren enthält.

<sup>1)</sup> *C. Carathéodory*, Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip, Comment. math. Helvet. vol. 19, fasc. 3, p. 263.

<sup>2)</sup> *C. Carathéodory*, Reelle Funktionen, Bd. I, Leipzig-Berlin 1939, § 85, S. 71.

Ist dann  $f(z)$  eine beliebige im Kreise  $|z| < 1$  meromorphe analytische Funktion, so ordnen wir jedem Kreise  $K_\nu$ , der Folge (2.1) eine Punktmenge  $A_\nu$  auf  $|z| = 1$  zu, die aus allen Punkten  $\zeta$  dieser Linie besteht, für die der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(r\zeta) \quad (0 < r < 1) \quad (2.2)$$

entweder nicht existiert, oder, falls er vorhanden ist, mit einem Punkte von  $K_\nu$  zusammenfällt.

Sei ferner

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \dots \quad (2.3)$$

eine Folge ineinander geschachtelter Kreisbögen auf  $|z| = 1$ , die einen gemeinsamen inneren Punkt  $\zeta_0$  besitzen und deren Längen gegen Null konvergieren.

Wir betrachten für jeden Wert von  $\nu$  die Folge der Durchschnitte

$$A_\nu \delta_1, A_\nu \delta_2, A_\nu \delta_3, \dots \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

und bezeichnen mit

$$n_j \quad (2.5)$$

diejenigen ganzen Zahlen (falls es solche gibt), für die unter den Punktmengen  $A_{n_j} \delta_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) mindestens eine das lineare Maß Null besitzt.

Nachdem wir auf diese Weise die  $n_j$  bestimmt haben, betrachten wir die offene Punktmenge

$$U = K_{n_1} \dot{+} K_{n_2} \dot{+} K_{n_3} \dot{+} \dots \quad (2.6)$$

und ihre abgeschlossene Komplementärmenge  $H$ .

Die Menge  $H$  kann nie leer sein. Füllt  $H$  nicht die ganze Zahlkugel aus, so kann man ihre Komplementärmenge  $U$  als Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise punktfremden Gebieten  $G_i$  darstellen.

3. Der in § 2 erwähnte Satz von *Carathéodory* lautet dann :

**Satz I.** *Es sei eine analytische Funktion  $f(z)$  meromorph im Kreise  $|z| < 1$  und  $\zeta_0$  ein beliebiger Punkt der Peripherie  $|z| = 1$ . Dann kann man nach den Vorschriften der letzten Paragraphen die Punkte der Riemannschen Zahlkugel als Summe*

$$H + G_1 + G_2 + \dots$$

*von paarweise punktfremden Mengen darstellen, wobei  $H$  abgeschlossen und nicht leer ist und die  $G_i$ , die u. U. auch fehlen können, Gebiete bedeuten.*

Dann ist für jedes beliebige der Gebiete  $G_i$ , entweder jeder seiner Punkte Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  oder aber kein einziger Punkt von  $G_i$  hat diese Eigenschaft. Die Menge der Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  besteht also jedenfalls aus der abgeschlossenen Menge  $H$ , der noch gewisse unter den Gebieten  $G_i$  hinzugefügt sind.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet :

**Satz II.** Sind die Punkte der Riemannschen Zahlkugel als Summe

$$H + G_1 + G_2 + \dots$$

von paarweise punktfremden Mengen dargestellt, wobei  $H$  eine beliebig vorgegebene, abgeschlossene und nicht leere Menge ist und die  $G_i$ , die u. U. auch fehlen können, Gebiete bedeuten, so gibt es stets eine im Kreise  $|z| < 1$  meromorphe analytische Funktion  $f(z)$ , für die in einem Punkte  $\zeta_0$  der Peripherie  $|z| = 1$  die Punktmengen  $H$  und  $G_i$  die in den letzten Paragraphen angegebene Bedeutung haben. Die Punkte derjenigen unter den  $G_i$ , deren Begrenzung aus mehr als einem Kontinuum besteht, sind sämtlich Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ . Von jedem der übrigen Gebiete  $G_i$  kann man nach Belieben verlangen, daß entweder keiner oder jeder seiner Punkte Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  ist.

Wir führen den Beweis des Satzes II in mehreren Schritten. Zuerst (§§ 4 bis 6) geben wir eine analytische Funktion  $f(z)$  an, die im Kreise  $|z| < 1$  meromorph ist und für die in einem Punkte  $\zeta_0$  der Peripherie  $|z| = 1$  die Menge  $H$  mit einem vorgegebenen beschränkten Kontinuum  $C$  identisch ist. Durch Spezialisierung von  $C$  ergeben sich dann die Fälle der Halb- und der Vollebene (§ 7). Nachdem wir in § 8 kurz auf die Frage der Randwerte eingegangen sind, folgen in den §§ 9 bis 12 zwei Beispiele von analytischen Funktionen, für welche die Menge  $H$  einmal aus drei isolierten Punkten besteht, das andere Mal aus abzählbar vielen paarweise fremden geschlossenen Jordankurven in beliebiger gegenseitiger Lage. Die dabei verwendeten Konstruktionsmethoden benutzen wir, um endlich in den §§ 13 bis 16 den Fall einer beliebigen abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge  $H$  zu erledigen. Zuletzt (§§ 17 bis 19) beweisen wir die im Satze II aufgestellten Behauptungen bezüglich der Gebiete  $G_i$ .

### **$H$ besteht aus einem Kontinuum**

4. Um späterhin umständliche Unterscheidungen zu umgehen, erledigen wir gleich zu Anfang den trivialen Fall, wo das Kontinuum  $C$  aus dem einzigen Punkte  $w_0$  besteht.

Ist eine im Kreise  $|z| < 1$  meromorphe Funktion auch noch in dem Peripheriepunkt  $\zeta_0$  analytisch und besitzt sie dort den Wert  $w_0$ , so enthält die in § 2 definierte Menge  $H$  nur den einen Punkt  $w_0$ , der zugleich auch der einzige Randwert in  $\zeta_0$  ist.

Für die Funktion

$$f(z) = w_0 + e^{\left(\frac{\zeta_0+z}{\zeta_0-z}\right)^2}$$

bestehen die in  $\zeta_0$  gebildete Menge  $H$  und deren Komplementärmenge  $U$  aus dem einen Punkte  $w_0$  bzw. aus lauter Randwerten von  $f(z)$ .

Wir können somit im folgenden diesen einfachen Fall beiseite lassen und bezeichnen mit  $C$  ein beliebiges beschränktes Kontinuum, welches mindestens zwei Punkte enthält.

Um zu einer im Einheitskreise meromorphen Funktion  $w = f(z)$  zu gelangen, für die in einem Punkte  $\zeta_0$  auf der Peripherie  $|z| = 1$  die Menge  $H$  identisch mit dem Kontinuum  $C$  ist, konstruieren wir uns ein spezielles Riemannsches Flächenstück  $S$  in folgender Weise.

Nach einem bekannten Satze aus der Punktmengelehre<sup>3)</sup> kann man dem Kontinuum  $C$  mindestens eine monoton abnehmende Folge

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots \quad (4.1)$$

von beschränkten Gebieten  $U_m$  zuordnen, deren Durchschnitt gleich  $C$  ist. Auf  $C$  wählen wir uns eine dichte, abzählbare Punktmenge

$$w_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

und weisen jedem dieser Punkte eine abgeschlossene Kreisscheibe  $k_i$  mit  $w_i$  als Mittelpunkt zu. Die Radien der  $k_i$  sollen derart gegen Null konvergieren, daß stets

$$k_i \subseteq U_i \quad \text{und} \quad k_i \cap k_{i+1} \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

Auf der Peripherie der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  wählen wir je einen Bogen  $b_{11}$  und  $b_{20}$  und verbinden die beiden Endpunkte des einen Bogens mit denen des anderen in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende Jordansche Kurvenstücke  $\gamma_{10}$  und  $\gamma_{11}$ , die mit  $k_1$  und  $k_2$  nur die Endpunkte gemein haben und ganz im Inneren des Gebietes  $U_1$  verlaufen, daß die vier Kurvenstücke  $b_{11}, \gamma_{10}, b_{20}, \gamma_{11}$  die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, schlichten Riemannschen Flächenstückes  $S^1$  ergeben, welches die Punkte  $w_1$  und  $w_2$  als innere Punkte enthält.

<sup>3)</sup> C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig-Berlin 1939, Bd. I, § 107, S. 90.

<sup>4)</sup> Für zwei fremde Punktmengen  $A$  und  $B$  schreiben wir  $A \circ B$ .

Entsprechend wählen wir auf dem Kreisbogen  $b_{20}$  einen Teilbogen  $b_{21}$  und auf der Peripherie des Kreises  $k_3$  einen Bogen  $b_{30}$ , und verbinden die beiden Endpunkte von  $b_{21}$  mit denen von  $b_{30}$  in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende Jordansche Kurvenstücke  $\gamma_{20}$  und  $\gamma_{21}$ , die mit  $k_2$  und  $k_3$  nur die Endpunkte gemein haben und ganz im Gebiete  $U_2$  verlaufen, daß die Kurvenstücke zusammen mit  $b_{30}$  und der nach Wegnahme von  $b_{21}$  verbleibenden Begrenzung von  $S^1$  die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, im allgemeinen schlichtartigen Flächenstückes  $S^2$  ergeben, welches neben  $w_1$  und  $w_2$  auch noch den Punkt  $w_3$  im Innern enthält.

Haben wir so allgemein  $S^n$  konstruiert, so wählen wir auf dem der Begrenzung von  $S^n$  angehörenden Kreisbogen  $b_{n+1,0}$  einen Teilbogen  $b_{n+1,1}$  und auf der Peripherie von  $k_{n+2}$  einen Bogen  $b_{n+2,0}$  und verbinden die beiden Endpunkte von  $b_{n+1,1}$  mit denen von  $b_{n+2,0}$  in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende Jordansche Kurvenstücke  $\gamma_{n+1,0}$  und  $\gamma_{n+1,1}$ , die mit  $k_{n+1}$  und  $k_{n+2}$  nur die Endpunkte gemein haben und ganz im Gebiete  $U_{n+1}$  verlaufen, so daß  $\gamma_{n+1,0}$  und  $\gamma_{n+1,1}$ , zusammen mit  $b_{n+2,0}$  und der nach Wegnahme von  $b_{n+1,1}$  verbleibenden Begrenzung von  $S^n$  die Begrenzung des einfach zusammenhängenden, schlichtartigen Flächenstückes  $S^{n+1}$  ergeben, welches die Punkte  $w_1, \dots, w_{n+2}$  im Inneren enthält.

