

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 21 (1948)

**Artikel:** Sur le théorème der Hurwitz-Radon pour la composition des formes quadratiques.  
**Autor:** Lee, H.C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18610>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur le théorème de Hurwitz-Radon pour la composition des formes quadratiques

Par H. C. LEE, Cambridge

1. *Introduction.* Il est bien connu que le problème de  $n$  carrés

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

n'est possible que si  $n = 1, 2, 4, 8$ . Pour le problème plus général

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2) g(y_1, \dots, y_n) = h(z_1, \dots, z_n) \quad (1)$$

où  $g, h$  sont des formes quadratiques non singulières, *Hurwitz* [1]<sup>1)</sup> avait démontré, dans le domaine complexe, le

**Théorème (forme de Hurwitz).** *Le problème n'est possible que si  $n$  est la fonction suivante de  $p$ : Pour  $p = 2r + 1$  impair,  $n$  est un multiple de  $2^r$  ou  $2^{r+1}$  selon  $r \equiv 0, 3$  ou  $1, 2 \pmod{4}$ ; tandis que pour  $p = 2r + 2$  pair,  $n$  est un multiple de  $2^r$  ou  $2^{r+1}$  selon  $r \equiv 3$  ou  $0, 1, 2 \pmod{4}$ .*

En supposant les formes  $g, h$  réelles et définies positives, *Radon* [2] a montré, par une autre méthode, que ce théorème est même vrai dans le domaine réel et que les résultats peuvent se mettre sous la forme équivalente :

**Théorème (forme de Radon).** *Le problème n'est possible que si  $p$  est la fonction suivante de  $n$ : Pour  $n = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$  ( $u$  impair;  $\beta = 0, 1, 2, 3$ ),  $p \leq 8\alpha + 2\beta$ .*

Dans les *Commentarii*, *M. B. Eckmann* [3] a donné, sous les mêmes hypothèses que  $g, h$  soient réelles et définies positives, une nouvelle démonstration du théorème de Hurwitz-Radon dans le domaine réel, faisant usage de la théorie des caractères d'un groupe fini spécialement construit. Nous donnerons, aussi dans le Réel, une autre démonstration de ce théorème faisant application des représentations (comme données par *Weyl* et *Brauer*) de l'algèbre de *Clifford*. Cette démonstration donne aussi une construction actuelle de toutes les solutions du problème.

---

<sup>1)</sup> Les numéros entre crochets renvoient à l'index bibliographique placé à la fin du présent mémoire.

Les faits connus que nous utiliserons sont les suivants. Posant  $q = p - 1$ , soit  $C_q$  l'algèbre de Clifford ayant  $q$  générateurs  $u_1, \dots, u_q$  qui sont deux-à-deux anticommutatifs et tels que  $u_i^2 = -1$  ( $i = 1, \dots, q$ ). Donc, pour  $q = 2r$  pair, l'algèbre  $C_q$  a (à part d'équivalence) une seule représentation irréductible complexe  $u_i \rightarrow U_i$  ( $i = 1, \dots, 2r$ ), de degré  $2^r$  (voir [4]), donnée par les produits de *Kronecker*<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \sqrt{-1} R \times \dots \times R \times P \times E \times \dots \times E \\ U_{r+k} &= R \times \dots \times R \times Q \times E \times \dots \times E \end{aligned} \right\} (k = 1, \dots, r) \quad (2)$$

à  $r$  facteurs, dont  $P$  ou  $Q$  est le  $k^{\text{ième}}$ , où

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Pour  $q = 2r + 1$  impair,  $C_q$  a (à part d'équivalence) deux représentations irréductibles complexes  $u_i \rightarrow \pm U_i$  ( $i = 1, \dots, 2r + 1$ ), toutes deux de degré  $2^r$ , où  $U_1, \dots, U_{2r}$  sont donnés par (2), et où

$$U_{2r+1} = \sqrt{-1} R \times \dots \times R \quad (r \text{ facteurs}). \quad (4)$$

De plus, il est facile de démontrer (voir l'Appendice à la fin) que la représentation irréductible  $U_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) jouit des propriétés suivantes :

**Lemme 1.** Une matrice  $S_0$  satisfaisant à la condition<sup>3)</sup>

$$U_i' S_0 = -S_0 U_i \quad (i = 1, \dots, q)$$

est *adiagonale*<sup>4)</sup>, déterminée à un facteur scalaire près, et ses éléments *adiagonaux* diffèrent entre eux par le signe seulement. De plus : quand  $q = 2r$  est pair, on a  $S_0' = S_0$  et  $S_0 \bar{S}_0 = \rho I$  ( $\rho \geq 0$ ) si  $r \equiv 0, 3 \pmod{4}$ , mais  $S_0' = -S_0$  et  $S_0 \bar{S}_0 = -\rho I$  ( $\rho \geq 0$ ) si  $r \equiv 1, 2 \pmod{4}$ ; quand  $q = 2r + 1$  est impair, ces résultats subsistent avec l'addition que  $S_0 = 0$  en cas de  $r$  pair.

