Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1948)

Artikel: Sopra alcune curve covarianti delle linee piane.
Autor: Cattaneo, Nora
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18597

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sopra alcune curve covarianti delle linee piane

Di Nora Cattaneo, Lugano

Scopo di questa breve Nota è la definizione e uno studio sommario di alcune curve annesse, come covarianti, ad ogni linea piana algebrica e strettamente collegate con la polarità rispetto ad essa.

La considerazione di una particolarissima di tali curve conduce ad una dimostrazione assai notevole, per la relativa sua estrema semplicità, della formula di *Plücker* sul numero dei flessi; mentre l'applicazione alle quartiche piane ne fornisce varie proprietà interessanti: che dualmente si trasformano in altre per le curve di 4ª classe, e in particolare per le cubiche razionali.

1. — Sia data in un piano una curva C_n generale nel suo ordine n e su di essa un punto variabile P. Di P si considerino le polari r-esima ed s-esima rispetto alla C_n, con $r \neq s$. Ci si propone di trovare l'ordine n' del luogo dei loro punti comuni quando P varia su C_n.

A tale scopo su di una retta g generica del piano chiamo omologhi due punti A e A' quando appartengono rispettivamente alla polare r-esima e alla s-esima del punto P suddetto. Per il teorema fondamentale sulle polari[1]) si ha che se la polare r-esima di P rispetto alla C_n passa per A, la polare $(n-r)$-esima di A passa per P. La polare $(n-r)$-esima di A, che è di ordine r, incontra la C_n in nr punti P. Ciascuno di questi ha la polare s-esima che interseca g in $n-s$ punti A'. Il numero dei punti A' omologhi di A nella corrispondenza (α, α') fra A e A' è perciò:

$$\alpha' = nr(n-s) \ .$$

Con ragionamento analogo si trova:

$$\alpha = ns(n-r) \ .$$

La g interseca la curva cercata in n' punti che sono quelli in cui $A \equiv A'$, ossia sono i punti uniti nella corrispondenza considerata, della quale si

[1]) Per le proprietà delle curve polari, che qui e in seguito occorre di applicare, cfr. ad es.: *F. Enriques* e *O. Chisini*, Teoria geometrica delle equazioni, Vol. II.

hanno ora gli indici. Per il principio di corrispondenza di *Chasles*[2]) risulta quindi:

$$n' = ns(n - r) + nr(n - s) \ .$$

Il punto P assorbe due delle $(n - r)(n - s)$ intersezioni delle polari considerate, essendo queste entrambe tangenti in P alla curva C_n e quindi fra di loro. Il luogo cercato si spezza pertanto nella C_n, contata due volte, e in un'altra curva d'ordine $n' - 2n$: come altrimenti risulta dalla circostanza che, in base alla nota regola di *Zeuthen*[3]), si trova essere eguale a 2 la multiplicità di ciascuna delle n intersezioni di g con C_n nel gruppo degli $\alpha + \alpha'$ punti uniti della corrispondenza (α, α').

Concludendo si può enunciare il teorema:

Se un punto descrive una curva piana C_n generale d'ordine n le sue polari r-esima ed s-esima (con $r \neq s$) rispetto a C_n, tangenti nel punto stesso fra loro e alla C_n, si intersecano ulteriormente in un gruppo di:

$$(n - r)(n - s) - 2$$

punti il cui luogo è una curva $\Gamma_{r,s}$, covariante della C_n, di ordine:

$$n^2(r + s) - 2n(rs + 1) \ .$$

È ovvio che *la curva $\Gamma_{r,s}$ si può anche definire come il luogo dei punti le cui polari di ordini r ed s ($\neq r$), rispetto alla curva C_n, hanno una delle loro rs intersezioni appartenenti a C_n.*

2. — Se la C_n ha δ nodi e k cuspidi il problema trattato nel n. 1 è facilmente risolto nel caso di $s = n - 1$, ossia quando una delle due polari è la tangente in P alla C_n.