So fortlaufend ergibt sich zu jedem ganzen  $n \geq 1$  ein einfach zusammenhängendes, schlichtartiges Flächenstück  $S^n$ . Steht für jedes  $n \geq 1$  fest, auf welche Art  $S^{n+1}$  aus  $S^n$  entsteht, und setzen wir diesen Prozeß unbeschränkt fort, so erhalten wir als Ergebnis ein einfach zusammenhängendes, schlichtartiges Riemannsches Flächenstück  $S$ , das sämtliche Punkte  $w_i$  der Folge (4.2) im Inneren enthält und dessen Projektion ins Innere von  $U_1$  fällt. Dies ist leicht einzusehen.

Betrachten wir nämlich ein beliebiges geschlossenes und ganz auf  $S$  liegendes Polygon  $\pi$ , so stellt jede der endlich vielen Seiten  $p$  von  $\pi$  eine beschränkte und, mit Einschluß beider Endpunkte, abgeschlossene Punktmenge dar. Trennen wir die Fläche  $S^n$  von der Fläche  $S^{n+1}$  ab und bezeichnen die Menge der inneren Punkte dieser schlichten Restmenge mit  $R^n$ , so ist jedem Punkte der Seite  $p$  eine bestimmte dieser Restmengen als schlichte Umgebung zugeordnet. Nach dem Satze von *Borel* wird dann  $p$  bereits von endlich vielen der  $R^n$  überdeckt und dasselbe gilt dann auch vom Polygon  $\pi$ . Ist  $R^N$  diejenige dieser Restmengen mit größtem Index, so liegt  $\pi$  ganz in dem einfach zusammenhängenden, schlichtartigen Flächenstück  $S^{N+1}$  und zerlegt dieses und damit auch das Riemannsche Flächenstück  $S$  in zwei Teileflächen. Überdies liegt das Innere von  $\pi$  ganz in  $S^{N+1}$ , also auch ganz in  $S$ .

Daß die Projektion von  $S$  ins Innere von  $U_1$  fällt und sämtliche Punkte  $w_i$  im Inneren von  $S$  liegen, folgt aus obiger Konstruktion, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Begrenzung von  $S$  besteht durchweg aus Jordanschen Kurvenstücken.

5. Nach dem Hauptsatz der konformen Abbildung läßt sich  $S$  durch eine analytische Funktion  $w = f(z)$  auf das Innere des Kreises  $|z| < 1$  übertragen. Die Abbildung ist in jedem Randpunkte von  $S$  stetig.

Sei  $\{q_n\}$  eine unendliche Folge von Querschnitten auf  $S$ , wobei wir  $q_n$  im Kreise  $k_n$  derart anbringen, daß jeder Querschnitt  $q_n$  den vorhergehenden  $q_{n-1}$  vom folgenden  $q_{n+1}$  trennt. Die  $q_n$  sind paarweise punktfremd, auch in ihren Endpunkten. Jedes  $q_n$  teilt  $S$  in zwei Teilflächen, von denen wir diejenige mit  $g_n$  bezeichnen, welche  $q_{n+1}$  enthält. Wir erhalten so eine Folge von Teilflächen  $g_n$ , von denen jede in allen vorhergehenden enthalten ist und selbst alle folgenden enthält. Die Projektion der Teilfläche  $g_n$  fällt ganz ins Innere der Umgebung  $U_n$  der Folge (4.1).

Im Kreise  $|z| < 1$  bekommen wir als Bild der  $q_n$  eine Folge von Querschnitten  $r_n$ , die wegen der Randstetigkeit der Abbildung die gleichen Eigenschaften wie die  $q_n$  besitzen, und eine Folge ineinander geschachtelter Gebiete  $h_n$ . Wir behaupten, daß die Querschnitte  $r_n$  gegen einen Peripheriepunkt  $\zeta_0$  des Kreises  $|z| = 1$  konvergieren, womit gezeigt ist, daß die Begrenzung von  $S$  durch  $w = f(z)$  stetig in die in  $\zeta_0$  punktierte Kreislinie  $|z| = 1$  übergeht.

Wir beweisen zuerst, daß die Querschnitte  $r_n$  gegen die Kreisperipherie konvergieren. Andernfalls gibt es nämlich einen Punkt  $P$  in  $|z| < 1$  derart, daß jede Umgebung  $U_P$  von  $P$  Punkte von unendlich vielen Querschnitten  $r_n$  enthält. Auf dem Flächenstück  $S$  entspricht dem Punkte  $P$  ein innerer Punkt  $Q$ , der entweder auf einen der Querschnitte  $q_n$  oder zwischen zwei aufeinanderfolgende dieser Querschnitte zu liegen kommt. Wir können dann auf  $S$  eine Umgebung  $U_Q$  von  $Q$  wählen, welche Punkte von höchstens einem einzigen Querschneide  $q_{n_0}$  in ihrem Inneren enthält. Das Bild von  $U_Q$  im Einheitskreise stellt aber eine Umgebung von  $P$  dar, welche höchstens Punkte des Querschnittes  $r_{n_0}$  im Inneren enthält, womit ein Widerspruch herbeigeführt ist.

Durch die auf  $|z| = 1$  liegenden Endpunkte der Querschnitte  $r_n$  wird eine Folge

$$\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \dots \quad (5.1)$$

von ineinander geschachtelten Kreisbögen definiert, die einen gemein-

samen inneren Punkt  $\zeta_0$  besitzen und deren Längen, wie wir nun zeigen werden, gegen Null konvergieren.

Besitzt nämlich die Folge (5.1) als Durchschnitt einen Kreisbogen  $\eta$ , so wählen wir auf diesem Bogen einen beliebigen Punkt  $L$ . Das Bild des zu diesem Punkte führenden Radius, der nach obigem fast alle Querschnitte  $r_n$  an mindestens einer Stelle schneidet, stellt eine auf  $S$  verlaufende analytische Kurve dar, die entsprechend fast alle Querschnitte  $q_n$  an mindestens einer Stelle schneidet. Diese Kurve kann aber gegen keinen festen Punkt konvergieren, da die  $q_n$  in den Kreisen  $k_n$  liegen, deren Radien gegen Null gehen und deren Mittelpunkte  $w_n$  als Punkte einer abzählbaren, auf  $C$  dicht liegenden Menge keinem festen Punkte zustreben können. Somit existiert für den Punkt  $L$  kein radialer Grenzwert und da  $L$  auf  $\eta$  beliebig gewählt war, ergibt sich so ein Widerspruch zum Satze von *Fatou*.

Die durch  $w = f(z)$  gegebene Abbildung des Flächenstückes  $S$  auf  $|z| < 1$  ist also randstetig in allen Punkten der Peripherie  $|z| = 1$  bis auf den einen Punkt  $\zeta_0$ , gegen den die Querschnitte  $r_n$  konvergieren.

6. Es ist leicht einzusehen, daß die zu  $z = \zeta_0$  gehörende abgeschlossene Punktmenge  $H$ , die nach Satz I aus lauter Randwerten von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  besteht, mit dem Kontinuum  $C$  identisch ist.

Sei nämlich  $K_l$  ein beliebiger Kreis der normalen Überdeckungsfolge (2.1),  $\delta_p$  ein beliebiger Bogen der Folge (2.3) und  $D$  der Durchschnitt von  $K_l$  mit  $C$ . Falls  $D$  nicht leer ist, können wir nach § 4 aus der Folge (4.2) eine unendliche Teilfolge von Punkten  $w_{i_n}$  ( $i_1 < i_2 < \dots$ ) derart bestimmen, daß die den Punkten  $w_{i_n}$  beigeordneten Kreise  $k_{i_n}$  alle in  $K_l$  liegen. Von jedem der von den  $k_{i_n}$  ausgehenden Jordanschen Kurvenstücken, die ja Teile der Begrenzung des Flächenstückes  $S$  sind, verläuft dann mindestens ein Teilbogen ganz im Inneren von  $K_l$ . Diesen Teilbögen entsprechen als stetige Bilder gewisse Kreisbögen auf  $|z| = 1$ , die nach den Überlegungen des § 5 gegen den Punkt  $\zeta_0$  konvergieren und somit, für genügend große Indizes  $i_n$ , ganz im Bogen  $\delta_p$  enthalten sind. Die in § 2 definierte Punktmenge  $A, \delta_p$  hat also stets ein positives lineares Maß, weshalb  $K_l$  nicht der Punktmenge (2.6) angehören kann.

Liegt aber  $K_l$  ganz im Inneren der offenen Komplementärmenge  $C'$  von  $C$ , so wird  $K_l$  nur mit höchstens endlich vielen Umgebungen  $U_1, \dots, U_{m_0-1}$  der Folge (4.1), die ja gegen das Kontinuum  $C$  konvergiert, Punkte gemein haben. Deshalb liegt auch die Teilfläche  $g_{m_0}$  von  $S$  auf Grund ihrer Definition in § 5 ganz außerhalb  $K_l$ . Somit ist für genügend großen Index  $p$  der Durchschnitt des Kreisbogens  $\delta_p$  mit der Punktmenge  $A_l$  leer und  $K_l$  gehört der Punktmenge (2.6) an.

Hat  $K$ , mit  $C$  nur Randpunkte gemein, so läßt sich nur im Einzelfalle unterscheiden, ob  $K$ , der Menge (2.6) angehört oder nicht. Dies ist jedoch belanglos, da wir zeigen können, daß die Vereinigung der im vorigen Absatze betrachteten Kreise  $K$ , (die also ganz im Inneren der Menge  $C'$  liegen) identisch mit  $C'$  ist.

Zu diesem Zwecke schlagen wir um jeden Punkt  $P$  der offenen Menge  $C'$  einen Kreis  $\alpha_P$ , dessen Radius gleich der halben Entfernung von  $P$  und der Begrenzung von  $C'$  ist. Nach der Definition der normalen Überdeckungsfolge in § 2 gibt es mindestens einen Kreis  $K$ , der Folge (2.1), der im Inneren von  $\alpha_P$  liegt und den Punkt  $P$  in seinem Innern enthält. Nach dem Überdeckungssatz von Lindelöf existiert dann eine Teilfolge von (2.1), deren Vereinigung  $U$  die Menge  $C'$  überdeckt, und da jeder Kreis dieser Teilfolge im Innern von  $C'$  liegt, ist  $U = C'$ .

Damit ist gezeigt, daß die zu  $z = \zeta_0$  gehörende Menge  $H$  mit dem Kontinuum  $C$  identisch ist.

7. Die im § 4 vorausgesetzte Beschränktheit von  $C$  war wesentlich, um den Satz von Fatou anwenden zu können. Um eine in  $|z| < 1$  analytische Funktion zu finden, für welche die Menge  $H$  mit der Vollebene identisch ist, wählen wir speziell für  $C$  die abgeschlossene rechte Halbebene und konstruieren das zugehörige Flächenstück  $S$  durch passende Wahl der Punkte  $w_i$ , der Radien von  $k_i$  und der verbindenden Jordanschen Kurvenstücke  $\gamma_{i,0}$  und  $\gamma_{i,1}$ , so daß über den Punkten Null und Unendlich kein Punkt von  $S$  zu liegen kommt.