**Lemme 2.** Une matrice  $S_1$  satisfaisant à la condition

$$U_i' S_1 = S_1 U_i \quad (i = 1, \dots, q)$$

<sup>2)</sup> Voir [5] p. 429; [6] p. 271; [7] p. 300.

<sup>3)</sup> Dans ce qui suit, ' dénote le transposé, - le conjugué complexe et  $I$  la matrice identité.

<sup>4)</sup> On appelle une matrice *adiagonale* si elle a la forme  $\begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$  avec des éléments nuls en dehors de la ligne ponctuelle, celle-ci s'appelle l'*adiagonale* et ses éléments *éléments adiaagonaux*.

est adiaagonale, déterminée à un facteur scalaire près, et ses éléments adiaagonaux différent entre eux par le signe seulement. De plus : quand  $q = 2r$  est pair, on a  $S'_1 = S_1$  et  $S_1 \bar{S}_1 = \varrho I$  ( $\varrho \geq 0$ ) si  $r \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , mais  $S'_1 = -S_1$  et  $S_1 \bar{S}_1 = -\varrho I$  ( $\varrho \geq 0$ ) si  $r \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ; quand  $q = 2r + 1$  est impair, ces résultats subsistent avec l'addition que  $S_1 = 0$  en cas de  $r$  impair.

2. *Réduction du problème.* Cette réduction est classique, mais nous l'indiquons dans une notation plus générale pour notre but. Supposons les formes  $g, h$  réelles, de matrices symétriques  $G, H$  respectivement. Si  $y$  et  $z$  désignent les colonne-vecteurs de composantes  $y_1, \dots, y_n$  et  $z_1, \dots, z_n$ , (1) peut s'écrire

$$(x_1^2 + \dots + x_p^2) y' G y = z' H z . \quad (5)$$

Puisque  $z_1, \dots, z_n$  sont par hypothèse des fonctions linéaires de  $y_1, \dots, y_n$ , on peut écrire  $z = A y$  ou  $A$  est une  $n \times n$  matrice dont les éléments sont par hypothèse des fonctions linéaires de  $x_1, \dots, x_p$ :

$$A = A_1 x_1 + \dots + A_p x_p,$$

$A_1, \dots, A_p$  étant des  $n \times n$  matrices à éléments constants réels. Faisant  $z = A y$  dans (5) on obtient  $A' H A = (x_1^2 + \dots + x_p^2) G$ , et par suite

$$\left. \begin{aligned} A'_\alpha H A_\alpha &= G \quad (\alpha = 1, \dots, p), \\ A'_\alpha H A_\beta + A'_\beta H A_\alpha &= 0 \quad (\alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Séparons les équations (6) en deux groupes (I), (II) tels que (I) comprenne les équations (6) avec les indices allant de 1 à  $p - 1$ , et (II) comprenne les suivantes

$$A'_p H A_p = G , \quad (7)$$

$$A'_i H A_p + A'_p H A_i = 0 \quad (i = 1, \dots, p - 1) . \quad (8)$$

Puisque  $G$  et  $H$  sont non singulières, (7) implique que  $A_p$  l'est aussi et que, pour que le problème soit possible dans le réel, les formes  $g$  et  $h$  doivent avoir la même signature. Nous verrons plus tard que ces formes doivent être définies (positives ou négatives). Pour le moment supposons seulement qu'elles aient la même signature. Donc, on peut trouver la matrice réelle non singulière  $A_p$  satisfaisant à (7), et même sa totalité. D'autre part, de (7) on tire  $A'_p = G A_p^{-1} H^{-1}$ , et alors (8) donne  $A'_i = -G A_p^{-1} A_i A_p^{-1} H^{-1}$  ( $i = 1, \dots, p - 1$ ); si on introduit celle-ci dans les équations du groupe (I), le résultat peut s'écrire

