Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 21 (1948)

Artikel: Ein Mittelwertsatz für Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18596

Ein Mittelwertsatz für Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Von Heinz Huber, Zürich

I.

Zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten einer reellen differenzierbaren Funktion $f(x)$ besteht bekanntlich eine interessante Beziehung, welche den Inhalt des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bildet. Man könnte versucht sein, diesen Mittelwertsatz folgendermaßen auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu übertragen:

$f(z)$ sei regulär in $\mathfrak{K}$:

$$|z - z_0| < r \ .$$

Dann gibt es zu jedem $z \in \mathfrak{K}$ ein

$$\xi = z_0 + \vartheta(z - z_0) \qquad 0 < |\vartheta| < 1 \ ,$$

derart, daß

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(\xi) \tag{I}$$

Daß dieser Satz nicht richtig ist, zeigt schon die Funktion e^z. (Man nehme $z_0 = 0$, $z = 2\pi i$!) Weil aber die differenzierbaren Funktionen einer komplexen Veränderlichen bedeutend mehr innere Gesetzmäßigkeiten aufweisen als diejenigen einer reellen Veränderlichen, so ist zu vermuten, daß auch bei komplexen Funktionen enge Zusammenhänge zwischen Ableitung und Differenzenquotient bestehen. In der Tat hat Dieudonné[1]) eine interessante Beziehung zwischen den Bildgebieten von Ableitung und Differenzenquotient gefunden, und Montel hat einen Satz[2]) bewiesen, der gewissermaßen als Umkehrung eines Mittelwertsatzes anzusehen ist.

---

[1]) [2] p. 354 (Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.)

[2]) [3] p. 17.

Dies alles drängt die Frage auf, ob unter gewissen Einschränkungen nicht doch ein Analogon zum reellen Mittelwertsatz auch für Funktionen einer komplexen Veränderlichen gilt. Wir stellen uns folgendes Problem: $f(z)$ sei regulär für $z = z_0$. Gibt es dann eine Umgebung $\mathfrak{B}$ von z_0 derart, daß

1. zu jedem $z \in \mathfrak{B}$ ein ξ existiert, welches die Gleichung (I) erfüllt,

2. über die Lage dieses ξ eine übersichtliche Aussage gemacht werden kann, welche die Bezeichnung „Mittelwertsatz" verdient?

Eine erste Orientierung ergibt sich sofort mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen:

a) Wenn $f''(z_0) \neq 0$ ist, so gibt es zwei Umgebungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ von z_0, so daß gilt: Zu jedem $z \in \mathfrak{B}$ existiert genau ein $\xi \in \mathfrak{B}^*$, welches die Gleichung (I) erfüllt.

b) Wenn $f''(z_0) = 0$ ist, so gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{B}^*$ von z_0 eine Umgebung $\mathfrak{B}$ von z_0, so daß gilt: Zu jedem $z \in \mathfrak{B}$ existieren mehrere $\xi \in \mathfrak{B}^*$, welche die Gleichung (I) erfüllen.

Es scheint plausibel, daß im Falle b kaum übersichtliche Resultate über die Lage der ξ zu erhoffen sind. Damit dürfte motiviert sein, daß wir im folgenden $f''(z_0) \neq 0$ annehmen. — Ist diese Voraussetzung aber erfüllt, dann gibt es eine Kreisscheibe

$$\mathfrak{S}: \quad |z - z_0| < S \qquad S > 0 ,$$

derart, daß

$$\Re\left[1 + (z - z_0)\frac{f'''(z)}{f''(z)}\right] > 0 \text{ für } z \in \mathfrak{S} .$$

Bekanntlich bildet dann $f'(z)$ diese Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ und alle ganz in ihr liegenden Kreisscheiben schlicht und konvex ab[3]). In Abschnitt II wird gezeigt, daß innerhalb einer solchen Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ tatsächlich ein Analogon im oben präzisierten Sinne zum reellen Mittelwertsatz gilt: Zu jedem $z \in \mathfrak{S}$ gibt es genau ein $\xi = \xi(z) \in \mathfrak{S}$, welches die Gleichung (I) erfüllt (Satz 1), und es können übersichtliche geometrische Aussagen über die Lage dieses ξ gemacht werden. (Sätze 1, 3, 4.) Es ergibt sich auch, daß $\xi = \xi(z)$ eine in $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion ist (Satz 2). Ferner wird ge-

---

[3]) [1] p. 513, [5] p. 109—111.

zeigt, daß die Beschränkung unserer Untersuchungen auf Kreisscheiben $\mathfrak{S}$ mit der genannten Eigenschaft nicht etwa künstlich, sondern dem gestellten Problem durchaus angemessen ist.