Durch  $u = w^2$  wird  $S$  in ein neues Flächenstück  $S^*$  übergeführt, die Menge der Punkte  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) in die abzählbare und auf der Vollebene dicht liegende Menge  $u_i$  und die Kreise  $k_i$  in die schlichten Gebiete  $k_i^*$ , welche  $u_i$  im Innern enthalten. Die Durchmesser dieser Gebiete werden im Gegensatte zu denen der Kreise  $k_i$  im allgemeinen nicht mehr gegen Null konvergieren. Doch streben die Durchmesser derjenigen  $k_i^*$  gegen Null, die allen den Punkten  $u_i$  zugeordnet sind, welche in einem beliebigen endlichen Kreise liegen.

Wird durch  $w = \varphi(z)$  das Flächenstück  $S$  konform auf  $|z| < 1$  abgebildet, wobei  $\zeta_0$  wieder der gemeinsame Punkt der Bögen (5.1) ist, so sehen wir ähnlich wie im vorigen Paragraphen, daß die abgeschlossene Menge  $H$ , die wir für die in  $|z| < 1$  analytische Funktion  $u = (\varphi(z))^2 = f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  bilden, mit der Vollebene zusammenfällt.

Ist nämlich  $K$ , wieder ein beliebiger Kreis der normalen Überdeckungsfolge (2.1) und  $\delta_p$  ein beliebiger Bogen der Folge (2.3), so wählen wir aus der Folge der Punkte  $u_i$  eine unendliche Teilfolge  $u_{i_n}$  derart, daß die

den  $u_i$ , zugeordneten Gebiete  $k_{i_n}^*$  alle in  $K$ , liegen. Dem Teil der Begrenzung von  $S^*$ , der in  $K$ , liegt, entsprechen als stetiges Bild unendlich viele Bögen auf  $|z| = 1$ , die sich in  $\zeta_0$  häufen und somit, wenigstens teilweise, im Bogen  $\delta_p$  enthalten sind. Die Menge  $A_1 \delta_p$  besitzt deshalb stets ein positives lineares Maß, die Menge (2.6) ist somit leer und deren Komplementärmenge  $H$  gleich der Vollebene.

Die in den letzten Paragraphen konstruierten Abbildungsfunktionen  $w = f(z)$  besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sich auf jeder stetigen, ganz in  $|z| < 1$  verlaufenden und in den Punkt  $\zeta_0$  einmündenden Kurve  $\gamma$  stets eine gegen  $\zeta_0$  konvergierende Punktfolge finden läßt, deren Bildpunktfolge gegen einen beliebigen Punkt  $Q$  des Kontinuums  $C$  konvergiert. Man sieht dies leicht ein, wenn man bedenkt, daß das im Flächenstücke  $S$  (bzw.  $S^*$ ) verlaufende Bild von  $\gamma$  dem Punkte  $Q$  unendlich oft beliebig nahekommt.

8. Die Komplementärmenge zu dem im § 4 vorgegebenen Kontinuum  $C$  kann als Summe von höchstens abzählbar vielen einfach zusammenhängenden Gebieten  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) dargestellt werden. Aus der Konstruktion des Flächenstückes  $S$  ergibt sich, daß kein einziges der  $G_i$  Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  enthält.

Zu jedem beliebigen inneren Punkte  $P$  eines der Gebiete  $G_i$  gibt es nämlich einen Index  $r_0$ , so daß  $P$  ganz außerhalb der Umgebung  $U_{r_0}$  der Folge (4.1) liegt. Somit liegt  $P$  auch ganz außerhalb der Teilfläche  $g_{r_0}$  von  $S$  (§ 5). Da aber jede im Kreise  $|z| < 1$  gegen den Peripheriepunkt  $\zeta_0$  konvergierende Punktfolge bis auf endlich viele ihrer Punkte in dem der Teilfläche  $g_{r_0}$  entsprechenden Gebiete  $h_{r_0}$  liegt, kann deren Bildpunktfolge auf  $S$  niemals gegen den Punkt  $P$  streben, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Soll aber z. B. das Gebiet  $G_1$  aus lauter Randwerten von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  bestehen, so müssen wir das Flächenstück  $S$  in passender Weise verändern.  $G_1$  wird als einfach zusammenhängendes Gebiet von einem einzigen Kontinuum  $R$  begrenzt, welches als Teilmenge von  $C$  in allen Umgebungen (4.1) enthalten ist.

Sei

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \quad (8.1)$$

eine monoton zunehmende Folge von einfach zusammenhängenden, von Jordankurven begrenzten abgeschlossenen Gebieten, die alle in  $G_1$  liegen, für die von einem gewissen Index  $N \geq 1$  an

$$B_n \cap U_n \quad (n \geq N) \quad (8.2)$$

gilt und deren Vereinigungsmenge gleich  $G_1$  ist<sup>5).</sup>

Weiter wählen wir, für jeden Index  $n \geq N$ , auf der Begrenzung von  $B_n$  einen Bogen  $b_n$ , auf dem Randbogen  $\gamma_{n,0}$  (§ 4) des Flächenstückes  $S$  einen Teilbogen  $c_n$  und verbinden die Endpunkte von  $b_n$  mit denen von  $c_n$  in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende, ganz in dem Gebiete  $U_n + G_1 B'_n$ <sup>6)</sup> verlaufende Jordansche Kurvenstücke, so daß sämtliche  $B_n$ , zusammen mit  $S$  und den durch die Randbögen  $b_n, c_n$  und die verbindenden Jordanschen Kurvenstücke begrenzten Gebiete ein einfach zusammenhängendes, schlichtartiges Riemannsches Flächenstück  $S_{G_1}$  ergeben. Entsprechend verfährt man mit  $S_{G_1}$ , falls weitere der Gebiete  $G_i$  aus lauter Randwerten bestehen sollen. Allgemein erhält man auf diese Weise ein schlichtartiges einfach zusammenhängendes Riemannsches Flächenstück  $S_{\Sigma G}$ , welches aus  $S$  durch „Anhängen“ gewisser Gebiete entsteht.

Möge  $S_{G_1}$  durch die analytische Funktion  $w = f(z)$  auf  $|z| < 1$  abgebildet werden. Falls  $S_{G_1}$  beschränkt ist, läßt sich ähnlich wie in den §§ 5 und 6 zeigen, daß auf  $|z| = 1$  ein Punkt  $\zeta_0$  existiert, in dem die Menge  $H$  gleich dem vorgegebenen Kontinuum  $C$  ist. Man hat dabei zu berücksichtigen, daß die Gebiete (8.1) gegen  $G_1$  konvergieren und, für jedes  $n \geq N$ , die Jordanschen Kurvenstücke, welche die Endpunkte der Teilbögen  $b_n$  und  $c_n$  miteinander verbinden und Teile der Begrenzung von  $S_{G_1}$  sind, ganz im Gebiete  $U_n + G_1 B'_n$  verlaufen; der Durchschnitt dieser Gebiete ist aber gleich  $C$ .

Ist jedoch  $S_{G_1}$  nicht beschränkt (was z. B. zutrifft, wenn das Kontinuum  $C$  einfach zusammenhängend,  $G_1$  also die Komplementärmenge zu  $C$  ist), schließen wir so: Durch die Teilbögen  $\{c_n\}$  mit  $n \geq N$ , die nach Obigem Querschnitte auf  $S_{G_1}$  darstellen, zerfällt die Fläche  $S_{G_1}$  wieder in das Flächenstück  $S$  und unendlich viele einfach zusammenhängende Teilflächen, welche die Gebiete  $B_n$  als Teilmengen enthalten. Auf dem so erhaltenen Flächenstücke  $S$  bringen wir ferner dieselbe Querschnittsfolge  $\{q_n\}$  an, wie wir sie im § 5 eingeführt haben. Dann ergibt sich vermöge der Abbildungsfunktion  $w = f(z)$  als Bild der Folge  $\{c_n\}$  im Kreise  $|z| < 1$  eine Querschnittsfolge  $\{s_n\}$ , die den Kreis  $|z| < 1$  in ein dem Flächenstücke  $S$  entsprechendes einfach zusammenhängendes Gebiet  $S_z$  und gewisse unendlich viele weitere Gebiete  $F_n$  zerlegen.

<sup>5)</sup> Die Existenz einer solchen Folge ergibt sich aus der Tatsache, daß es in einem zweifach zusammenhängenden Gebiete stets eine geschlossene Jordankurve gibt, in deren Innerem wie Äußerem Randpunkte des Gebietes liegen.

<sup>6)</sup> Mit  $B'$  bezeichnen wir die Komplementärmenge zu  $B$ .

Den Querschnitten  $\{q_n\}$  entsprechen gewisse Querschnitte  $\{p_n\}$  des Kreises  $|z| < 1$ , welche zugleich auch Querschnitte des Gebiets  $S_z$  sind. Dabei trennen die Querschnitte  $p_i$  und  $p_{i+1}$  den Querschnitt  $s_i$  vom vorhergehenden  $s_{i-1}$  und nachfolgenden  $s_{i+1}$  (und damit auch das Gebiet  $F_i$  von  $F_{i-1}$  und  $F_{i+1}$ ). Wird  $S_z$  durch  $z = \psi(u)$  weiter auf  $|u| < 1$  konform und randstetig abgebildet, so geht die Querschnittsfolge  $\{p_n\}$  in die Querschnittsfolge  $\{r_n\}$  des § 5 über, von der wir damals zeigten, daß sie gegen einen Peripheriepunkt  $v_0$  konvergiert. Wegen der Randstetigkeit von  $z = \psi(u)$  entspricht dann  $v_0$  ein Punkt  $\zeta_0$  auf  $|z| = 1$ , gegen den dann auch die Folgen  $\{p_n\}$ ,  $\{s_n\}$  und  $\{F_n\}$  konvergieren. Wir zeigen dann wie oben, daß in  $\zeta_0$  die Menge  $H$  gleich dem Kontinuum  $C$  ist.

Nun sehen wir aber auch ein, daß jeder im Gebiete  $G_1$  liegende Punkt  $\omega$  Randwert von  $w = f(z)$  ist. Da nämlich die Gebiete (8.1), die für  $n \geq N$  ja Teile des Flächenstückes  $S_{G_1}$  sind, gegen  $G_1$  konvergieren, liegen über  $\omega$  stets unendlich viele Punkte

$$\omega_{n_0}, \omega_{n_0+1}, \omega_{n_0+2}, \dots \quad (n_0 \geq N) \quad (8.3)$$

von  $S_{G_1}$ , wobei  $\omega_r$  der auf die Teilfläche  $B_r$  fallende Punkt ist. Der Index  $n_0$  hängt von der Lage des Punktes  $\omega$  in  $G_1$  ab. Die Bildpunkte von (8.3) in  $|z| < 1$ , die wir mit  $\zeta_r$  ( $r \geq n_0$ ) bezeichnen und für die also  $f(\zeta_r) = \omega$  gilt, liegen nach Obigem beziehentlich in den Gebieten  $F_r$  und konvergieren deshalb gegen  $\zeta_0$ . Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Dieser Beweis gilt, abgesehen von sinngemäßigen Erweiterungen, auch für die Fläche  $S_{\Sigma G}$ , d. h. also im Falle, daß mehrere Gebiete  $G_i$  aus Randwerten bestehen sollen.