$$\left. \begin{aligned} B_i^2 &= -I & (i = 1, \dots, p-1), \\ B_i B_j &= -B_j B_i & (i \neq j; i, j = 1, \dots, p-1). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où  $B_i = A_p^{-1} A_i$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ). Donc  $A_i = A_p B_i$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ) et par suite (8) donne, eu égard de (7),

$$B_i' G = -G B_i \quad (i = 1, \dots, p-1). \quad (10)$$

Les matrices  $A_\alpha$  étant réelles, les  $B_i$  le sont aussi. Supposons inversement qu'on ait trouvé les matrices réelles  $B_i$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ) satisfaisant à (9) et (10); on définit d'abord la matrice réelle  $A_p$  par (7) et l'on pose ensuite  $A_i = A_p B_i$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ); les matrices réelles  $A_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) ainsi obtenues satisferont à (6). Ainsi, notre problème se réduit à trouver des matrices réelles  $B_i$  satisfaisant à (9) et (10).

3. *Démonstration du théorème de Hurwitz.* D'après (9), les  $B_i$  constituent une représentation réelle de degré  $n$  de l'algèbre de Clifford  $C_{p-1}$ . L'algèbre étant semi-simple [4], toute représentation complexe est équivalente à une somme directe  $B_i^0$  de représentations irréductibles  $U_i$  (comme citées au n° 1). Alors, à partir d'une telle  $B_i^0$  donnée, on cherchera s'il existe une représentation équivalente  $B_i = T B_i^0 T^{-1}$  qui satisfait à (10):  $(T B_i^0 T^{-1})' G = -G (T B_i^0 T^{-1})$ , et qui est réelle:  $\bar{T} \bar{B}_i^0 \bar{T}^{-1} = T B_i^0 T^{-1}$ : la première condition peut être écrite

$$(B_i^0)' X = -X B_i^0 \quad (11)$$

où

$$X = T' G T, \quad (12)$$

et la seconde prend la forme suivante

$$\bar{B}_i^0 Y = Y B_i^0 \quad (13)$$

où

$$Y = \bar{T}^{-1} T. \quad (14)$$

Considérons d'abord la condition (11).

1° Prenons, au premier lieu,  $B_i^0$  irréductible :

$$(a_1) \quad B_i^0 = U_i ;$$

donc (11) est la condition du Lemme 1. Puisque  $X$  est symétrique et non singulière d'après (12), Lemme 1 implique que  $r \equiv 0, 3 \pmod{4}$  si  $p-1 = 2r$ , et  $r \equiv 3 \pmod{4}$  si  $p-1 = 2r+1$ , et que

$$(b_1) \quad X = S_0 \quad [S_0' = S_0, S_0 \bar{S}_0 = \varrho I \quad (\varrho > 0)] .$$

Dans ces cas seulement, la représentation irréductible  $(a_1)$  est acceptable (degré  $2^r$ , un choix pour  $p - 1$  pair, deux choix pour  $p - 1$  impair). Bien entendu, toute somme directe formée par cette représentation répétée  $m$  fois (degré  $m \cdot 2^r$ ) est aussi acceptable. Alors <sup>5)</sup>

$$n = m \cdot 2^r \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r, \quad r \equiv 0, 3 \pmod{4}, \quad (15.1)$$

$$n = m \cdot 2^r \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 3 \pmod{4}. \quad (15.2)$$

2° Pour les autres cas, on doit prendre  $B_i^0$  réductible. Essayons

$$(a_2) \quad B_i^0 = \begin{pmatrix} U_i & O \\ O & U_i \end{pmatrix},$$

de degré  $2 \cdot 2^r = 2^{r+1}$ ; la condition (11), où on écrit  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X'_2 & X_3 \end{pmatrix}$  avec  $X'_1 = X_1$ ,  $X'_3 = X_3$ , donne  $U'_i X_1 = -X_1 U_i$ ,  $U'_i X_2 = -X_2 U_i$ ,  $U'_i X_3 = -X_3 U_i$ , qui sont chacune la condition du Lemme 1. Par suite, quand  $p - 1 = 2r$  et  $r \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , ou  $p - 1 = 2r + 1$  et  $r \equiv 1 \pmod{4}$ , on a  $X'_1 = -X_1$ ,  $X'_2 = -X_2$ ,  $X'_3 = -X_3$ ; d'où  $X_1 = X_3 = 0$ , et alors

$$(b_2) \quad X = \begin{pmatrix} O & S_0 \\ S'_0 & O \end{pmatrix} \quad [S'_0 = -S_0, \quad S_0 \bar{S}_0 = -\varrho I \quad (\varrho > 0)].$$

