Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen.
Autor: Szele, T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19194

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen

Von T. SZELE, Szeged (Ungarn)

In dieser Note wird folgendes Problem über *endliche Abelsche Gruppen* mit *additiver* Schreibweise behandelt: Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ein direkter Teiler in $\mathfrak{G}$ ist, d. h. eine direkte Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \bar{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{G}$ existiert[1]). Da $\mathfrak{G}$ kommutativ ist, kann man das Problem auch so formulieren: Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ durch Elemente von $\mathfrak{G}$ „representieren" läßt, d. h. daß in jeder Nebenklasse von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ ein Element ausgezeichnet werden kann, so daß die ausgezeichneten Elemente eine Gruppe bilden.

Es wird natürlich eine praktisch gut brauchbare Bedingung gemeint, denn anderenfalls besitzt das Problem offenbar die folgende triviale Lösung: $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$, wenn es in $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ mit $(\mathfrak{H})\cdot(\bar{\mathfrak{H}}) = (\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H} \cap \bar{\mathfrak{H}} = \{0\}$ gibt[2]).

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt, wie bekannt, eine *eindeutig bestimmte* direkte Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_k$, wobei $(\mathfrak{G}_1), \ldots, (\mathfrak{G}_k)$ sämtlich Potenzen voneinander verschiedener Primzahlen sind[3]). Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \cdots + \mathfrak{H}_k$ eine ähnliche Zerlegung mit $(\mathfrak{H}_i) \mid (\mathfrak{G}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ (wobei einige $\mathfrak{H}_i$ gleich $\{0\}$ sein können), so ist $\mathfrak{H}$ offenbar dann und nur dann ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$, falls $\mathfrak{H}_i$ für alle i ein solcher von $\mathfrak{G}_i$ ist. Das folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Somit können wir uns bei der Lösung unseres Problems auf solche Gruppen $\mathfrak{G}$ beschränken, für welche $(\mathfrak{G}) = p^e$ (p Primzahl) ist.

---

[1]) Entsprechend der additiven Schreibweise in $\mathfrak{G}$ läßt sich das direkte Produkt „direkte Summe" nennen und durch $\mathfrak{H} + \bar{\mathfrak{H}}$ (anstatt $\mathfrak{H} \times \bar{\mathfrak{H}}$) bezeichnen.

[2]) Durch $(\mathfrak{G})$ bzw. (A) wird üblicherweise die Ordnung einer Gruppe bzw. eines Gruppenelementes, durch $\{0\}$ die aus dem „Einselement" 0 von $\mathfrak{G}$ allein bestehende Untergruppe bezeichnet.

[3]) Diese Zerlegung ist praktisch leicht zu gewinnen, denn die Untergruppen $\mathfrak{G}_i$ bestehen einfach aus den Elementen, deren Ordnungen Potenzen einer und derselben Primzahl sind.

Aus der Eindeutigkeit der Invarianten ergibt sich unmittelbar folgende notwendige Bedingung:

Die Invarianten von $\mathfrak{H}$ bilden eine Teilmenge der Invarianten von $\mathfrak{G}$ (1).

Nennt man eine Gruppe mit lauter gleichen Invarianten *regulär*, so wird sich zeigen, daß im Falle einer regulären $\mathfrak{G}$ die Bedingung (1) auch hinreicht. Aber nur in diesem Fall! Es gilt nämlich der

Satz 1. *Die Bedingung* (1) *ist dann und nur dann immer hinreichend dafür, daß $\mathfrak{H}$ ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$ ist, falls $\mathfrak{G}$ eine reguläre Gruppe ist.*

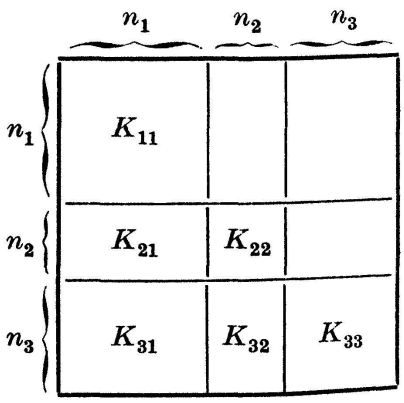
Das wird sich als Nebenresultat aus den folgenden Untersuchungen ergeben. Wir beginnen mit folgendem, an und für sich interessanten Problem. Sei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine Basis der p-Gruppe $\mathfrak{G}$ nach abnehmender Ordnung geordnet, d. h.