## Zwei Beispiele

9. Bevor wir den Fall einer beliebigen abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge behandeln, wollen wir in diesem und den folgenden Paragraphen auf zwei spezielle Fälle genauer eingehen, da uns die dabei verwendeten Methoden im wesentlichen den allgemeinen Beweis liefern werden.

Die abgeschlossene Menge  $H$  bestehe diesmal aus den drei isolierten Punkten  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$ . Wir betrachten die zu diesen Punkten gehörige regulär verzweigte universelle Überlagerungsfläche  $F_\infty$  (Modulfläche). Über jedem der „Grundpunkte“  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  liegen bekanntlich unendlich viele logarithmische Windungspunkte  $L_1^{(j)}$ ,  $L_2^{(j)}$  und  $L_3^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Wir konstruieren uns auf der Fläche  $F_\infty$  um jeden Windungspunkt  $L_n^{(j)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ) eine doppelspiralförmige stetige Kurve  $\sigma_n^{(j)}$ ,

deren beide Äste den Punkt  $L_n^{(i)}$  unendlich oft in entgegengesetzter Richtung umlaufen und sich ihm dabei asymptotisch nähern. Ferner sollen die Projektionen der Kurven  $\sigma_n^{(j)}$  ganz in Kreise  $K_n^{(j)}$  um  $w_n$  fallen, deren Radien mit wachsendem Index  $j$  monoton gegen Null abnehmen. Außerdem liege jeder der drei Kreise  $K_1^{(1)}$ ,  $K_2^{(1)}$  und  $K_3^{(1)}$  ganz außerhalb der anderen zwei.

Zerschneiden wir  $F_\infty$  entlang sämtlicher Spiralen  $\sigma_n^{(j)}$ , so zerfällt die Fläche in die einfach zusammenhängende, von den  $\sigma_n^{(j)}$  begrenzte Fläche  $F'_\infty$  und in unendlich viele weitere Teilflächen, für die je einer der obigen Windungspunkte Randpunkt ist. Bilden wir durch die analytische Funktion  $w = f(z)$  die Fläche  $F'_\infty$  auf  $|z| < 1$  ab, so geht jede der Randkurven  $\sigma_n^{(j)}$  stetig in einen gewissen Kreisbogen  $\delta_n^{(j)}$  auf der Linie  $|z| = 1$  über. Bekanntlich ist das lineare Maß sämtlicher Bögen  $\delta_n^{(j)}$  gleich  $2\pi$ . Ferner häufen sich in einem Endpunkte  $\zeta_0$  eines beliebigen dieser Bögen, etwa  $\delta_1^{(1)}$ , unendlich viele weitere Kreisbögen  $\delta_n^{(j)}$ , sogar unendlich viele mit festem Index  $n$ .

Um zu zeigen, daß die aus den drei Punkten  $w_n$  bestehende Menge  $H$  die im § 2 angegebene Bedeutung hat, wählen wir wieder einen beliebigen Kreis  $K_l$  der normalen Überdeckungsfolge (2.1) und betrachten die zugehörige Menge  $A_l$ .

Liegt etwa der Grundpunkt  $w_1$  innerhalb  $K_l$ , so von einem gewissen Index  $j_0$  ab auch die unsere Fläche  $F'_\infty$  berandenden Spiralen  $\sigma_1^{(j)}$ , deren Bilder  $\delta_1^{(j)}$  sich in  $\zeta_0$  häufen. Also besitzt die Menge  $A_l \delta_p$  für jedes  $p$  ein positives lineares Maß und  $K_l$  gehört nicht der Menge (2.6) an.

Liegen die drei Grundpunkte aber ganz im Äußeren von  $K_l$ , so werden nur endlich viele Spiralen  $\sigma_n^{(j)}$  Punkte mit diesem Kreise gemein haben. Deshalb gibt es ein  $p_0$ , so daß, für alle  $p > p_0$ , die Menge  $A_l \delta_p$  leer und der Kreis  $K_l$  Teilmenge der Menge  $U$  ist. Wie im § 6 zeigt man dann mit Hilfe des *Lindelöfschen* Überdeckungssatzes, daß  $U$  mit der in  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  punktierten Vollebene zusammenfällt, woraus unsere Behauptung folgt.

10. Die soeben erhaltene offene Punktmenge  $U$  besteht in unserem speziellen Falle aus einem einzigen, dreifach zusammenhängenden Gebiete  $G_1$ . Wir beweisen hier aber gleich die allgemeine Aussage des Satzes II, wonach die Punkte derjenigen unter den Gebieten  $G_i$ , deren Begrenzung aus mehr als einem Kontinuum besteht, sämtlich Randwerte von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  sind.

Sei also speziell  $G_{i_0}$  ein solches Gebiet, dessen Begrenzung aus mindestens zwei Kontinuen  $R_1$  und  $R_2$  besteht. Als Teilmengen der ab-

geschlossenen Menge  $H$  sind nach dem Satze I alle ihre Punkte Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ . Da die Kontinuen  $R_1$  und  $R_2$  punktfremd sind, können wir sie durch eine geschlossene Jordankurve  $\Gamma$ , die ganz im Innern von  $G_{i_0}$  verläuft, voneinander trennen. Ist  $Q_1$  ein Punkt von  $R_1$ ,  $Q_2$  ein Punkt von  $R_2$ , so gibt es in  $|z| < 1$  zwei gegen  $\zeta_0$  konvergierende Punktfolgen  $\{z_k^{(1)}\}$  und  $\{z_k^{(2)}\}$ , deren Bildpunktfolgen  $\{w_k^{(1)}\}$  und  $\{w_k^{(2)}\}$  in der  $w$ -Ebene gegen  $Q_1$  und  $Q_2$  streben. Verbinden wir den Punkt  $z_k^{(1)}$  und  $z_k^{(2)}$  durch die Strecke  $p_k$ , so entspricht dieser ein analytisches Kurvenstück  $q_k$ , das  $w_k^{(1)}$  und  $w_k^{(2)}$  verbindet und die geschlossene Kurve  $\Gamma$  in mindestens einem Punkte  $\omega_k$  schneidet, dem der Punkt  $\zeta_k$  auf der Strecke  $p_k$  entspricht. Da  $\Gamma$  eine abgeschlossene Menge ist, enthält die Folge  $\{\omega_k\}$  mindestens eine Teilfolge  $\{\omega'_k\}$ , die gegen einen Häufungspunkt  $\omega_0$  der Folge  $\{\omega_k\}$  konvergiert. Die Bildfolge  $\{\zeta'_k\}$  strebt aber gegen  $\zeta_0$ , somit ist  $\omega_0$  und nach dem Satze I jeder Punkt aus  $G_{i_0}$  Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ .

11. Beim zweiten Beispiel bestehe die Menge  $H$  aus abzählbar vielen paarweise punktfremden geschlossenen Jordankurven  $\Gamma_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) in beliebiger gegenseitiger Lage; doch muß, da  $H$  nach Satz I ja stets abgeschlossen ist, eine Häufungsstelle der  $\Gamma_n$  Punkte von genau einer der Jordankurven sein. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sämtliche  $\Gamma_n$  im Innern des Kreises  $|w - 1| = \frac{1}{2}$  liegen, was sich durch eine Lineartransformation immer erreichen läßt.

Nun verteilen wir die Kurven  $\Gamma_n$  in der Weise auf die Blätter der in Null und Unendlich gewundenen Logarithmusfläche, daß bei deren Abbildung durch  $t = \log w$  in die schlichte punktierte  $t$ -Ebene das Bild  $\gamma_n$  von  $\Gamma_n$  ganz ins Innere des von den Geraden  $\Re(t) = \log \frac{1}{2}$ ,  $\Re(t) = \log \frac{3}{2}$  und  $\Im(t) = 2n\pi$ ,  $\Im(t) = 2(n+1)\pi$  gebildeten Rechteckes

$$R_n \tag{11.1}$$

zu liegen kommt.

Im Innern jeder Kurve  $\gamma_n$  wählen wir einen beliebigen Punkt  $t_n$ , entfernen alle  $t_n$  aus der  $t$ -Ebene und konstruieren zu dem verbleibenden,  $\infty$ -fach zusammenhängenden Gebiete  $G$  die regulär verzweigte Überlagerungsfläche  $F_\infty$ . Dies geschieht etwa in folgender Weise.

Wir verbinden, für jedes ganze  $n$ , den Punkt  $t_n$  mit  $t_{n+1}$  durch eine Strecke  $p_n$  und schneiden das Gebiet  $G$  entlang sämtlicher  $p_n$  auf, wodurch  $G$  in zwei Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$  zerlegt wird. Von jedem dieser beiden Gebiete denken wir uns unendlich viele Exemplare  $G_1^{2i}$  und  $G_2^{2i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) übereinander gelegt und deren Ränder derart miteinander verheftet, so daß  $G_1^0$  (nullte Generation) entlang jeder Strecke  $p_n$

mit einem der Exemplare  $G_2^{2i+1}$  zusammenhängt. Dabei soll kein  $G_2^{2i+1}$  entlang mehrerer  $p_n$  mit  $G_1^0$  verbunden sein. Dann ist  $G_1^0$  von einem lückenlosen Kranze von lauter verschiedenen  $G_2^{2i+1}$  umgeben (erste Generation). In gleicher Weise verfahren wir mit diesen  $G_2^{2i+1}$ , indem wir sie entlang jeder ihrer Randstrecken  $p_n$  mit lauter von  $G_1^0$  und unter sich verschiedenen Exemplaren  $G_1^{2i}$  verheften (zweite Generation). Allgemein werden die Exemplare der  $2i$ -ten Generation entlang ihrer freien Randstrecken  $p_n$  mit lauter von den bereits früher verwendeten und unter sich verschiedenen Exemplaren  $G_2^{2i+1}$ , die der  $(2i+1)$ -ten Generation entsprechend mit Exemplaren  $G_1^{2i}$  verheftet. Dieses Verfahren, unbegrenzt fortgeführt, ergibt die gewünschte regulär verzweigte Überlagerungsfläche  $F_\infty$ . Über jedem ihrer Grundpunkte  $t_n$  liegen unendlich viele logarithmische Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Sie alle sind, genau so wie der Punkt Unendlich, Randpunkte der Fläche. Auf gleiche Weise wie in § 4 zeigt man, daß  $F_\infty$  einfach zusammenhängend und schlichtartig ist. Nach dem Hauptsatze der konformen Abbildung läßt sie sich deshalb durch eine analytische Funktion  $t = \varphi(z)$  in die schlichte  $z$ -Ebene übertragen und da  $\varphi(z)$  z. B. die drei Werte  $t_1, t_2$  und  $t_3$  ausläßt, gehört  $F_\infty$  nach *Picard* dem hyperbolischen Typus an.