On a maintenant <sup>6)</sup>

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r, \quad r \equiv 1, 2 \pmod{4}, \quad (15.3)$$

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 1 \pmod{4}. \quad (15.4)$$

3° Pour les cas restants de  $p - 1$  impair  $= 2r + 1$ , et  $r$  pair  $\equiv 0, 2 \pmod{4}$ , prenons

$$(a_3) \quad B_i^0 = \begin{pmatrix} U_i & O \\ O & -U_i \end{pmatrix},$$

donc (11) donne  $U'_i X_1 = -X_1 U_i$ ,  $U'_i X_2 = X_2 U_i$ ,  $U'_i X_3 = -X_3 U_i$ . La première et la troisième de ces équations sont chacune la condition du Lemme 1, d'où, comme au-dessus,  $X_1 = X_3 = 0$ ; la deuxième est la condition du Lemme 2, et par conséquent

<sup>5)</sup> La représentation peut être choisie d'une seule manière pour le cas (15.1), mais de  $m + 1$  manières pour (15.2).

<sup>6)</sup> Il y a une seule représentation pour le cas (15.3), mais en  $m + 1$  pour (15.4).

$$(b_3) \quad X = \begin{pmatrix} O & S_1 \\ S_1' & O \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_1' = S_1, & S_1 \bar{S}_1 = \varrho I \quad (\varrho > 0) \text{ si } r \equiv 0 \pmod{4} \\ S_1' = -S_1, & S_1 \bar{S}_1 = -\varrho I \quad (\varrho > 0) \text{ si } r \equiv 1 \pmod{4} \end{bmatrix}.$$

On a ici <sup>7)</sup>

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 0, 2 \pmod{4}. \quad (15.5)$$

Les valeurs (15.1—5) sont précisément celles données dans le théorème de *Hurwitz* <sup>8)</sup>. Remarquons en passant que d'après (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>) et (b<sub>3</sub>) on a

$$X \bar{X} = \varrho I \quad (\varrho > 0) \quad (16)$$

dans tous les cas. Puisque  $X$  est aussi symétrique, il existe, d'après un théorème connu <sup>9)</sup>, une matrice unitaire  $V$  telle que

$$X = \sqrt{\varrho} V' V \quad (\varrho > 0) . \quad (17)$$

Considérons maintenant la condition (13). D'après (2) à (4) on a  $\bar{U}_i = -U_i'$ , et alors  $\bar{B}_i^0 = -(B_i^0)'$  d'après (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>) et (a<sub>3</sub>). Donc (13) a la même forme (11); par conséquent, la matrice  $Y$  est aussi donnée par (b<sub>1</sub>), (b<sub>2</sub>) ou (b<sub>3</sub>) suivant le cas, et elle ne diffère de  $X$  que par un facteur scalaire. D'après (14) on doit avoir  $Y \bar{Y} = I$ ; alors (voir (16) et (17)) on peut prendre

$$Y = V' V . \quad (18)$$

Donc, l'équation (14) s'écrit  $\bar{T}^{-1} T = V' V = \bar{V}^{-1} V$ , ce qui entraîne

$$T = R V \quad (19)$$

où  $R$  est une matrice réelle arbitraire. A l'aide de (17) et (19), la condition (12) équivaut à

$$R' G R = \sqrt{\varrho} I . \quad (20)$$

Par suite la forme  $g$  doit être définie <sup>10)</sup>. Inversement, si  $g$  est une forme définie, il existe une matrice réelle  $R$  telle que (20), et toutes les conditions (11) à (14) sont donc satisfaites, ce qui complète notre démonstration dans le réel.

<sup>7)</sup> Il n'y a qu'une seule représentation pour le cas (15.5).

<sup>8)</sup> Dans le complexe, ce théorème est donc démontré.

<sup>9)</sup> *Radon* [2] p. 5, c). — *Schur* [8] p. 478—479.

<sup>10)</sup> *M. R. Dubisch* ([9] p. 525) a récemment démontré ce fait par un raisonnement différent.

