Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1948)

Artikel: Sur les répartitions des suites de nombres réels.
Autor: Ammann, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18614

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les répartitions des suites de nombres réels

Par A. AMMANN, Genève

Résumé d'une thèse présentée à l'Université de Genève

1) **Définition 1.** *Nous dirons qu'une suite de fonctions convexes croissantes $x_i(t)$, définies sur le segment 01, forme une suite normale, si la dérivée à droite $x_i'^{+}(0)$ tend vers l'infini.*

Par exemple, a_i tendant vers l'infini, la suite $a_i\, t$ est une suite normale. Les suites normales jouissent de la propriété suivante:

Propriété 1. *α étant un nombre du segment 01 et $P(x)$ une fonction périodique intégrable*[1]) *quelconque de période ω on a*

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} P[x_i(t)]\, dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(x)\, dx \ .$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons :

$$P_i(t) = P[x_i(t)] \quad \text{et} \quad [P] = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(x)\, dx \ ,$$

de sorte qu'on pourra écrire la relation précédente sous la forme plus simple :

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} P_i(t)\, dt = [P] \ . \tag{1}$$

D'une manière plus générale on pourrait appeler *suite normale* toute suite de fonctions $x_i(t)$ qui vérifie l'égalité (1).

---

[1]) Nous entendons par là une fonction bornée, intégrable au sens de Riemann.

En posant

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_1^n P_i(t) \ ,$$

on voit facilement qu'elle entraîne celle-ci :

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_n(t)\, dt = [P] \ . \tag{2}$$

2) A chaque valeur de t il correspond une suite de nombres réels $x_i = x_i(t)$, et la suite $P_i = P(x_i)$ est déterminée complètement par sa répartition module ω. En effet, lorsque x_i et y_i ne diffèrent que par un multiple entier de ω, on a $P(x_i) = P(y_i)$ en vertu de la périodicité de $P(x)$. La moyenne arithmétique F_n des n premiers nombres P_i, en tant que moyenne des valeurs prises par la fonction $P(x)$ aux points d'abscisse x_i $(i = 1, \ldots, n)$, peut être rapprochée de la valeur moyenne $[P]$ de cette fonction.

Définition 2. *Lorsqu'on a pour toute fonction intégrable $P(x)$ de période ω*

$$\lim F_n = [P] \ , \tag{3}$$

la suite x_i est dite équirépartie (au point t) selon ω. Les suites normales généralement ne sont pas équiréparties pour toutes les valeurs de t.

Définition 3. *On dira qu'une suite x_i est unifiante au point t selon ω si pour toute fonction $P(x)$ intégrable et de période ω, on a*

$$\liminf F_n \leq [P] \leq \limsup F_n \ . \tag{4}$$

Indépendamment de toute suite x_i, on peut définir une suite infinie $P^{(k)}(x)$ de fonctions intégrables de période ω, donnant lieu à la propriété suivante :

Propriété 2. *Pour que la suite x_i soit unifiante, il suffit que les inégalités (4) soient vérifiées pour toutes les fonctions $P^{(k)}(x)$.*

A chaque fonction $P^{(k)}(x)$ il correspond, comme nous l'allons voir, un ensemble $T^{(k)}$ de valeurs de t qui est de mesure nulle, et hors duquel les relations (4) sont vérifiées relativement à la fonction $P^{(k)}(x)$.

A cause de la propriété 2, les relations (4) sont vérifiées pour toute fonction $P(x)$ hors de la réunion M des ensembles $T^{(k)}$, qui est encore de mesure nulle. Hors de M la suite x_i est donc unifiante.

Théorème 1. *Une suite normale $x_i(t)$ est unifiante presque partout.*

3) Il reste à démontrer qu'il correspond à chaque fonction $P^{(k)}(x)$, ou plus généralement à chaque fonction intégrable $P(x)$ de période ω, un ensemble T de valeurs de t qui est de mesure nulle et hors duquel les relations (4) sont vérifiées pour la fonction $P(x)$.

$P(x)$ étant maintenant une fonction déterminée, posons

$$F_n^*(t) = F_n(t) - [P] \ .$$

L'égalité (2) pourra s'écrire ainsi :

$$\lim \int_0^\alpha F_n^*(t)\, dt = 0 \ . \tag{5}$$

La suite des fonctions $F_n^*(t)$ jouit de propriétés remarquables :

1° Les fonctions $F_n^*(t)$ sont bornées dans leur ensemble.