Schneiden wir die Fläche  $F_\infty$  um jeden Windungspunkt  $L_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) entlang der unendlich oft durchlaufenen Kurve  $\gamma_n$  auf, so zerfällt sie in die unendlich vielen, paarweise punktfremden Umgebungen dieser Windungspunkte und in die einfach zusammenhängende Restfläche  $F_n$ . Bei der Abbildung  $t = \varphi(z)$  von  $F_\infty$  auf  $|z| < 1$  gehen die Umgebungen in gewisse einfach zusammenhängende Gebiete  $H_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) und die Fläche  $F_n$  in das Komplementärgebiet  $E_n$  von  $|z| < 1$  über. Wir zeigen, daß jedes der Gebiete  $H_n^{(j)}$  genau einen Peripheriepunkt  $P_n^{(j)}$  des Einheitskreises als Randpunkt besitzt und daß die Punkte  $P_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) auf  $|z| = 1$  dicht liegen.

Da  $E_n$  ein Gebiet, also zusammenhängend ist, kann die auf  $|z| = 1$  liegende Randpunktmenge eines der  $H_n^{(j)}$  nicht aus mehr als einem Kontinuum bestehen. Besteünde aber diese Randpunktmenge aus einem Kreisbogen  $\delta$ , so schließen wir folgendermaßen:

Wählen wir bei dem eben geschilderten Prozeß anstatt  $\gamma_n$  eine andere Jordankurve, etwa  $\gamma_m$ , so erhalten wir entsprechend eine Restfläche  $F_m$  und im Einheitskreise  $|z| < 1$  die Gebiete  $H_m^{(j)}$  und  $E_m$ . Dann ist kein Punkt des Bogens  $\delta$  Randpunkt eines der  $H_m^{(j)}$ . Bei der weiteren Abbildung von  $E_m$  auf den Einheitskreis  $|u| < 1$  gehe der Kreisbogen  $\delta$  in den Kreisbogen  $\delta'$  über und da  $|u| < 1$  dann auch Abbild der beschränkten Restfläche  $F_m$  ist, existieren nach dem Satze von *Fatou* in allen

Punkten von  $\delta'$  bis auf eine Nullmenge die radialen Grenzwerte, die alle gleich  $t_n$  sein müssen. Dies aber widerspricht dem Satze von *F.* und *M. Riesz*<sup>7)</sup>, wonach eine für  $|u| < 1$  beschränkte analytische Funktion, deren radiale Grenzwerte auf einer Punktmenge von positivem linearen Maße auf  $|u| = 1$  konstant sind, identisch gleich dieser Konstante ist. Somit besteht die auf  $|z| = 1$  liegende Randpunktmenge jedes der Gebiete  $H_n^{(j)}$  aus einem einzigen Punkte  $P_n^{(j)}$ .

Würden die Punkte  $P_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) auf  $|z| = 1$  nicht dicht liegen, so gäbe es einen Kreisbogen  $\eta$ , der keinen Punkt  $P_n^{(j)}$  enthielte. Bilden wir  $E_n$  auf  $|v| < 1$  ab, wobei  $\eta$  in  $\eta'$  übergeht, so existierten wieder in allen Punkten von  $\eta'$  bis auf eine Nullmenge die radialen Grenzwerte, von denen jeder gleich einem der Wert  $t_i$  mit  $i \neq n$  sein müßte. Da die  $t_i$  aber eine Nullmenge darstellen, ergäbe sich ebenfalls ein Widerspruch zum Satze von *Riesz*.

12. Wir schneiden jetzt die Überlagerungsfläche  $F_\infty$  in allen Blättern entlang sämtlicher Jordankurven  $\gamma_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) auf, wobei sie in die unendlich vielen Umgebungen der  $L_n^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ) und in die einfach zusammenhängende Restfläche  $F$  zerfällt. Durch  $t = \varphi(u)$  gehen die Umgebungen wieder in die Gebiete  $H_n^{(j)}$ , die Fläche  $F$  in das Restgebiet  $E$  von  $|u| < 1$  über. Die Begrenzung  $R_n^{(j)}$  jedes der Gebiete  $H_n^{(j)}$  ist zugleich auch ein Teil der Begrenzung von  $E$  und stellt das Abbild der den Windungspunkt  $L_n^{(j)}$  unendlich oft umlaufenden Jordankurve  $\gamma_n$  dar. Bilden wir  $E$  durch  $u = \psi(z)$  weiter auf  $|z| < 1$  ab, wobei die stetigen Kurven  $R_n^{(j)}$  in die Kreisbögen  $\delta_n^{(j)}$  übergehen, und bezeichnen wir einen Endpunkt eines beliebigen dieser Bögen, etwa  $\delta_0^{(1)}$ , mit  $\zeta_0$ , so haben wir in

$$w = e^{\varphi(\psi(z))} = e^{f(z)} \quad (12.1)$$

eine analytische Funktion, deren Menge  $H$  im Punkte  $\zeta_0$  genau aus sämtlichen Jordankurven  $\Gamma_n$  besteht.

Erstens ist nämlich, nach *Fatou*, das lineare Maß der Punktmenge auf  $|z| = 1$ , für die keine radialen Grenzwerte existieren, gleich Null. Zweitens liegen, nach den Überlegungen des vorigen Paragraphen, auf  $|z| = 1$  in jeder beliebigen Umgebung von  $\zeta_0$  für jeden Index  $n$  unendlich viele der Kreisbögen  $\delta_n^{(j)}$ . Daraus folgt aber genau wie in § 6 unter Heranziehung des Lindelöfschen Überdeckungssatzes unsere Behauptung. Man hat dabei nur zu beachten, daß das Bild eines auf einem Bogen  $\delta_n^{(j)}$  enden-

<sup>7)</sup> *R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin 1936, S. 197.

den Radius des Kreises  $|z| < 1$  in der  $w$ -Ebene eine analytische Kurve darstellt, die in einem bestimmten Punkt der Jordankurve  $\Gamma_n$  einmündet.

Auf die Frage nach den Randwerten der Funktion (12.1) im Punkte  $\zeta_0$  wollen wir hier nicht weiter eingehen, da sie später (§§ 17 bis 19) im Zusammenhang mit dem allgemeinsten Falle ihre Erledigung finden wird.

### Allgemeiner Fall

13. Nunmehr wählen wir für die Punktmenge  $H$  eine beliebige abgeschlossene und nicht die volle  $w$ -Ebene überdeckende Menge  $A$ . Nach Satz I darf  $A$  nicht leer sein. Wir können die Menge  $A$  sogleich als beschränkt annehmen.

Für abgeschlossene Punktmengen gelten die beiden allgemeinen Sätze <sup>8)</sup>:

1) Jede abgeschlossene, beschränkte Punktmenge kann als eine Gesamtheit von paarweise fremden Kontinuen angesehen werden.

2) Jeder abgeschlossenen Punktmenge  $A$  kann man mindestens eine monoton abnehmende Folge

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots \quad (13.1)$$

von (offenen) Umgebungen  $U_i$  von  $A$  zuordnen, deren Durchschnitt gleich  $A$  ist.

Jede Umgebung  $U_i$  besteht aus höchstens abzählbar vielen, paarweise fremden Gebieten  $V_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die wir die *Umgebungskomponenten der Punktmenge A* nennen wollen. Die Menge sämtlicher Umgebungskomponenten von  $A$  ist abzählbar, so daß wir sie als Folge

$$V_0, V_1, V_{-1}, V_2, V_{-2}, \dots \quad (13.2)$$

schreiben können. Dabei ist jede Umgebungskomponente  $V_n$  gleich einem bestimmten  $V_{ik}$ . Da die Menge  $A$  beschränkt ist, sind die Gebiete  $V_n$  so wählbar, daß die Folge (13.2) gleichmäßig beschränkt ist. Durch eine lineare Transformation erreichen wir dann, daß  $A$  und sämtliche  $V_n$  ins Innere des Kreises

$$|w - 1| = \frac{1}{2} \quad (13.3)$$

fallen. Die Bezeichnungen mögen dabei der Einfachheit halber dieselben bleiben.

Nachdem wir aus jeder Umgebungskomponente  $V_n$  einen festen Punkt

---

<sup>8)</sup> C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Bd. I, Leipzig-Berlin 1939, §§ 106 und 107.

$w_n$  gewählt haben, der zugleich auch Punkt von  $A$  ist, verteilen wir die  $V_n$  entsprechend dem Beispiele in § 11 in der Weise auf die Blätter der in Null und Unendlich gewundenen Logarithmusfläche, daß bei deren Abbildung durch  $t = \log w$  in die schlichte punktierte  $t$ -Ebene das Bild  $W_n$  von  $V_n$  ganz ins Innere des von den Geraden  $\Re(t) = \log \frac{1}{2}$ ,  $\Re(t) = \log \frac{3}{2}$  und  $\Im(t) = 2n\pi$ ,  $\Im(t) = 2(n+1)\pi$  gebildeten Rechteckes

$$R_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13.4)$$

zu liegen kommt. Das in  $W_n$  liegende Bild von  $w_n$  bezeichnen wir mit  $t_n$ .

Aus der in Unendlich punktierten  $t$ -Ebene entfernen wir sämtliche Punkte  $t_n$  und konstruieren zu dem verbleibenden,  $\infty$ -fach zusammenhängenden Gebiete  $G$  die regulär verzweigte Überlagerungsfläche  $F_\infty$  (§ 11). Über jedem ihrer Grundpunkte  $t_n$  liegen unendlich viele logarithmische Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Sie alle sind, wie auch der Punkt Unendlich, Randpunkte der Fläche. Ferner ist  $F_\infty$  einfach zusammenhängend, schlichtartig und gehört dem hyperbolischen Typus an.

14. Wir verändern jetzt die Fläche  $F_\infty$  in passender Weise. Ähnlich wie in § 9 konstruieren wir auf  $F_\infty$  um jeden der Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; j = 1, 2, \dots$ ) eine doppelspiralförmige stetige Kurve  $\sigma_n^{(j)}$ , deren beide Äste den Punkt  $L_n^{(j)}$  unendlich oft in entgegengesetzter Richtung umlaufen und sich ihm dabei asymptotisch nähern. Dabei sollen die Projektionen der  $\sigma_n^{(j)}$  ganz in Kreise  $K_n^{(j)}$  um  $t_n$  fallen, die selbst alle im Innern des Rechteckes (13.4) liegen und deren Radien für  $j + |n| \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren.