**Appendice. Démonstration des Lemmes 1, 2.**

Combinons les conditions des Lemmes 1, 2 sous la forme

$$U'_i S = \mp S U_i \quad (i = 1, \dots, q) . \quad (\text{i})$$

Supposons d'abord  $q = 2r$ . Donc (i) consiste en

$$U'_k S = \mp S U_k, \quad U'_{r+k} S = \mp S U_{r+k}, \quad (k = 1, \dots, r) . \quad (\text{ii})$$

Puisque  $U'_k = U_k$ ,  $U'_{r+k} = -U_{r+k}$  d'après (2) et (3), (ii) s'écrit

$$U_k S = \mp S U_k, \quad U_{r+k} S = \pm S U_{r+k} . \quad (\text{iii})$$

Désignons les éléments des  $2 \times 2$  matrices (3) par  $e_\nu^\mu, p_\nu^\mu, q_\nu^\mu, r_\nu^\mu$  respectivement, où  $\mu$  indique la ligne et  $\nu$  la colonne, ces indices prenant deux valeurs que nous choisissons comme 0, 1. On a

$$\begin{aligned} e_\nu^\mu &= 1 \text{ ou } 0 \text{ si } \mu = \nu \text{ ou } \mu \neq \nu, & p_\nu^\mu &= e_\nu^\mu = e_\nu^{\bar{\mu}}, \\ q_\nu^\mu &= (-1)^{\bar{\nu}} e_\nu^\mu = (-1)^\mu e_\nu^{\bar{\mu}}, & r_\nu^\mu &= (-1)^\mu e_\nu^\mu = (-1)^\nu e_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

où si un indice prend la valeur 0 ou 1, son barré prend la valeur 1 ou 0. Les éléments des produits de *Kronecker* (2) ont la forme

$$\begin{aligned} U_k &= \sqrt{-1} \left( r_{\nu_1}^{\mu_1} \dots r_{\nu_{k-1}}^{\mu_{k-1}} p_{\nu_k}^{\mu_k} e_{\nu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \dots e_{\nu_r}^{\mu_r} \right) \\ U_{r+k} &= \left( r_{\nu_1}^{\mu_1} \dots r_{\nu_{k-1}}^{\mu_{k-1}} q_{\nu_k}^{\mu_k} e_{\nu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \dots e_{\nu_r}^{\mu_r} \right) \end{aligned}$$

et si on désigne les éléments de la matrice  $S$  par  $s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}$  les conditions (iii) s'écrivent

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} r_{\sigma_1}^{\mu_1} \dots r_{\sigma_{k-1}}^{\mu_{k-1}} p_{\sigma_k}^{\mu_k} e_{\sigma_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \dots e_{\sigma_r}^{\mu_r} s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\sigma_1 \dots \sigma_r} &= \pm \sum_{\sigma} s_{\sigma_1 \dots \sigma_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} r_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots r_{\nu_{k-1}}^{\sigma_{k-1}} p_{\nu_k}^{\sigma_k} e_{\nu_{k+1}}^{\sigma_{k+1}} \dots e_{\nu_r}^{\sigma_r}, \\ \sum_{\sigma} r_{\sigma_1}^{\mu_1} \dots r_{\sigma_{k-1}}^{\mu_{k-1}} q_{\sigma_k}^{\mu_k} e_{\sigma_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \dots e_{\sigma_r}^{\mu_r} s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\sigma_1 \dots \sigma_r} &= \mp \sum_{\sigma} s_{\sigma_1 \dots \sigma_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} r_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots r_{\nu_{k-1}}^{\sigma_{k-1}} q_{\nu_k}^{\sigma_k} e_{\nu_{k+1}}^{\sigma_{k+1}} \dots e_{\nu_r}^{\sigma_r}, \end{aligned}$$

qui, à cause des valeurs (iv), deviennent

$$(-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_{k-1}} s_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \nu_k \nu_{k+1} \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \dots \mu_r} = \mp (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_{k-1}} s_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \bar{\nu}_k \nu_{k+1} \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_r}, \quad (\text{v})$$

$$(-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_{k-1} + \mu_k} s_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \nu_k \nu_{k+1} \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \dots \mu_r} = \pm (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_{k-1} + \bar{\nu}_k} s_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} \bar{\nu}_k \nu_{k+1} \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_r}. \quad (\text{vi})$$

Multiplions (v) par  $(-1)$  et égalons le second membre ainsi obtenu à celui de (vi) ; le résultat, quand on en remplace  $\bar{\nu}_k$  par  $\nu_k$ , peut s'écrire

$$[(-1)^{\mu_k} + (-1)^{\nu_k}] s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = 0 ;$$

d'où  $s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = 0$  dès que  $\nu_k = \mu_k$  pour une valeur  $k$ . Il s'ensuit que les seuls éléments de  $S$ , qui sont peut-être non nuls, sont de la forme  $s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ , et ces derniers se trouvent évidemment sur l'adiagonale. Si dans (v) ou (vi) on remplace  $\bar{\mu}_k$  par  $\mu_k$  (donc  $\mu_k$  par  $\bar{\mu}_k$ ), et si on fait  $\nu_l = \bar{\mu}_l$  ( $l = 1, \dots, r$ ), on obtient

$$s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \pm (-1)^k s_{\mu_1 \dots \bar{\mu}_{k-1} \mu_k \bar{\mu}_{k+1} \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \dots \mu_r}, \quad (\text{vii})$$

ce qui montre qu'à partir d'un élément adiaagonal, par exemple  $s_1^0 \dots 0_1^0$ , tous les autres s'en déduisent par un changement de signe.