2° Elles vérifient l'égalité (5) quel que soit le nombre α du segment 01.

On peut leur appliquer le lemme suivant :

Lemme 1. *Etant donné une suite infinie de fonctions sommables réelles $F_n(t)$ qui admettent sur le segment* 01 *une majorante fixe sommable, si l'on a pour tout α de ce segment*

$$\lim \int_0^\alpha F_n(t)\, dt = 0 \ ,$$

les inégalités suivantes sont alors vérifiées presque partout :

$$\liminf F_n(t) \leq 0 \leq \limsup F_n(t) \ . \tag{6}$$

L'application de ce lemme aux fonctions $F_n^*(t)$ envisagées plus haut fournit ces inégalités :

$$\liminf F_n(t) \leq [P] \leq \limsup F_n(t) \ . \tag{4}$$

Comme les précédentes, elles sont valables *presque partout*, et ceci achève de démontrer le théorème 1.

4) Quel que soit l'entier m, une suite x_i, unifiante pour le module ω, l'est aussi pour le module $\frac{\omega}{m}$. Si les inégalités (4) sont vérifiées pour toute fonction de période ω, elles le sont à plus forte raison pour toutes les fonctions de période $\frac{\omega}{m}$.

Définition 4. *Une suite x_i est unifiante totalement si elle l'est par rapport aux modules 1, 2, 3,... Elle est alors aussi unifiante par rapport à tout module ω rationnel.*

Théorème 2. *Tout suite normale $x_i(t)$ est unifiante totalement hors d'un ensemble de mesure nulle.*

D'après le théorème 1 il y a un ensemble de mesure nulle M_ω correspondant à chaque période. Si nous formons la réunion des ensembles M_ω, ω parcourant la suite des nombres entiers, l'ensemble obtenu, qui est toujours de mesure nulle, contient tous les points t pour lesquels la suite $x_i(t)$ n'est pas unifiante totalement.

On peut définir également l'équirépartition totale:

Définition 5. *Une suite équirépartie par rapport aux modules 1, 2, 3,... sera dite équirépartie totalement. Elle est alors équirépartie par rapport à tous les modules ω rationnels.*

Pour les suites normales particulières $x_i(t) = a_i t$, on a le théorème suivant:

Théorème 3. *Si la suite $a_i t$ est équirépartie presque partout module 1, elle est équirépartie totalement presque partout. Si elle n'est pas équirépartie module 1 presque partout, elle n'est équirépartie totalement que sur un ensemble de mesure nulle.*

En particulier, une suite $a_i t$ ne peut être équirépartie totalement que sur un ensemble de mesure 0 ou 1. On peut déduire ce théorème de quelques lemmes élémentaires.

Lemme 2[2]). *Sur le segment 01 un ensemble homogène mesurable (c'est-à-dire d'égale mesure spécifique) a toujours la mesure 0 ou 1.*

Lemme 3. *Un ensemble mesurable qui se transforme en lui-même lorsqu'on multiplie ses éléments par un nombre rationnel quelconque est homogène.*

Lemme 4. *Si une suite x_i est équirépartie totalement, la suite $r x_i$ l'est aussi, r étant rationnel.*

6) *Remarque 1.* On peut construire une suite normale $a_i t$ qui ne soit équirépartie nulle part et qui ne soit pas unifiante module 1 sur l'ensemble de Cantor.

---

[2]) Voir *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen. Erg. IV (4) pp. 43—44.

Remarque 2. Si les suites $F_n(t)$ considérées dans le lemme 1 satisfont pour chaque valeur de t à la condition supplémentaire

$$\lim (F_{n+1} - F_n) = 0 \ ,$$

les nombres $F_n(t)$ admettent pour point d'accumulation toute valeur comprise entre leur plus grande et leur plus petite limite.

D'après la conclusion du lemme, on pourra donc extraire pour chaque t une suite $F_{n_r}(t)$ qui converge vers 0. La suite F_{n_r} choisie peut dépendre effectivement de t. En d'autres termes, on peut donner l'exemple d'une suite $F_n(t)$ pour laquelle on ait les propriétés suivantes :

1) Quel que soit t, il est possible d'extraire une suite $F_{n_r}(t)$ qui converge vers 0 au point t ;

2) Aucune suite $F_{n_r}(t)$ ne converge vers 0 pour deux valeurs différentes de t.

(Reçu le 15 novembre 1947.)