$$(A_1) = \cdots = (A_{n_1}) = p^{\alpha_1}, \quad (A_{n_1+1}) = \cdots = (A_{n_1+n_2}) = p^{\alpha_2}, \ldots, \quad \cdots = (A_n) = p^{\alpha_r}$$
$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r, \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n \ . \tag{2}$$

Wir fragen nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß die beliebig angegebenen Elemente

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = a_{11} A_1 + \cdots + a_{1n} A_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad (B_1) \geqq \cdots \geqq (B_n) \\ B_n = a_{n1} A_1 + \cdots + a_{nn} A_n \end{array}\right\} \tag{3}$$

eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden. Um diese Bedingung aufstellen zu können, teilen wir die Koeffizientenmatrix $\| a_{ik} \|$ in r^2 rechteckige Kästchen ein, wie die Figur (im Fall $r = 3$) zeigt, und bezeichnen die einzelnen Kästchen mit K_{uv}. (u ist Zeilenindex, v ist Spaltenindex.) Dann gilt der



Satz 2. *Die Elemente* (3) *bilden dann und nur dann eine Basis von $\mathfrak{G}$, wenn keine der Determinanten $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ in den (quadratischen) Diagonalkästchen $K_{11}, \ldots, K_{rr}$ durch p, dagegen jedes Element aller Kästchen K_{uv} unter der Diagonale $(u > v)$ durch $p^{\alpha_v - \alpha_u}$ teilbar ist.*

Wir zeigen zuerst *die Notwendigkeit* der angegebenen Bedingung. Da die Invarianten $(A_1), \ldots, (A_n)$ von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind, können $B_1, \ldots, B_n$ wegen $(B_1) \geqq \cdots \geqq (B_n)$ nur dann eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden, falls

$$(B_i) = (A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

ist. Daraus folgt unmittelbar die Notwendigkeit der auf die Kästchen K_{uv} mit $u > v$ aufgestellten Bedingung:

$$p^{\alpha_1 - \alpha_j} \mid a_{i1}, \ldots, a_{in_1}, \quad p^{\alpha_2 - \alpha_j} \mid a_{i\, n_1+1}, \ldots, a_{i\, n_1+n_2}, \ldots$$

falls $(A_i) = p^{\alpha_j}$, $(i = 1, \ldots, n)$, da diese ersichtlich gleichbedeutend mit

$$(B_i) \leqq (A_i) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

ist.

Die Notwendigkeit der für die Determinanten angegebenen Bedingung folgt so. Bilden $B_1, \ldots, B_n$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, so existieren die Darstellungen:

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{11} B_1 + \cdots + b_{1n} B_n \\ &\vdots \\ A_n &= b_{n1} B_1 + \cdots + b_{nn} B_n \,. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier $B_1, \ldots, B_n$ durch ihre Darstellungen in (3), so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von A_k in beiden Seiten der i-ten Gleichung:

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lk} \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{(A_k)}, \text{ falls } \begin{cases} i = k \\ i \neq k \end{cases} \text{ ist.}$$

Da $p \mid (A_k)$ ist, gelten diese Kongruenzen a fortiori mod p, d. h. besteht für die entsprechenden Determinanten die Kongruenz:

$$|c_{ik}| = |b_{ik}| \cdot |a_{ik}| \equiv 1 \pmod{p} \,.$$

Andererseits folgt aber aus der schon bewiesenen Eigenschaft der Kästchen K_{uv} $(u > v)$ der Matrix $||a_{ik}||$ und aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$|a_{ik}| \equiv \Delta_1 \ldots \Delta_r \pmod{p} \,. \tag{6}$$

Nach beiden vorigen Kongruenzen ist wirklich $\Delta_j \not\equiv 0 \pmod{p}$ $(j = 1, \ldots, r)$, w. z. b. w.