Conservando le notazioni precedenti si osserva che per ogni punto A si hanno ancora nr punti P e che ogni punto P dà origine ad un unico punto A', come se la C_n fosse una curva generale. Invece il numero dei punti P la cui polare $(n - 1)$-esima passa per A' uguaglia, in questo caso, il numero delle tangenti da A' alla C_n ossia è dato dalla classe della C_n. Per la prima formula di *Plücker*[4]) si ha quindi che ogni A' proviene da:

---

[2]) Cfr. *C. Segre*, Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve (Bibliotheca mathematica, 6, 1892).

[3]) *H. G. Zeuthen*, Note sur le principe de correspondance (Bulletin des Sciences math., 5, 1873).

[4]) *J. Plücker*, Theorie der algebraischen Kurven, p. 211.

$$n(n-1) - 2\delta - 3k$$

punti P; mentre ad ogni punto P risultano associati $n - r$ punti A.

Ragionando ora come nel n. 1 si perviene al teorema:

Se un punto descrive una curva piana d'ordine n con δ nodi e k cuspidi la tangente in esso interseca la sua polare r-esima (con $r < n - 1$) rispetto a C_n ulteriormente in un gruppo di $n - r - 2$ punti, il cui luogo è una curva Θ_r covariante della C_n, di ordine:

$$n(n-2)(n-r+1) - (n-r)(2\delta + 3k) \ .$$

Se $\delta = k = 0$ la Θ_r diviene la $\Gamma_{r,n-1}$ del teorema del n. 1.

Osservazione I. — È noto che la polare r-esima di un punto P rispetto ad una curva C_n è il luogo del gruppo G'_{n-r} polare d'ordine $n - r$ di P rispetto al gruppo G_n delle intersezioni di C_n con una retta g variabile per P. Quando P è un punto di C_n, e g la relativa tangente, il gruppo G'_{n-r} consta, come si può facilmente verificare, del punto doppio P, pure doppio per G, e del gruppo polare d'ordine $n - r - 2$ dello stesso punto P rispetto al gruppo G_{n-2} delle ulteriori intersezioni della tangente in P con la C_n. Quindi:

La curva Θ_r è il luogo del gruppo polare r-esimo di un punto P variabile sulla curva C_n rispetto al gruppo delle $n - 2$ ulteriori intersezioni di C_n con la tangente in P.

Osservazione II. — Se M è un punto di Θ_r, per M passano la tangente a C_n in un punto P e la polare r-esima di P rispetto a C_n. Ne segue che per P passano la prima polare e la polare d'ordine r di M. Pertanto:

La curva Θ_r è il luogo di un punto variabile in modo che la sua polare d'ordine r rispetto alla curva C_n passa per il punto di contatto di una almeno delle tangenti da esso a C_n.

3. — Riprendendo in considerazione il caso del n. 2, in cui la C_n ha δ nodi e k cuspidi, ed è $s = n - 1$, si supponga in particolare $r = n - 2$. Allora l'intersezione della tangente a C_n in un punto generico P con la conica polare di P si riduce al punto P stesso contato due volte. Sembrerebbe pertanto che l'ordine del luogo cercato Θ_{n-2} dovesse risultare nullo. Si trova invece, applicando il teorema del n. 1, che esso vale:

$$3n(n-2) - 4\delta - 6k \ .$$

Ciò avviene perchè in certi punti la conica polare si spezza in due rette; tali punti sono:

1) i δ nodi, in cui l'intersezione cercata è data dalle due tangenti principali: poichè ciascuna di queste fa parte della conica polare di ogni nodo;
2) le k cuspidi, in cui l'intersezione è data dalla tangente cuspidale contata due volte: giacchè a questa stessa retta doppia si riduce la conica polare di ogni cuspide;
3) gli i flessi, in cui l'intersezione è data dalla tangente d'inflessione: che infatti fa parte della conica polare di ogni flesso.

Il luogo cercato è, nel caso in esame, l'insieme di tali tangenti. Il loro numero uguaglia il suo ordine. Quindi deve essere:

$$2\delta + 2k + i = 3n(n-2) - 4\delta - 6k$$

ossia:

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k \ .$$

Resta così stabilita una dimostrazione semplicissima della seconda formula di Plücker[5]).