Als wesentliches Hilfsmittel bei unsern Beweisen dient ein sonst sehr wenig benutzter Integralsatz von Weierstraß[4]). Er sei daher hier formuliert in der speziellen Fassung, in welcher wir ihn benutzen werden:

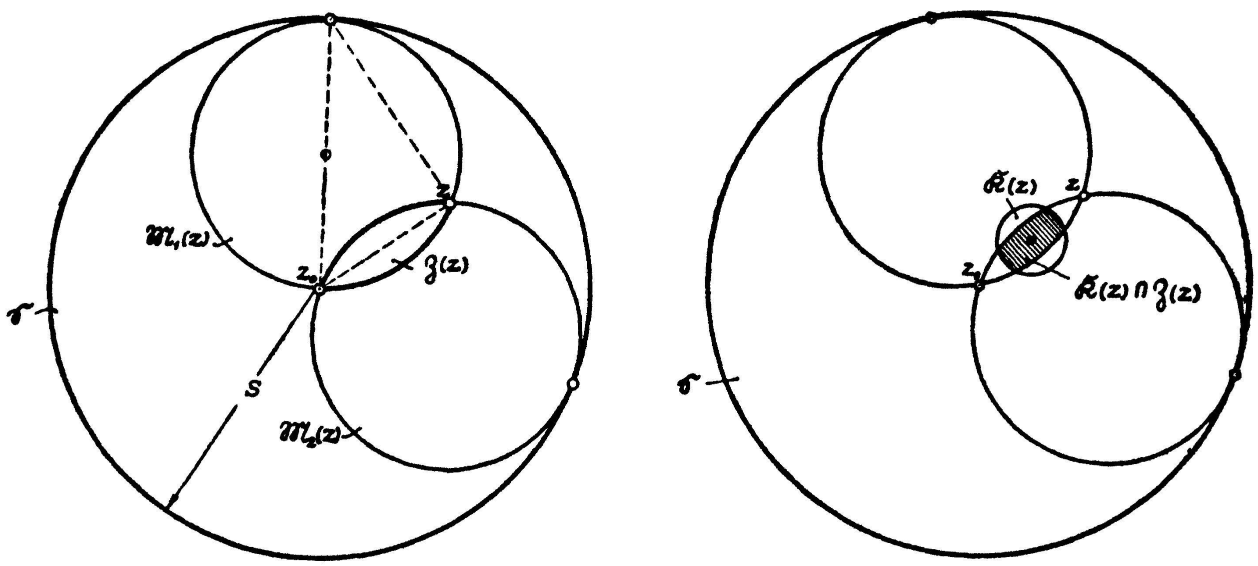
Es sei $\mathfrak{G}$ ein abgeschlossenes konvexes Gebiet der w-Ebene, $g(t) = u(t) + iv(t)$ eine im Intervall $a \leqslant t \leqslant b$ stetige Funktion, und es gelte: $w = g(t) \in \mathfrak{G}$ für $a \leqslant t \leqslant b$. — Dann gehört der Punkt

$$J = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)\, dt$$

dem abgeschlossenen Gebiete $\mathfrak{G}$ an.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. W. Saxer meinen besten Dank aussprechen für seine wertvollen Ratschläge während der Abfassung dieser Arbeit.

II.



Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die offene Kreisscheibe $|z - z_0| < S$, $S > 0$. Es sei $z \in \mathfrak{S}$, $z \neq z_0$. Dann gibt es genau zwei (abgeschlossene) Kreisscheiben $\mathfrak{M}_1(z)$, $\mathfrak{M}_2(z)$ mit folgender Eigenschaft: Ihr Rand geht durch die Punkte z_0 und z und berührt den Rand von $\mathfrak{S}$. Der Durchschnitt

$$\mathfrak{M}_1(z) \cap \mathfrak{M}_2(z) = \mathfrak{Z}(z) \subset \mathfrak{S}$$

---

[4]) [4] p. 66—68.

ist ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit den Ecken z_0 und z (vgl. Fig. 1). Mit Hilfe der eben eingeführten Bezeichnungen formulieren wir jetzt den