Zerschneiden wir  $F_\infty$  entlang sämtlicher Spiralen  $\sigma_n^{(j)}$ , so zerfällt die Fläche in die einfach zusammenhängende, von den  $\sigma_n^{(j)}$  und dem Punkte Unendlich begrenzte Fläche  $F'_\infty$  und in unendlich viele weitere Teilflächen, für die je einer der obigen Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  Randpunkt ist. Wird  $F'_\infty$  durch die analytische Funktion  $t = \varphi(u)$  auf das Innere von  $|u| < 1$  abgebildet, so geht jede der Randkurven  $\sigma_n^{(j)}$  stetig in einen gewissen Kreisbogen  $\delta_n^{(j)}$  auf  $|u| = 1$  über. Von diesen gilt wie im Falle der Modulfunktion im § 9, daß das lineare Maß aller  $\delta_n^{(j)}$  gleich  $2\pi$  ist, ferner, daß sich in einem Endpunkt  $\zeta_0$  eines beliebigen dieser Bögen, etwa  $\delta_0^{(1)}$ , unendlich viele weitere Kreisbögen  $\delta_n^{(j)}$ , ja sogar unendlich viele mit festem Index  $n$  häufen. Diese Behauptungen beweisen wir kurz folgendermaßen.

Für jeden Index  $n$  wählen wir aus der Menge der Kreise  $K_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) um  $t_n$  den größten und bezeichnen ihn mit  $K_{(n)}$ . In dessen Inneren liegen die Projektionen sämtlicher Spiralen  $\sigma_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Zerschneiden wir dann die Überlagerungsfläche  $F_\infty$  in allen Blättern entlang der Kreise  $K_{(n)}$ , so zerfällt  $F_\infty$  in die unendlich vielen Kreisumgebungen der

logarithmischen Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ) und in die einfach zusammenhängende Restfläche  $F_K$ . Bei der Abbildung der Fläche  $F_\infty$  auf den Einheitskreis  $|v| < 1$  gehen die Kreisumgebungen in gewisse einfach zusammenhängende Gebiete  $H_n^{(j)}$  und die Fläche  $F_K$  in das Restgebiet  $E_K$  von  $|v| < 1$  über. Dann folgt wie in § 11, daß jedes  $H_n^{(j)}$  genau einen Peripheriepunkt  $P_n^{(j)}$  des Einheitskreises als Randpunkt besitzt und daß, für jeden Index  $n$ , die Punkte  $P_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) auf  $|v| = 1$  dicht liegen. Die auf der Fläche  $F_\infty$  verlaufenden Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  gehen bei der Abbildung in stetige Kurven  $\sigma_n'^{(j)}$  über, die beziehentlich in den Gebieten  $H_n^{(j)}$  liegen, in  $P_n^{(j)}$  einmünden <sup>9)</sup> und die einfach zusammenhängenden Gebiete  $H_n'^{(j)}$  einschließen ( $H_n'^{(j)}$  ist also Teilgebiet von  $H_n^{(j)}$ ). Das Komplementärgebiet  $E_\sigma$  der Gebiete  $H_n'^{(j)}$  bezüglich  $|v| < 1$  ist das schlichte Abbild der oben eingeführten Fläche  $F'_\infty$ . Da nun erstens die Gebiete  $E_K$  und  $E_\sigma$  dieselben Peripheriepunkte des Einheitskreises als Randpunkte besitzen, zweitens das lineare Maß gegenüber eindeutigen konformen Abbildungen invariant ist<sup>10)</sup>, folgen alle unsere Behauptungen sofort aus dem Ergebnis des § 11 in Verbindung mit dem Satze von *Fatou*.

15. Haben wir also die Fläche  $F'_\infty$  durch die Funktion  $t = \varphi(u)$  konform auf  $|u| < 1$  abgebildet, wobei die Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  stetig in die Bögen  $\delta_n^{(j)}$  auf  $|u| = 1$  übergehen, ist ferner  $\zeta_0$  einer der Endpunkte eines dieser Kreisbögen, etwa speziell  $\delta_0^{(1)}$ , so können wir aus der Gesamtmenge der  $\delta_n^{(j)}$  eine gegen  $\zeta_0$  konvergierende Teilfolge  $\delta_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) auswählen, wo  $\delta_n$  das Bild einer der Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) um den Grundpunkt  $t_n$  ist. Diese den Bögen  $\delta_n$  entsprechenden Doppelspiralen bezeichnen wir mit  $\sigma_n$ .

Jeder Punkt  $t_n$  gehört nach § 13 einem Gebiete  $W_n$  an. Für jedes dieser Gebiete konstruieren wir uns in ähnlicher Weise wie in § 4 ein Riemannsches Flächenstück  $S_n$ , welches mit der Fläche  $F'_\infty$  entlang eines gewissen Teilbogens von  $\sigma_n$  verheftet wird. Wir zeigen diese Konstruktion im einzelnen für  $n = 0$ ; in den übrigen Fällen  $n \neq 0$  erfolgt sie analog.

Jedem Punkte  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) einer auf  $W_0$  dicht liegenden und abzählbaren Punktmenge ordnen wir eine im Gebiete  $W_0$  liegende abgeschlossene Kreisscheibe  $k_i$  zu, die  $\tau_i$  als Mittelpunkt besitzt. Die Radien der Kreise sollen derart gegen Null konvergieren, daß stets

$$k_i \circ k_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots) . \quad (15.1)$$

<sup>9)</sup> Dies folgt aus der Stetigkeit der Abbildung.

<sup>10)</sup> R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, S. 37.

Ferner sollen  $\tau_1$  und  $k_1$  so gewählt sein, daß der Grundpunkt  $t_0$  nicht im Inneren von  $k_1$  liegt.

Auf der Peripherie von  $k_1$  grenzen wir einen Bogen  $b_{11}$ , auf der von  $k_2$  einen Bogen  $b_{20}$  ab und verbinden die beiden Endpunkte des einen Bogens mit denen des anderen in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende Jordanbögen  $\gamma_{10}$  und  $\gamma_{11}$ , die mit  $k_1$  und  $k_2$  nur die Endpunkte gemein haben und ganz im Inneren des Gebietes  $W_0$  verlaufen, so daß die vier Kurvenstücke  $b_{11}, \gamma_{10}, b_{20}, \gamma_{11}$  die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden, schlichten Flächenstückes ergeben, welches die Mittelpunkte  $\tau_1$  und  $\tau_2$  der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  im Inneren enthält. In ähnlicher Weise wird  $k_2$  mit  $k_3$  verbunden und so fort (vgl. § 4). Das Ergebnis ist ein einfach zusammenhängendes, schlichtartiges Riemannsches Flächenstück  $S_0$ , dessen Projektion ganz auf  $W_0$  fällt. In gleicher Weise werden die anderen Flächenstücke  $S_n$  mit  $n \neq 0$  gebildet.

Nun betrachten wir wieder die Fläche  $F'_\infty$  und wählen auf der begrenzenden Doppelspirale  $\sigma_0$  einen Punkt  $P$  und einen Kreis  $k_0$  mit  $P$  als Mittelpunkt derart, daß erstens  $k_0$  innerhalb  $W_0$  liegt<sup>11)</sup>, und zweitens, daß der Kreis  $k_1$ , dessen Inneres nach unserer Konstruktion Teilmenge von  $S_0$  ist, ganz außerhalb  $k_0$  liegt. Dies ist möglich, da der Kreis  $k_1$  den Grundpunkt  $t_0$  nach obiger Voraussetzung nicht in seinem Inneren enthält, also auch nicht die ganze Doppelspirale  $\sigma_0$ , die  $t_0$  umläuft, überdecken kann. Unter den Schnittpunkten des Kreises  $k_0$  mit  $\sigma_0$  existiert dann mindestens ein Paar  $Q'$  und  $Q''$ , für das der auf  $k_0$  liegende Bogen  $Q'Q''$  ganz außerhalb der Fläche  $F'_\infty$  verläuft. Wir ersetzen das von  $Q'$  und  $Q''$  begrenzte Kurvenstück von  $\sigma_0$  durch diesen Kreisbogen  $Q'Q''$  und erhalten so anstatt  $F'_\infty$  eine neue einfach zusammenhängende Fläche  $\tilde{F}'_\infty$ . Auf dem Randbogen  $Q'Q''$  dieser Fläche wählen wir einen Teilbogen  $b_{01}$  und auf dem Randbogen  $b_{11}$  des Flächenstückes  $S_0$  einen Teilbogen  $b_{10}$ . Dann verbinden wir die Endpunkte von  $b_{01}$  mit denen von  $b_{10}$  in der Weise durch zwei sich gegenseitig nicht treffende Jordanbögen  $\gamma_{00}$  und  $\gamma_{01}$ , die mit  $k_0$  und  $k_1$  nur die Endpunkte gemein haben und ganz im Gebiete  $W_0$  verlaufen, so daß die Kurven  $b_{01}, \gamma_{00}, b_{10}, \gamma_{01}$  die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden schlichten Flächenstückes ergeben, welches ganz außerhalb  $k_0$  und  $k_1$  liegt und die Flächen  $\tilde{F}'_\infty$  und  $S_0$  gegenüber verbindet.

In derselben Weise führen wir diesen Erweiterungsprozeß mit den übrigen Flächenstücken  $S_n$  ( $n \neq 0$ ) durch und erhalten so schließlich

---

<sup>11)</sup> Dazu brauchen nur  $P$  in genügender Nähe des Grundpunktes  $t_0$  und der Radius von  $k_0$  genügend klein gewählt werden.

eine Fläche  $F_\infty^*$ , die wir durch eine analytische Funktion  $t = \psi(z)$  auf  $|z| < 1$  abbilden können. Die Begrenzung von  $F_\infty^*$  besteht erstens, für jedes  $n$ , aus den Randkurven  $\sigma_{n,1}$  und  $\sigma_{n,2}$ , die sich wiederum aus den zwei Ufern des angehefteten Flächenstückes  $S_n$  und den zwei sich daran anschließenden Ästen der Doppelspirale  $\sigma_n$  zusammensetzen, zweitens aus allen übrigen von den  $\sigma_n$  verschiedenen Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  und drittens schließlich aus dem Punkte Unendlich. Diese Randkurven  $\sigma_{n,1}$ ,  $\sigma_{n,2}$  und  $\sigma_n^{(j)}$  gehen durch  $t = \psi(z)$  stetig in Kreisbögen  $\delta_{n,1}$ ,  $\delta_{n,2}$  und  $\delta_n^{(j)}$  auf  $|z| = 1$  über, deren gesamtes lineares Maß gleich  $2\pi$  ist. Letzteres sieht man sofort ein, wenn man auf  $F_\infty^*$  passende Querschnitte  $q_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) anbringt, durch welche  $F_\infty^*$  wieder in die Fläche  $F'_\infty$  und unendlich viele Teilflächen, die im wesentlichen die  $S_n$  darstellen, zerlegt wird. Die Bildquerschnitte  $r_n$ , von denen jeder einen Punkt auf  $\delta_{n,1}$  mit einem auf  $\delta_{n,2}$  verbindet, zerlegen  $|z| < 1$  in ein der Fläche  $F'_\infty$  entsprechendes Gebiet  $E'$  und in unendlich viele weitere Gebiete. Wendet man auf letztere die Überlegungen des § 5, auf  $E'$  die des § 14 an, so folgt unmittelbar unsere Behauptung.