Die Bedingung im Satz 2 ist aber auch *hinreichend*. Ist diese nämlich erfüllt, so folgt zunächst aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz die Richtigkeit von (6), d. h. auch von

$$|a_{ik}| \not\equiv 0 \pmod{p} \,. \tag{7}$$

Es gelten auch die Ungleichungen (5). Andererseits gibt es unter den Koeffizienten $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ einen in das Diagonalkästchen K_{jj} fallenden a_{ih}, für welchen $p \nmid a_{ih}$, da im entgegengesetzten Fall jedes Element einer Zeile in K_{jj} durch p teilbar wäre, was wegen $p \nmid \Delta_j$ nicht geht. Dann ist aber die Ordnung von

$$B_i = a_{i1} A_1 + \cdots + a_{ih} A_h + \cdots + a_{in} A_n$$

$\geqq (A_h) = (A_i)$. Daraus und aus (5) folgt die Gültigkeit von (4).

Bezeichnet man den zum Element a_{ik} gehörenden adjungierten Minor der Determinante $|a_{ik}|$ mit d_{ik}, so erhält man nach dem wohlbekannten Verfahren beim Beweis der Cramerschen Regel aus (3):

$$d_{1k} B_1 + d_{2k} B_2 + \cdots + d_{nk} B_n = |a_{ik}| A_k \qquad (k = 1, \ldots, n) .$$

Da es aber nach (7) ein c mit $c \cdot |a_{ik}| \equiv 1 \pmod{(A_k)}$ gibt, es gilt die Darstellung

$$A_k = c\, d_{1k} B_1 + \cdots + c\, d_{nk} B_n \qquad (k = 1, \ldots, n) .$$

Daraus folgt, daß $B_1, \ldots, B_n$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen. Sie bilden zugleich eine Basis von $\mathfrak{G}$, denn ihre Unabhängigkeit wird durch die aus (4) erhaltene Relation $(B_1) \ldots (B_n) = (A_1) \ldots (A_n) = \mathfrak{G}$ gesichert. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Nun ist eine Lösung unseres Hauptproblems leicht zu gewinnen. Diese ist nämlich im folgenden Satz enthalten:

Satz 3. *Bilden die Elemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (in der durch (2) festgelegten Anordnung) eine Basis von $\mathfrak{G}$, und nimmt man eine beliebige*[4]) *Basis $B'_1, B'_2, \ldots, B'_m$ von $\mathfrak{H}$ mit der Darstellung*

$$\left.\begin{array}{l} B'_1 = a'_{11} A_1 + \cdots + a'_{1n} A_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad (m < n)\ ^{5)} \\ B'_m = a'_{m1} A_1 + \cdots + a'_{mn} A_n \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$(B'_1) = \cdots = (B'_{m_1}) = p^{\alpha_1}, \quad (B'_{m_1+1}) = \cdots = (B'_{m_1+m_2}) = p^{\alpha_2}, \ldots,$$
$$\cdots = (B'_m) = p^{\alpha_r},$$

---

[4]) Wir werden nämlich sehen, daß falls obige Bedingung für eine Basis von $\mathfrak{H}$ gilt, sie auch für jede Basis von $\mathfrak{H}$ erfüllt ist.

[5]) Der Fall $m = n$ ist nämlich trivial: $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$.

so ist $\mathfrak{H}$ dann und nur dann ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Die Koeffizientenmatrix $||a'_{ik}||$ läßt sich (wie die Figur im Fall $r = 3$ zeigt) in rechteckige Kästchen einteilen (wobei unter den „Höhen" $m_1, \ldots, m_r$ der einzelnen „Zonen" einige auch Null sein können) so, daß jedes Element aller Kästchen K'_{uv} unter der Diagonale $(u > v)$ durch $p^{\alpha_v - \alpha_u}$ teilbar ist, dagegen jedes Diagonalkästchen K'_{jj} eine durch p nicht teilbare Determinante m_j-ter Ordnung enthält $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & n_1 & n_2 & n_3 \\
\hline
m_1 & K'_{11} & & \\
\hline
m_2 & K'_{21} & K'_{22} & \\
\hline
m_3 & K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} \\
\hline
\end{array}$$

Bemerkung. *Wegen der notwendigen Bedingung* (1) *ist offenbar $m_j \leqq n_j$ $(j = 1, \ldots, r)$.*