Satz 1. Die Funktion $f(z)$ sei regulär auf der Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ und ihre Ableitung $f'(z)$ bilde $\mathfrak{S}$ auf ein konvexes Gebiet ab. Dann gibt es zu jedem $z \in \mathfrak{S}$ genau einen Wert $\xi = \xi(z) \in \mathfrak{S}$ derart, daß

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(\xi)$$

und es gilt:

$$\xi(z) \in \mathfrak{Z}(z), \quad \text{wenn} \quad z \neq z_0,$$

$$\xi(z_0) = z_0.$$

Beweis. 1. Die Ableitung $w = f'(z)$ bildet $\mathfrak{S}$ auf ein Gebiet $\mathfrak{S}^*$ in der w-Ebene ab, welches konvex, also a fortiori schlicht ist. Daher gibt es zu jedem $w \in \mathfrak{S}^*$ genau einen Wert $z = \varphi(w) \in \mathfrak{S}$, so daß $f'(z) = w$ ist, und die so definierte Funktion $\varphi(w)$ ist regulär in $\mathfrak{S}^*$.

2. Es sei nun $z' \neq z_0$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{K}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, welche die Punkte z_0 und z' enthält und ganz in $\mathfrak{S}$ liegt. $\mathfrak{K}$ wird durch $w = f'(z)$ auf ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{S}^*$ abgebildet, welches ebenfalls konvex ist [5]).

3. Wie man sich sofort überzeugt, gilt

$$\Omega = \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} = \int_0^1 f'\big(z_0 + t(z' - z_0)\big)\,dt$$

wobei über das reelle Intervall $0 \leqslant t \leqslant 1$ zu integrieren ist. Wenn nun die reelle Variable t von 0 bis 1 läuft, so beschreibt der Punkt $z_0 + t(z' - z_0)$ die Strecke $[z_0, z'] \subset \mathfrak{K}$. Folglich beschreibt der Punkt

$$w = f'\big(z_0 + t(z' - z_0)\big)$$

einen Kurvenbogen, welcher ganz im abgeschlossenen und konvexen Gebiet $\mathfrak{K}^*$ liegt. Nach dem in der Einleitung erwähnten Weierstraßschen Integralsatz [6]) liegt daher auch der Punkt Ω in $\mathfrak{K}^*$.

---

[5]) [5] p. 110.

[6]) Vgl. auch [6] p. 362.

4. Aus $\Omega \in \mathfrak{K}^*$ folgt natürlich erst recht $\Omega \in \mathfrak{S}^*$. Deshalb gibt es nach 1. genau einen Wert $\xi = \varphi(\Omega) \in \mathfrak{S}$ derart, daß

$$f'(\xi) = \Omega = \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0}$$

wird, und dieses ξ muß, da Ω in $\mathfrak{K}^*$ liegt, sogar in $\mathfrak{K}$ liegen.

5. Es gilt sogar: $\xi \in \mathfrak{M}_1(z')$. In der Tat: Würde der Punkt $\xi \in \mathfrak{S}$ nicht in $\mathfrak{M}_1(z')$ liegen, so könnte man — wie leicht einzusehen ist — eine abgeschlossene Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ finden, welche ganz in $\mathfrak{S}$ liegt und die Punkte z_0 und z' enthält, nicht aber den Punkt ξ. Das ist aber ein Widerspruch zum bisher Bewiesenen. — Ebenso zeigt man, daß $\xi \in \mathfrak{M}_2(z')$. Also ist $\xi \in \mathfrak{M}_1(z') \cap \mathfrak{M}_2(z') = \mathfrak{Z}(z')$, q. e. d.

6. Es bleibt uns noch der Fall $z = z_0$. Das zugehörige $\xi(z_0)$ muß dann der Gleichung

$$\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)_{z = z_0} = f'(\xi) ,$$

d. h. der Gleichung $f'(z_0) = f'(\xi)$ genügen. Wegen **1.** ist aber $\xi = z_0$ das einzige $\xi \in \mathfrak{S}$, das diese Bedingung erfüllt. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Aus unserer Überlegung folgt noch

Satz 2. $\xi = \xi(z)$ ist eine in $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion. In der Tat: Für $z \in \mathfrak{S}$ gilt ja

$$\xi(z) = \varphi\big(\Omega(z)\big) , \qquad \Omega(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

