Über die Stirlingsche Reihe

Von F. V. Atkinson, Oxford

1. Wegen ihrer mannigfaltigen Anwendungen ist eine einfache Herleitung der Stirlingschen Reihe sehr zu wünschen. Deshalb mag die Herleitungsweise, die ich im folgenden mitteile, nicht ganz ohne Interesse erscheinen. Ich habe mich auf den Fall der Gamma-Funktion beschränkt, doch läßt sich die Methode leicht auf allgemeinere Fälle des Summationsproblems übertragen.[1]) Es wird gezeigt, daß die Euler-Maclaurinsche Summenformel als eine Art Umkehrung der Taylorschen Reihe betrachtet werden kann.

Ich beweise den folgenden

Satz. Es sei

$$h = h(z) = \min \{|z|, |z+1|, |z+2|, \dots\}$$

und ferner $h > 3$. Dann ist

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + C + \sum_{n=2}^{m} (-1)^n \frac{B_n}{n(n-1)} z^{1-n} + R_m(z) \;,$$

wobei

$$| R_m(z) | < c_m \, | z | \, h^{-m-1} \;.$$

Hier bedeuten C, die c_m und später a_m, b_m gewisse positive Konstanten; B_n ist die n-te Bernoullische Zahl. In der Tat ist

$$\chi\, (e^{\chi} - 1)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \chi^n \;.$$

Der Wert von $\lg z$ werde durch die Forderung

$$| \operatorname{arc} z | < \pi$$

bestimmt. Es wird folgendes über die Gamma-Funktion benutzt:

---

[1]) Vgl. *E. Pascal*, Repertorium der höheren Analysis (Teubner, Leipzig 1929, Bd. I 3, S. 1221 ff.).

(I) $\Gamma(z)$ ist eindeutig regulär, außer den Punkten $0, -1, -2, \ldots,$

(II) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,

(III) $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+n)^{-2}$,

(IV) $\Gamma(z)$ reell für reelle z.

Bekanntlich ist Gleichung (III) durch die schwächere Bedingung

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) \to 0 \quad \text{als} \quad z \to \infty$$

ersetzbar.

Da die Gamma-Funktion durch diese vier Eigenschaften nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt wird, so muß man die Bestimmung der Konstante C auf anderen Überlegungen beruhen lassen. Zu diesem Zwecke kann z. B. jede der beiden Gleichungen

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\ , \quad \Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2z}\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2z)$$

dienen.

2. Der Kürze halber bezeichne ich $\log \Gamma(z)$ mit $F(z)$ und mit $F^{(n)}(z)$ deren n-te Ableitung. Dann ist

$$F(z+1) - F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z) = \log z\ ,$$

vorausgesetzt, daß $h(z) > 1$ ist. Daraus folgt

$$F(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n-1)}(z) = z \log z - z + C$$

durch Integration längs einer Kurve, worauf stets $h(z) > 1$ ist. Durch r-malige Differentiation ergibt sich ferner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n+r+1)}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^r \log z$$

und daher für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$F(z) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left\{ \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{\max(m,n)} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)\,!} \right\}$$
$$= z \log z - z + C + \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z\ .$$

Nun wähle ich die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ derart, daß für $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)!} = 0 \; .$$

Es ist somit

$$\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \, y^r\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \, y^{r-1}\right) \equiv 1 \; ,$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \, y^r = y(e^y - 1)^{-1} \; ,$$

und zwar

$$\alpha_r = \frac{B_r}{r!} \; , \qquad \alpha_1 = -\tfrac{1}{2} \; .$$

Es entsteht nach einiger Umformung

$$R_m(z) = \log \Gamma(z) - (z \log z - z) - C + \tfrac{1}{2} \log z - \sum_{r=2}^{m} \frac{B_r}{r!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z$$

$$= - \sum_{n=m+1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_r}{r!\,(n+1-r)!}\right) .$$

3. Der Beweis wird mit einer Abschätzung der Größen $F^{(n)}(z)$ beschlossen. Es ist, mit Berücksichtigung von Gleichung (III)

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \sum_{s=0}^{\infty} |z+s|^{-n} \; .$$

Es ist jedenfalls

$$|z+s| \geqslant |s| - |z| \; ,$$

und falls $s \geqslant 0$ ist

$$|z+s| \geqslant h(z) = h > 1 \; ,$$

woraus

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \Big(\sum_{0 \leqslant s \leqslant 2|z|+1} |z+s|^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} |z+s|^{-n} \Big)$$

$$\leqslant (n-1)! \Big(4|z| \, h^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} (\tfrac{1}{2}s)^{-n} \Big)$$

$$\leqslant (n-1)! \Big(4|z| \, h^{-n} + 2^n \int_{2|z|}^{\infty} y^{-n} \, dy \Big)$$

$$\leqslant A(n-1)! \, |z| \, h^{-n} \; ,$$

wobei A eine Weltkonstante ist. Folglich ist

$$|R_m(z)| \leqslant A\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-1)!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{|B_r|}{r!\,(n+1-r)!}\right) h^{-n}$$

$$\leqslant A\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{|B_1|}{n} + \sum_{r=2}^{m} \frac{n^r\,|B_r|}{r!}\right) h^{-n}$$

$$\leqslant a_m\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} h^{-n}\, n^m \,.$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß es ein b_m gibt, derart, daß für $n \geqslant 1$

$$n^m \leqslant b_m\, 2^n$$

gilt. Man hat hiernach mit $h > 3$

$$|R_m(z)| < a_m\, b_m\, |z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{-n}$$

$$= a_m\, b_m\, |z| \left(\frac{h}{2}\right)^{-m} \left(\frac{h}{2} - 1\right)^{-1},$$

so daß

$$|R_m(z)| < c_m\, |z|\, h^{-m-1}$$

wie behauptet.

(Eingegangen den 14. November 1947.)