Wir zeigen einerseits, daß diese Bedingung *für jede Basis* eines direkten Teilers $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ erfüllt ist. Im Fall $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \overline{\mathfrak{H}}$ läßt sich nämlich eine beliebige Basis (8) von $\mathfrak{H}$ durch Hinzunahme von $n - m$ Elementen (einer Basis von $\overline{\mathfrak{H}}$) zu einer Basis von $\mathfrak{G}$ ergänzen. Folglich entsteht die Koeffizientenmatrix $||a'_{ik}||$ in (8) durch Weglassen einiger Zeilen aus einer quadratischen Matrix, die der Bedingung im Satz 2 genügt. Somit ist die Bedingung des Satzes 3 a fortiori erfüllt, denn die Teilbarkeit sämtlicher Determinanten m_j-ter Ordnung im Kästchen K'_{jj} durch p dieselbe für die Determinante n_j-ter Ordnung im Diagonalkästchen K_{jj} der quadratischen Matrix nach sich zieht.

Andererseits beweisen wir folgendes: Besitzt die Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ *auch nur eine Basis* (8) von der im Satz 3 angegebenen Eigenschaft, so läßt sich diese zu einer Basis von $\mathfrak{G}$ ergänzen, mithin ist $\mathfrak{H}$ ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß man eine Matrix $||a'_{ik}||$, die der Bedingung im Satz 3 genügt, durch Einschalten von $n - m$ neuer Zeilen immer zu einer quadratischen Matrix mit der im Satz 2 angegebenen Eigenschaft ergänzen kann. Diese Ergänzung läßt sich folgendermaßen durchführen. Es genügt offenbar den Fall betrachten, wenn die Determinante Δ'_j gebildet aus den ersten m_j-Spalten im Diagonalkästchen K'_{jj} durch p nicht teilbar ist [6]). Fügen wir dann zu den m_j Zeilen der j-ten „Zone" der Matrix $||a'_{ik}||$ noch $n_j - m_j$ neue Zeilen (bestehend aus einem einzigen 1, sonst lauter 0) nach folgender Anordnung hinzu:

---

[6]) Dies kann man nämlich durch Spaltenumordnung in $||a'_{ik}||$ (innerhalb der einzelnen „Kästchenspalten"!) immer erreichen.

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \boxed{\Delta'_j \quad \vdots \quad\quad} & \cdots \\ & \ldots 0 \;\; 1 \;\; 0 \ldots 0 \ldots & \\ & \ldots 0 \;\; 0 \;\; 1 \ldots 0 \ldots & \\ & \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \\ & \ldots \qquad\qquad 1 \;\; 0 \ldots & \end{array}$$

(Das Rechteck enthält das Kästchen K'_{jj}.) So erhalten wir eine quadratische Matrix, die offenbar der Bedingung im Satz 2 genügt, denn die Determinante ihres j-ten Diagonalkästchens ist gleich $\Delta'_j \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Aus dem so bewiesenen Satz 3 folgt nun leicht (im Spezialfall $r = 1$ einer regulären Gruppe $\mathfrak{G}$) die Richtigkeit des Satzes 1. Gesetzt nämlich, es sei für die Basis (8) von $\mathfrak{H}$

$$(B'_1) = (B'_2) = \cdots = (B'_m) = p^{\alpha} \;, \qquad (\alpha = \alpha_1) \;, \quad (m < n) \;^{5)} \;, \tag{9}$$

so müssen wir nur zeigen, daß die Matrix $||a'_{ik}||$ eine durch p nicht teilbare Determinante m-ter Ordnung enthält (da sie im Fall $r = 1$ nur „aus einem einzigen Kästchen besteht"). Daraus folgt nach Satz 3, daß $\mathfrak{H}$ ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$ ist. Wäre die Behauptung falsch, so ist z. B.

$$d'_s = \begin{vmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{s1} & \ldots & a'_{ss} \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod{p} \;, \qquad s < m \;, \tag{10}$$

dagegen jede, in der Matrix $||a'_{ik}||$ enthaltene Determinante von der Ordnung $s + 1$ durch p teilbar. Dann erhielten wir

$$p^{\alpha-1} \begin{vmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1s} & B'_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a'_{s1} & \ldots & a'_{ss} & B'_s \\ a'_{m1} & \ldots & a'_{ms} & B'_m \end{vmatrix} = 0 \;. \tag{11}$$