Nun ist aber $w = \Omega(z)$ eine in $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion, die dort nur Werte annimmt, welche nach **3.** und **6.** in den Regularitätsbereich $\mathfrak{S}^*$ von $\varphi(w)$ fallen. Daraus folgt aber die Behauptung. Wenn man beachtet, daß dank der über $f'(z)$ gemachten Voraussetzung $f''(z_0) \neq 0$ ist, so kann man mit Hilfe von (1) leicht schließen, daß

$$\xi'(z_0) = \tfrac{1}{2} . \tag{2}$$

Wegen Satz 2 kann man nun $\xi(z)$ in eine überall in $\mathfrak{S}$ konvergente Potenzreihe mit dem Mittelpunkt z_0 entwickeln:

$$\xi(z) = \xi(z_0) + \xi'(z_0)(z - z_0) + \cdots = z_0 + \tfrac{1}{2}(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Hieraus entnehmen wir sofort:

a) Die Funktion

$$\Theta(z) = \frac{\xi(z) - \frac{1}{2}(z_0 + z)}{z - z_0} = c_2(z - z_0) + \cdots$$

ist regulär in $\mathfrak{S}$ und es ist $\Theta(z_0) = 0$.

Es gilt ferner:

b) $$|\Theta(z)| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathfrak{S}\ .$$

In der Tat: Beachtet man, daß $\frac{1}{2}(z_0 + z)$ der Mittelpunkt der Strecke $[z_0, z]$ ist, so folgt aus Satz 1 sofort

$$|\xi(z) - \tfrac{1}{2}(z_0 + z)| \leqslant \tfrac{1}{2}|z - z_0|, \quad \text{d. h.} \quad |\Theta(z)| \leqslant \tfrac{1}{2}. \quad \text{q. e. d.}$$

Die Eigenschaften a und b erlauben uns, $\Theta(z)$ mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas abzuschätzen. Wir finden

$$|\Theta(z)| \leqslant \frac{1}{2S}|z - z_0|\ , \quad z \in \mathfrak{S}\ ,$$

oder wenn wir wieder zu $\xi(z)$ zurückkehren:

$$|\xi(z) - \tfrac{1}{2}(z_0 + z)| \leqslant \frac{1}{2S}|z - z_0|^2, \quad z \in \mathfrak{S}\ .$$

Satz 3. Mit den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

$$|\xi(z) - \tfrac{1}{2}(z_0 + z)| \leqslant \frac{1}{2S}|z - z_0|^2, \quad z \in \mathfrak{S}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}(z)$ die (abgeschlossene) Kreisscheibe mit dem Radius $\frac{1}{2S}|z - z_0|^2$ und dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(z_0 + z)$. Kombinieren wir jetzt die Sätze 1 und 3, so folgt

Satz 4. Mit den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

$$\text{wenn} \quad z \in \mathfrak{S}, \quad \text{so ist} \quad \xi(z) \in \mathfrak{Z}(z) \cap \mathfrak{K}(z)\ .$$

Man überzeugt sich sofort, daß Satz 4 eine Verschärfung sowohl von Satz 1 als auch von Satz 3 darstellt (vgl. Fig. 2).

Bemerkungen. 1. Daß wir unsere Untersuchungen auf Kreisscheiben $\mathfrak{S}: |z - z_0| < S$ beschränken, welche durch $f'(z)$ konvex abgebildet werden, ist nicht etwa eine künstliche Einschränkung, sondern ist vielmehr in der Natur der Sache begründet. Es existieren nämlich Funktionen $f(z)$, bei welchen das zugehörige $\xi(z)$ auf dem Rande von $\mathfrak{S}$ Singularitäten (sogar Verzweigungspunkte) aufweist.

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = S \log \frac{S}{S - (z - z_0)} - (z - z_0) \ , \ S > 0 \ ; \ f(z_0) = 0 \tag{3}$$

ist offenbar in $\mathfrak{S}$ regulär, und ihre Ableitung

$$w = f'(z) = \frac{z - z_0}{S - (z - z_0)}$$

bildet $\mathfrak{S}$ auf die Halbebene $\Re(w) > -\frac{1}{2}$, also auf ein konvexes Gebiet ab. Die der Gleichung

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(\xi)$$

genügende und in $\mathfrak{S}$ reguläre Funktion $\xi(z)$ kann hier explicite angegeben werden:

$$\xi(z) = z_0 + S - (z - z_0) \left[\log \frac{S}{S - (z - z_0)} \right]^{-1}, \quad \xi(z_0) = z_0 \ . \tag{4}$$

Dieses $\xi(z)$ hat aber offenbar in $z = z_0 + S$, also auf dem Rande von $\mathfrak{S}$, einen logarithmischen Verzweigungspunkt. q. e. d.