Daraus, zusammen mit der Stetigkeit der Randabbildung folgt weiter, daß erstens die den beiden Randkurven  $\sigma_{n,1}$  und  $\sigma_{n,2}$  entsprechenden Bildkreisbögen  $\delta_{n,1}$  und  $\delta_{n,2}$  auf  $|z| = 1$  in einem ihrer Endpunkte zusammenstoßen (dieser ist singulärer Punkt für  $\psi(z)$ ), und zweitens diese Kreisbogenpaare auf  $|z| = 1$  in derselben Reihenfolge liegen wie die den Randkurven  $\sigma_n$  entsprechenden Bildkreisbögen  $\delta_n$  bei der Abbildung der Fläche  $F'_\infty$  durch  $t = \varphi(u)$  auf  $|u| < 1$  im vorigen Paragraphen. Also werden sich die Bogenpaare  $\delta_{n,1}$ ,  $\delta_{n,2}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) in einem einzigen Peripheriepunkt  $\zeta_0$  häufen, welche nach der zu Anfang des § 15 gemachten Voraussetzung einer der Endpunkte des Kreisbogens  $\delta_0^{(1)}$  ist.

16. Durch die Abbildung  $w = L(e^t)$ , wobei  $L$  eine passende lineare Transformation bedeutet, gehen die Gebiete  $W_n$  wieder in die Umgebungs-komponenten  $V_n$  der Folge (13.2) über und die Punkte  $t_n$  in die Punkte  $w_n$ , deren Projektionen auf die Punktmenge  $A$  fallen. Die Bezeichnungen für  $F_\infty^*$ ,  $S_n$  und  $\sigma_n^{(j)}$  behalten wir der Einfachheit halber bei.

Wir können jetzt zeigen, daß die Menge  $H$ , die wir für die Funktion

$$w = f(z) = L(e^t), \quad t = \psi(z), \quad |z| < 1 \quad (16.1)$$

im Peripheriepunkt  $\zeta_0$  bilden, mit der vorgegebenen abgeschlossenen Menge  $A$  übereinstimmt.

Die Menge der Punkte auf  $|z| = 1$ , in denen kein radialer Grenzwert existiert, ist nach § 15 vom linearen Maße Null. Ferner liegen auf der

Linie  $|z| = 1$  in jeder Umgebung von  $\zeta_0$  die Bilder der Ränder von fast allen Flächenstücken  $S_n$ , die ihrerseits die Umgebungskomponenten  $V_n$  in der im Sinne des § 15 zu verstehenden Weise approximieren. Dabei gehört zu jeder der Umgebungskomponenten  $V_n$  genau ein  $S_n$ . Diejenigen Radien des Einheitskreises, die weder auf einem dem Rande eines  $S_n$  entsprechenden Kreisbogen noch in Punkten enden, in denen kein radialer Grenzwert existiert, münden dann in einen Peripheriepunkt, der einem Punkte auf einer der Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  bzw.  $\sigma_n$  entspricht. Diese Doppelspiralen sind aber so konstruiert, daß sie sich mit beiden Ästen asymptotisch dem Punkte  $w_n$ , dessen Projektion in die  $w$ -Ebene der Menge  $A$  angehört, nähern und überdies ganz in Umgebungen von  $w_n$  fallen, deren Durchmesser für wachsende Werte von  $j + |n|$  gegen Null konvergieren. Die entlang dieser Radien gefundenen Grenzwerte haben also an der Bildung von  $H$  nur insoweit Anteil, als sie die Punkte  $w_n$  ergeben. Somit ist  $H = A$ .

## Die Randwerte

17. In diesem und den folgenden Paragraphen werden wir Aufschluß über die Randwerte der Funktion  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  erhalten und damit den Beweis des Satzes II zum Abschluß bringen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen schreibt sich die zur Menge  $H$  gehörende Komplementärmenge  $U$  als Summe von höchstens abzählbar vielen fremden Gebieten  $G_i$ . In § 10 sahen wir bereits, daß die Punkte der mehrfach zusammenhängenden unter den  $G_i$  sämtlich Randwerte von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  sind. Die in den §§ 13 bis 16 konstruierte Funktion  $w = f(z)$ , welche die Fläche  $F_\infty^*$  auf  $|z| < 1$  abbildet, ist insofern noch sehr speziell, als bei ihr auch die Punkte der einfach zusammenhängenden unter den  $G_i$  Randwerte in  $\zeta_0$  sind. Wir sehen dies so.

Wir betrachten ein beliebiges Gebiet  $G_i$ , etwa  $G_1$ . Ist dann  $\omega$  ein beliebiger Punkt aus  $G_1$ , so liegen auf der Fläche  $F_\infty^*$  unendlich viele Punkte

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \quad (17.1)$$

über  $\omega$ . Wir zeigen, daß die Menge der Bildpunkte

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots \quad (17.2)$$

im Punkte  $\zeta_0$  einen Häufungspunkt besitzt, d. h. im Inneren jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\zeta_0$  mindestens einer der Punkte (17.2) liegt. Nun bedeutet es keinerlei Einschränkung, anzunehmen, daß die Schnittpunkte  $P_1$  und  $P_2$  des  $\varepsilon$ -Kreises mit  $|z| = 1$  beide auf zwei Kreisbögen  $\delta_{n_1}^{(j_1)}$  und  $\delta_{n_2}^{(j_2)}$  fallen, da  $\zeta_0$  ja ein Häufungspunkt der Bögen ist. Dann stellt der in

$|z| < 1$  verlaufende,  $P_1$  und  $P_2$  verbindende Teil des  $\varepsilon$ -Kreises einen Querschnitt  $r$  des Einheitskreises dar. Der Bildquerschnitt  $q$  auf der Fläche  $F_\infty^*$  verbindet die zwei auf den Doppelspiralen  $\sigma_{n_1}^{(j_1)}$  und  $\sigma_{n_2}^{(j_2)}$  (welche den Grundpunkt  $w_{n_1}$  bzw.  $w_{n_2}$  umlaufen) liegenden Bildpunkte  $Q_1$  und  $Q_2$ , und zerlegt  $F_\infty^*$  in zwei Teilflächen  $F_1$  und  $F_2$ . Wir behaupten, daß jede der beiden Teilflächen mindestens einen Punkt aus (17.1) als inneren Punkt enthält.

Da nämlich der Querschnitt  $q$  (einschließlich seiner Endpunkte  $Q_1$  und  $Q_2$ ) eine abgeschlossene und beschränkte Menge darstellt, kann er von endlich vielen, etwa  $N$  schllichten, ganz auf der Fläche  $F_\infty^*$  liegenden Kreisscheiben überdeckt werden<sup>12)</sup>. Diese  $N$  Kreisscheiben liegen aber in höchstens  $N$  verschiedenen Blättern von  $F_\infty^*$ . Deshalb läßt sich z. B. der Punkt  $Q_1$  durch eine ganz auf der Teilfläche  $F_1$  verlaufenden Jordankurve  $\gamma_1$  mit einem der Punkte (17.1) verbinden. Dazu braucht  $\gamma_1$  nur, von  $Q_1$  ausgehend, den Grundpunkt  $w_{n_1}$  so oft (mindestens  $N$ -mal) in entsprechender Richtung zu umlaufen, um schließlich in ein Blatt zu gelangen, welches einen Punkt  $\omega_k$  enthält. Da dasselbe auch für eine von  $Q_1$  ausgehende und auf der Teilfläche  $F_2$  verlaufenden Jordankurve  $\gamma_2$  gilt, ist unsere Behauptung bewiesen. Daraus folgt, daß in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\zeta_0$  mindestens ein Punkt  $\zeta_k$  existiert, für den  $f(\zeta_k) = \omega_k = \omega$  ist. Da über die Zusammenhangszahl des Gebietes  $G_1$  keine Annahme gemacht wurde, und da jeder Punkt der Menge  $H$  ebenfalls Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  ist, so schließen wir, daß die Randwerte der in § 13 u. f. konstruierten Funktion die volle Ebene ausmachen.

18. Die Frage nach den Randwerten ist für den Fall, daß  $H$  aus einem einzigen Kontinuum besteht, bereits in § 8 vollständig beantwortet worden. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf abgeschlossenen Punktmengen  $A$ , die aus mindestens zwei fremden Kontinuen bestehen. Durch eine lineare Transformation erreichen wir wieder, daß erstens  $A$  ganz im Kreise  $|w - 1| = \frac{1}{2}$  liegt und zweitens dasjenige der Gebiete  $G_i$  (deren Vereinigung  $U$  die Komplementärmenge zu  $H$  darstellt), welches den Punkt Unendlich enthält, mehrfach zusammenhängend ist, nach dem Ergebnis des § 10 also von vornehmerein aus lauter Randwerten von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  besteht.

Seien diejenigen einfach zusammenhängenden unter den Gebieten  $G_i$ , von denen wir fordern, daß sie keinen Randwert enthalten, die Gebiete

$$G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots \quad (18.1)$$

---

<sup>12)</sup> In den Endpunkten  $Q_1$  und  $Q_2$  kommen natürlich nur gewisse auf  $F_\infty^*$  liegende Kreissegmente in Frage.

Ihre Anzahl ist höchstens abzählbar. In jedem  $G_{i_k}$  wählen wir einen festen Punkt  $w'_{i_k}$ .

Bei unseren weiteren Überlegungen knüpfen wir an die Ausführungen des § 13 an. Aus jeder Umgebungskomponente  $V_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) der Menge  $A$  wählen wir einen festen Punkt  $w_n$  von der Eigenschaft, daß seine Projektion auf die Menge  $A$  fällt, jedoch nicht Randpunkt eines der Gebiete  $G_{i_k}$  ist. Sollte aber jeder dieser Punkte eines  $V_n$  Randpunkt eines  $G_{i_k}$  sein (was z. B. zutrifft, wenn  $A$  aus zwei konzentrischen Kreisen besteht und wenn man fordert, daß das Innere des kleineren Kreises keinen Randwert von  $f(z)$  enthalten soll), so unterbleibe für dieses  $V_n$  im Gegensatz zur Konstruktion im § 13 die Auswahl eines Punktes  $w_n$ . Die Punkte  $w_n$  liegen also jedenfalls stets ganz außerhalb der Gebiete  $G_{i_k}$ .

Wir verteilen dann sämtliche Umgebungskomponenten  $V_n$  in passender Weise auf die Blätter der in Null und Unendlich gewundenen Logarithmusfläche und gehen von dort durch  $t = \log w$  in die schlichte punktierte  $t$ -Ebene, wobei  $V_n$  in das im Rechtecke  $R_n$  (13.4) gelegene Gebiet  $W_n$  und, gegebenenfalls, der Punkt  $w_n$  in den Punkt  $t_n \in W_n$  übergehen.