Dies folgt nämlich durch Einsetzen der in (8) gegebenen Werte von B'_i, denn es läßt sich dann diese Determinante auf n solche zerspalten, von denen die s ersten gleich 0 sind, die $n - s$ letzten aber nach Voraus-

setzung durch p teilbar sind. Durch Entwicklung von (11) nach der letzten Spalte entsteht eine Gleichung

$$p^{\alpha-1} d'_s B'_m + \cdots = 0 \ ,$$

welche der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Basiselemente $B'_1, \ldots, B'_m$ wegen (9) und (10) widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, daß $s = m$ ist, w. z. b. w.

Die Richtigkeit der anderen Aussage des Satzes 1 folgt so. Hat $\mathfrak{G}$ zwei verschiedene Invarianten p^{α_1}, p^{α_2} $(\alpha_1 > \alpha_2)$, so ist in (1) $(p^{\alpha_1-\alpha_2} A_1) = p^{\alpha_2}$, d. h. die zyklische Untergruppe $\mathfrak{H} = \{p^{\alpha_1-\alpha_2} A_1\}$ genügt der Bedingung (1), nicht aber der Bedingung des Satzes 3; (1 Kästchen, $m_1 = 1$, jedes Element, d. h. jede Determinante erster Ordnung durch p teilbar). Folglich ist $\mathfrak{H}$ kein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$.

Aus Satz 1 erhält man unmittelbar eine andere Lösung unseres Hauptproblems, nämlich den

Satz 4 [7]. *$\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$, falls beide Gruppen eine direkte Zerlegung*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_l \ , \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \cdots + \mathfrak{H}_l$$

in lauter reguläre Gruppen zulassen, wobei $\mathfrak{H}_i \subseteqq \mathfrak{G}_i$ ist [8]*, und $\mathfrak{H}_i$ in Verbindung mit $\mathfrak{G}_i$ der Bedingung* (1) *genügt* $(i = 1, \ldots, l)$.

(Eingegangen den 20. Januar 1948.)

Bemerkungen. Als ich meine Arbeit schon fertig hatte, habe ich bemerkt, daß sich ein Kriterium für die direkten Teiler einer endlichen Abelschen p-Gruppe auch aus einem Satz von *H. Prüfer* (Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift 17, 1923, S. 35—61.) gewinnen läßt. Prüfer betrachtet in seiner Arbeit Abelsche Gruppen mit (endlichvielen oder) abzählbar

---

[7]) Dieser Satz ist praktisch nicht so brauchbar als Satz 3, ermöglicht aber einen tiefen Einblick in das Wesen der Sache. Andererseits ist er gültig für beliebige endliche Abelsche Gruppen (nicht nur für p-Gruppen).

[8]) Einige $\mathfrak{H}_i$ können offenbar gleich $\{0\}$ sein. Übrigens ist es klar, daß jede endliche Abelsche Gruppe eine solche „reguläre Zerlegung" besitzt.

unendlichvielen Elementen, in denen jedes Element eine Potenz einer festen Primzahl p zur Ordnung hat. Er nennt eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer solchen Gruppe $\mathfrak{G}$ eine „Servanzuntergruppe" von $\mathfrak{G}$, wenn für jedes Element H von $\mathfrak{H}$ die Gleichung $p^e X = H$ entweder in $\mathfrak{H}$ lösbar oder in $\mathfrak{G}$ unlösbar ist. Aus seinen allgemeineren Sätzen ergibt sich für den Spezialfall einer endlichen p-Gruppe $\mathfrak{G}$ folgendes Kriterium: $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein direkter Teiler von $\mathfrak{G}$, wenn sie eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Aus diesem schönen Resultat folgt unser Satz 1 unmittelbar.

Es sei noch erwähnt, daß sich unser Satz 2 auch aus den Sätzen 1, 2 in einer Arbeit von *K. Shoda* (Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Annalen 100, 1928, S. 674—686.) ableiten ließe.