2. Über die Schärfe der entwickelten übersichtlichen Abschätzungen von $\xi(z)$ gibt uns folgende kleine Betrachtung einen gewissen Aufschluß: Wenn

$$\lim_{r \to S - 0} |\xi(z_0 + re^{i\varphi}) - z_0| \ , \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

existiert [7]), so folgt aus unsern Sätzen, daß dieser Limes $\leqslant S$ ist. Die Funktion (4) zeigt nun gerade, daß dieser Limes nicht besser (nach oben) abgeschätzt werden kann. In der Tat folgt ja aus (4) sofort

$$\lim_{r \to S - 0} |\xi(z_0 + r) - z_0| = S \ .$$

---

[7]) Dies ist für fast alle φ der Fall, da ja $\xi(z)$ nach Satz 1 beschränkt ist.

3. Es ist ferner bemerkenswert, daß es die gewonnenen Abschätzungen erlauben, bei einer einfachen Klasse von Funktionen das zugehörige $\xi(z)$ vollständig zu bestimmen. Wir beweisen nämlich mit alleiniger Benutzung der Sätze 1 und 3 folgenden

Satz 5. Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion; ihre Ableitung $f'(z)$ bilde jede Kreisscheibe $|z - z_0| < r$, $r > 0$ auf ein konvexes Gebiet ab. Dann gilt:

1. Zu jedem endlichen z gibt es genau einen endlichen Wert $\xi = \xi(z)$ derart, daß

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(\xi)$$

2. Es ist $\xi(z) = \frac{1}{2}(z_0 + z)$.

Beweis. Es sei $z' \neq z_0$ [8]). Wir betrachten die Kreisscheiben

$$\mathfrak{K}_n: \ |z - z_0| < r_n, \quad r_n = 2n\,|z' - z_0|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dann ist

a) $z' \in \mathfrak{K}_n$ für $n \geqslant 1$

und nach Voraussetzung gilt

b) $f'(z)$ bildet $\mathfrak{K}_n$, $n \geqslant 1$, auf ein konvexes Gebiet ab.

Aus a und b folgt nach Satz 1: Es gibt genau einen Wert $\xi = \xi(z') \in \mathfrak{K}_n$ derart, daß

$$\frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} = f'(\xi)$$

Da dies für alle $n \geqslant 1$ gilt und weil $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so ist damit Behauptung 1 bewiesen.

Aus a und b folgt ferner nach Satz 3:

$$|\xi(z') - \tfrac{1}{2}(z_0 + z')| \leqslant \frac{|z' - z_0|^2}{2 r_n} = \frac{|z' - z_0|}{4n}, \quad n \geqslant 1 .$$

---

[8]) Für $z = z_0$ ist die Behauptung trivial.

Hieraus folgt, da die linke Seite von n unabhängig ist, $\xi(z') = \frac{1}{2}(z_0 + z')$. Damit ist auch Behauptung 2 bewiesen. Dieser Satz 5 läßt sich natürlich sofort rechnerisch verifizieren, wenn man bedenkt, daß jede Funktion, welche seine Voraussetzungen erfüllt, ein Polynom zweiten Grades ist.

4. Ich vermute, daß (unter den Voraussetzungen von Satz 1) die zu $f(z)$ gehörige Funktion $\xi(z)$ die Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ *schlicht* abbildet. Ein Beweis für den Fall, daß die Koeffizienten der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ reell sind, wird andernorts erscheinen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *L. Bieberbach:* Enzyklopädie — Artikel II C 4.

[2] *J. Dieudonné:* Recherches sur quelques problèmes... (Annales Ec. Norm. Sup. (3), t. 48 (1931).

[3] *J. Favard:* Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes (Actualités sc. et industr. 302 (1936).

[4] *E. Goursat:* Cours d'analyse mathématique, t. II.

[5] *E. Study:* Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft II, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke (1913).

[6] *G. Valiron:* Théorie des fonctions (1942).

(Eingegangen den 2. Mai 1947.)