4. — Giova ora applicare il risultato generale del n. 2 alle quartiche piane. Per una tale C_4 ha interesse unicamente la curva covariante Θ_1 ($r = 1$). Tenendo conto dell'osservazione I del n. 2 si può, come corollario (per $n = 4$ ed $r = 1$) del teorema dello stesso n. 2, enunciare:

Data una quartica C_4, con δ nodi e k cuspidi, il luogo del coniugato armonico di un suo punto variabile P rispetto alle ulteriori intersezioni di essa con la tangente in P è una curva Θ_1 di ordine:

$$32 - 6\delta - 9k \ .$$

Introducendo della C_4 il genere:

$$p = 3 - \delta - k$$

si ha che:

L'ordine della curva Θ_1, covariante suddetto di una C_4 di genere p, è:

$$14 + 6p - 3k \ .$$

---

[5]) Come è risaputo, le più notorie dimostrazioni della suddetta formula di *Plücker* (a differenza di quelle delle altre) fanno capo alla considerazione dell'Hessiana e del relativo comportamento nei punti doppi della curva C_n; oppure al teorema di *Riemann* sull'invarianza del genere per trasformazioni birazionali, applicato alla C_n e al suo inviluppo aderente.

Così per una quartica generale ($p = 3$, $k = 0$) l'ordine di Θ_1 è 32; mentre è 14 per una C_4 razionale senza cuspidi; ed è 20 per una C_4 ellittica pure senza cuspidi.

La Θ_1 risulta di ordine minimo 5 per le quartiche tricuspidali[6]).

5. — Se M è un punto improprio di Θ_1, deve essere M il coniugato armonico di un punto P di C_4 rispetto alle intersezioni ulteriori A, B di C_4 con la tangente in P: in altri termini è P punto medio di AB. Quindi, richiamando l'ordine di Θ_1:

Per ogni quartica piana C_4 di genere p con k cuspidi, senza particolari relazioni con la retta impropria, esistono:

$$14 + 6p - 3k$$

corde caratterizzate dalla proprietà di essere tangenti a C_4 nel rispettivo punto medio.

Si può ancora osservare che:

La curva Θ_1 passa per i punti medi delle 4 corde della quartica appartenenti agli asintoti di C_4.

Si riconosce pure facilmente che:

La curva Θ_1 di ordine 32 covariante (n. 4) *di una quartica generale, passa semplicemente per i punti di contatto delle 28 tangenti doppie di C_4 ed ha con la C_4 un incontro tripunto in ciascuno dei 24 flessi della C_4 stessa.*

Infatti se AB è una corda di C_4 tangente a C_4 in P, ed è Q il coniugato armonico, sulla curva Θ_1, di P rispetto ai punti A e B, quando Q appartiene a C_4 non può essere che $Q \equiv P$, oppure $Q \equiv A$ o infine $Q \equiv B$: nel primo caso P è un flesso di C_4, mentre negli altri due la retta AB è una bitangente di C_4 coi punti di contatto P e $A \equiv B$.

Si conclude che la curva Θ_1 incontra la C_4 solo nei flessi e nei punti di contatto delle tangenti doppie. Se allora α e β sono le multiplicità d'intersezione di C_4 e Θ_1 nei flessi e in tali punti di contatto, dev'essere:

$$24\alpha + 56\beta = 128 \ .$$

Ne segue $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

---

[6]) Relativamente a tale caso particolare v. *A. Longhi*, Sulle quartiche piane tricuspidali (Giornale di Matematiche, Vol. 63, 1925), § 2.

6. — Dualizzando (ad es. mediante la polarità rispetto ad una conica) i risultati del n. 4 si ottiene il teorema seguente:

Sia Φ una curva di 4ª classe dotata di τ tangenti doppie e di i flessi, quindi di ordine:

$$12 - 2\tau - 3i$$

e di genere:

$$p = 3 - \tau - i \ .$$

Se m è una tangente variabile di Φ, dal suo punto di contatto escono 2 ulteriori tangenti a Φ. Allora la retta coniugata armonica di m rispetto a tali tangenti inviluppa una curva di classe:

$$32 - 6\tau - 9i \ ,$$

eguale a:

$$14 + 6p - 3i \ .$$

Per $i = 3$ e $\tau = 0$ il teorema concerne la cubica razionale generale.

(Reçu le 10 mai 1947.)