Séparons maintenant la considération de (vii) en deux cas suivant les signes  $\pm$  à droite. Prenons le signe supérieur et appliquons la formule (vii) successivement pour  $k = 1, \dots, r$  ; on obtient

$$s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)} s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r},$$

qui exprime la relation entre deux éléments symétriquement opposés de l'adiagonale ; il s'ensuit que la matrice  $S$  est symétrique ou antisymétrique selon que  $\frac{1}{2}r(r+1)$  est pair ou impair, c'est-à-dire  $r \equiv 0, 3$  ou  $1, 2 \pmod{4}$ .

Prenons le signe inférieur et appliquons (vii) pour  $k = 1, \dots, r$  successivement ; on trouve maintenant

$$s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} s_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r},$$

d'où  $S$  est une matrice symétrique ou antisymétrique selon que  $\frac{1}{2}r(r-1)$  est pair ou impair, c'est-à-dire  $r \equiv 0, 1$  ou  $2, 3 \pmod{4}$ .

$S$  étant une matrice adiaagonale dont les éléments adiaagonaux ont la même valeur absolue, on voit immédiatement que le produit  $S\bar{S}$  a la forme  $\varrho I$  ou  $-\varrho I$  ( $\varrho > 0$ ) selon que  $S$  est symétrique ou antisymétrique. On peut aussi en vérifier directement.

Supposons maintenant  $q = 2r + 1$ . Donc (i) consiste en (ii) et, en outre, la condition

$$U'_{2r+1} S = \mp S U_{2r+1} .$$

Les résultats que nous venons d'établir au-dessus subsistent encore. D'après (4) on a  $U'_{2r+1} = U_{2r+1}$ , et alors la condition précédente s'écrit  $U_{2r+1} S = \mp S U_{2r+1}$ , ce qui donne, puisque  $U_{2r+1} = \sqrt{-1} (r_{\nu_1}^{\mu_1} \dots r_{\nu_r}^{\mu_r})$  d'après (4),

$$\sum_{\sigma} r_{\sigma_1}^{\mu_1} \dots r_{\sigma_r}^{\mu_r} s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\sigma_1 \dots \sigma_r} = \mp \sum_{\sigma} s_{\sigma_1 \dots \sigma_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} r_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots r_{\nu_r}^{\sigma_r},$$

c'est-à-dire

$$(-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_r} s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \mp (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_r} s_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_r}.$$

En faisant  $\nu_l = \bar{\mu}_l$  ( $l = 1, \dots, r$ ) dans la dernière équation on obtient  $[1 \pm (-1)^r] s_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = 0$ ; d'où, pour le signe supérieur et  $r$  pair, ou pour le signe inférieur et  $r$  impair, on a  $s_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} = 0$ , c'est-à-dire  $S = 0$ . Les Lemmes 1, 2 sont complètement démontrés.

#### INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] A. Hurwitz, „Über die Komposition der quadratischen Formen“, Math. Ann. 88 (1923) 1—25.
- [2] J. Radon, „Lineare Scharen orthogonaler Matrizen“, Abh. Sem. Hamburg 1 (1922) 1—14.
- [3] B. Eckmann, „Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen“, Commentarii Math. Helv. 15 (1943) 358—366.
- [4] H. C. Lee, „On Clifford's algebra“, J. of London Math. Soc. 20 (1945) 27—32.
- [5] R. Brauer and H. Weyl, „Spinors in  $n$  dimensions“, Amer. J. of Math. 57 (1935), 425—449.
- [6] H. Weyl, The classical groups (1939).
- [7] F. D. Murnaghan, The theory of group representations (1938).
- [8] I. Schur, „Ein Satz über quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten“, Amer. J. of Math. 67 (1945) 472—480.
- [9] R. Dubisch, „Composition of quadratic forms“, Ann. of Math. 47 (1946) 510—527.

(Reçu le 1<sup>er</sup> septembre 1947.)