Wir zeichnen in alle  $R_n$ , ausgenommen in  $R_0$ , die Bildgebiete  $G_{n, i_1}$  ( $n \neq 0$ ) von  $G_{i_1}$  ein. Der in  $G_{n, i_1}$  gelegene Bildpunkt des Punktes  $w'_{i_1}$  sei  $t_{n, i_1}$ . In die Rechtecke  $R_n$  mit  $n \neq 0, \pm 1$  zeichnen wir überdies auch noch die Bildgebiete  $G_{n, i_2}$  von  $G_{i_2}$  ein. Der in  $G_{n, i_2}$  gelegene Bildpunkt von  $w'_{i_2}$  sei  $t_{n, i_2}$ . Allgemein zeichnen wir in alle Rechtecke  $R_n$  mit  $n \neq 0, \pm 1, \dots, \pm k$  auch noch die Bildgebiete  $G_{n, i_k}$  von  $G_{i_k}$  mit den Bildpunkten  $t_{n, i_k}$  des Punktes  $w'_{i_k}$  ein. Dabei kann keiner der in  $R_n$  liegenden Punkte  $t_{n, i_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, |n|$ ) mit dem Punkte  $t_n$  (falls für diesen Index  $n$  ein solcher vorhanden ist) zusammenfallen, da erstere im Inneren der Gebiete  $G_{n, i_k}$  liegen,  $t_n$  dagegen in deren Äußerem.

Wir entfernen aus der in Unendlich punktierten  $t$ -Ebene sämtliche Punkte  $t_n$  und  $t_{n, i_k}$ <sup>13)</sup> und konstruieren über dem verbleibenden  $\infty$ -fach zusammenhängenden Gebiete die regulär verzweigte (schlichtartige und einfach zusammenhängende) Überlagerungsfläche  $\Phi_\infty$  (vgl. § 11). Über dem Grundpunkte  $t_n$  von  $\Phi_\infty$  liegen die abzählbar vielen logarithmischen Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), über dem Grundpunkte  $t_{n, i_k}$  die logarithmischen Windungspunkte  $L_{n, i_k}^{(j)}$ .

19. Dann konstruieren wir auf  $\Phi_\infty$  in bekannter Weise (§ 14) um jeden der Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j = 1, 2, \dots$ )<sup>14)</sup>

<sup>13)</sup> Aus dem Rechtecke  $R_n$  werden dabei die endlich vielen Punkte  $t_{n, i_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, |n|$ ) und  $t_n$  weggemommen.

<sup>14)</sup> Im allgemeinen werden nach § 18 also gewisse Werte des Index  $n$  fehlen.

eine doppelspiralförmige stetige Kurve  $\sigma_n^{(j)}$ , deren beide Äste den Punkt  $L_n^{(j)}$  unendlich oft in entgegengesetzter Richtung umlaufen und sich ihm dabei asymptotisch nähern. Dabei sollen die Projektionen der  $\sigma_n^{(j)}$  ganz in Kreise  $K_n^{(j)}$  um  $t_n$  fallen, die selbst alle einerseits innerhalb der Rechtecke  $R_n$ , andererseits ganz im Äußeren der Gebiete  $G_{n,i_k}$  liegen, und deren Radien für  $j+|n|\rightarrow\infty$  gegen Null streben.

Um die Windungspunkte  $L_{n,i_k}^{(j)}$  zeichnen wir ebenfalls Doppelspiralen in folgender Weise. Sei

$$\Gamma_{n,i_k}^{(1)}, \Gamma_{n,i_k}^{(2)}, \Gamma_{n,i_k}^{(3)}, \dots \quad (19.1)$$

eine Folge von paarweise punktfremden, im Gebiete  $G_{n,i_k}$  liegenden geschlossenen Jordanschen Kurven, wobei jede Kurve  $\Gamma_{n,i_k}^{(l)}$  die vorhergehende  $\Gamma_{n,i_k}^{(l-1)}$  von der nachfolgenden  $\Gamma_{n,i_k}^{(l+1)}$  trennt. Die Folge strebe mit wachsendem Index  $l$  gegen die Begrenzung von  $G_{n,i_k}$ . Da die Gebiete  $G_{n,i_k}$  ( $n = \pm k, \pm(k+1), \dots$ ) alle unter sich kongruent sind, können wir weiter voraussetzen, daß dies auch von den Kurven  $\Gamma_{n,i_k}^{(l)}$  ( $n = \pm k, +(k+1), \dots$ ) gilt.

Nun konstruieren wir auf der Überlagerungsfläche  $\Phi_\infty$  um jeden der Windungspunkte  $L_{n,i_k}^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j, k = 1, 2, \dots$ ) eine doppelspiralförmige stetige Kurve  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$ , deren beide Äste den Punkt  $L_{n,i_k}^{(j)}$  unendlich oft in entgegengesetzter Richtung umlaufen und sich dabei der Begrenzung von  $G_{n,i_k}$  asymptotisch nähern. Weiter soll die Projektion von  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  ganz im Inneren des Gebietes  $G_{n,i_k}$ , dabei aber ganz außerhalb der geschlossenen Kurve  $\Gamma_{n,i_k}^{(j+|n|)}$ <sup>15)</sup> liegen. Wir erreichen dadurch, daß sich sowohl die Projektionen der Doppelspiralen um den festen Grundpunkt  $t_{n,i_k}$  (wachsender Index  $j$ ) als auch diejenigen der Doppelspiralen  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  in den Rechtecken  $R_n$  mit  $n = \pm k, \pm(k+1), \dots$  und festen Indizes  $j$  und  $i_k$  als Ganzes immer besser den Begrenzungen der kongruenten Gebiete  $G_{n,i_k}$  anschmiegen.

Nun zerschneiden wir die Fläche  $\Phi_\infty$  entlang sämtlicher Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  und  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j, k = 1, 2, \dots$ ), wodurch  $\Phi_\infty$  in die einfach zusammenhängende Restfläche  $\Phi'_\infty$  und in unendlich viele Teilflächen, welche je einen der Windungspunkte  $L_n^{(j)}$  bzw.  $L_{n,i_k}^{(j)}$  als Randpunkt besitzen, zerfällt. Genau wie in § 15 wird die Fläche  $\Phi'_\infty$  durch „Anhängen“ der Riemannschen Flächenstücke  $S_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )<sup>16)</sup> entlang gewisser Bögen der begrenzenden Doppelspiralen  $\sigma_n$  (die  $\sigma_n$  sind speziell ausgewählte unter den  $\sigma_n^{(j)}$ ) erweitert. So erhalten wir schließlich

<sup>15)</sup> Die Projektionen von  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  liegt also ganz im Innern des „ringförmigen“ Gebietes, das von der Begrenzung des Gebietes  $G_{n,i_k}$  und der Kurve  $\Gamma_{n,i_k}^{(j+|n|)}$  eingeschlossen wird.

<sup>16)</sup> Siehe Fußnote 14!

die schlichtartige, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $\Phi_\infty^*$ . Sie möge durch die analytische Funktion  $t = \psi(z)$  auf das Innere des Kreises  $|z| < 1$  abgebildet werden.

Andererseits wird  $\Phi_\infty^*$  durch  $w = L(e^t)$  auf eine Fläche über der  $w$ -Ebene übergeführt, wo  $L$  eine passende Linearfunktion bedeutet. Dabei gehen die Gebiete  $W_n$  wieder in die Umgebungskomponenten  $V_n$  und die Grundpunkte  $t_n$  bzw.  $t_{n,i_k}$  in die Punkte  $w_n$  bzw.  $w'_{i_k}$  über. Die Bezeichnungen für die Fläche  $\Phi_\infty^*$  und die Linien  $\sigma_n^{(j)}$ ,  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  usw. behalten wir auch nach dieser Abbildung der Einfachheit halber bei.

Von der Funktion

$$w = L(e^{\psi(z)}) = f(z) , \quad |z| < 1 , \quad (19.2)$$

lässt sich dann ähnlich wie in den §§ 13 bis 16 zeigen, daß sie die unsere Fläche  $\Phi_\infty^*$  begrenzenden Doppelspiralen  $\sigma_n^{(j)}$  (§ 14), die Ränder  $\sigma_{n,1}$ ,  $\sigma_{n,2}$  der angehängten Flächenstücke  $S_n$  (§ 15) und die Doppelspiralen  $\varsigma_{n,i_k}^{(j)}$  stetig in Kreisbögen  $\delta_n^{(j)}$ ,  $\delta_{n,1}$  und  $\delta_{n,2}$ , und in  $\delta_{n,i_k}^{(j)}$  auf der Linie  $|z| = 1$  überführt, deren gesamtes lineares Maß gleich  $2\pi$  ist, und daß auf  $|z| = 1$  ein Punkt  $\zeta_0$  existiert, in dem die in § 2 definierte Punktmenge  $H$  mit der Punktmenge  $A$  identisch ist. Bezüglich des Punktes  $\zeta_0$  bemerken wir, daß sich in ihm sowohl die Kreisbögen  $\delta_{n,1}$ ,  $\delta_{n,2}$  (wegen des Index  $n$  beachte man wieder die Fußnote 14!) als auch die Bögen  $\delta_{n,i_k}^{(j)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; k = 1, 2, \dots, n ; j$  speziell ausgewählt) häufen. Im übrigen verzichten wir hier auf die genaue Durchführung der Beweise, da sie sich unter Berücksichtigung der Ausführungen dieses Paragraphen ohne Schwierigkeit aus denen, wie wir sie für die Fläche  $F_\infty^*$  in den §§ 14 u. f. führten, ergeben.

Nun sehen wir aber auch sofort ein, daß die Gebiete (18.1) keinen einzigen Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  enthalten.

Betrachten wir nämlich einen beliebigen Punkt  $\omega$  in irgendeinem der Gebiete (18.1), etwa in  $G_{i_1}$ , und ordnen wir  $\omega$  eine ganz im Inneren von  $G_{i_1}$  liegende Umgebung  $U_\omega$  zu, so folgt aus der Konstruktion der Riemannschen Fläche  $\Phi_\infty^*$ , daß sich über  $U_\omega$  höchstens endlich viele Blätter von  $\Phi_\infty^*$  befinden, da sich die einen Teil der Begrenzung von  $\Phi_\infty^*$  bildenden Doppelspiralen  $\varsigma_{n,i_1}^{(j)}$  als Ganzes sowohl mit wachsendem Index  $j$  als auch  $n$  immer besser der Begrenzung des Gebietes  $G_{i_1}$  anschmiegen. Daraus schließen wir, daß  $\omega$  kein Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  sein kann.

Damit ist der Satz II in allen Teilen bewiesen.

(Eingegangen den 17. Februar 1948.)