Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 21 (1948)

Artikel: Sur le théorème der Hurwitz-Radon pour la composition des formes quadratiques.

Autor: Lee, H.C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18610

Sur le théorème de Hurwitz-Radon pour la composition des formes quadratiques

Par H. C. Lee, Cambridge

1. *Introduction.* Il est bien connu que le problème de n carrés

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

n'est possible que si $n = 1, 2, 4, 8$. Pour le problème plus général

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2)\, g(y_1, \ldots, y_n) = h(z_1, \ldots, z_n) \tag{1}$$

où g, h sont des formes quadratiques non singulières, *Hurwitz* [1][1]) avait démontré, dans le domaine complexe, le

Théorème (*forme de Hurwitz*). *Le problème n'est possible que si n est la fonction suivante de p: Pour $p = 2r + 1$ impair, n est un multiple de 2^r ou 2^{r+1} selon $r \equiv 0,3$ ou $1,2$ (mod 4); tandis que pour $p = 2r + 2$ pair, n est un multiple de 2^r ou 2^{r+1} selon $r \equiv 3$ ou $0, 1, 2$ (mod 4).*

En supposant les formes g, h réelles et définies positives, *Radon* [2] a montré, par une autre méthode, que ce théorème est même vrai dans le domaine réel et que les résultats peuvent se mettre sous la forme équivalente :

Théorème (*forme de Radon*). *Le problème n'est possible que si p est la fonction suivante de n: Pour $n = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$ (u impair; $\beta = 0, 1, 2, 3$), $p \leqq 8\alpha + 2^\beta$.*

Dans les Commentarii, *M. B. Eckmann* [3] a donné, sous les mêmes hypothèses que g, h soient réelles et définies positives, une nouvelle démonstration du théorème de Hurwitz-Radon dans le domaine réel, faisant usage de la théorie des caractères d'un groupe fini spécialement construit. Nous donnerons, aussi dans le Réel, une autre démonstration de ce théorème faisant application des représentations (comme données par *Weyl* et *Brauer*) de l'algèbre de *Clifford*. Cette démonstration donne aussi une construction actuelle de toutes les solutions du problème.

---

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à l'index bibliographique placé à la fin du présent mémoire.

Les faits connus que nous utiliserons sont les suivants. Posant $q = p - 1$, soit C_q l'algèbre de Clifford ayant q générateurs $u_1, \ldots, u_q$ qui sont deux-à-deux anticommutatifs et tels que $u_i^2 = -1$ $(i = 1, \ldots, q)$. Donc, pour $q = 2r$ pair, l'algèbre C_q a (à part d'équivalence) une seule représentation irréductible complexe $u_i \to U_i$ $(i = 1, \ldots, 2r)$, de degré 2^r (voir [4]), donnée par les produits de *Kronecker*[2])

$$\left.\begin{aligned} U_k &= \sqrt{-1}\, R \times \cdots \times R \times P \times E \times \cdots \times E \\ U_{r+k} &= \phantom{\sqrt{-1}\,} R \times \cdots \times R \times Q \times E \times \cdots \times E \end{aligned} \quad (k = 1, \ldots, r) \right\} \tag{2}$$

à r facteurs, dont P ou Q est le $k^{\text{ième}}$, où

$$E = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \quad P = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \quad Q = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right), \quad R = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right). \tag{3}$$

Pour $q = 2r + 1$ impair, C_q a (à part d'équivalence) deux représentations irréductibles complexes $u_i \to \pm U_i$ $(i = 1, \ldots, 2r + 1)$, toutes deux de degré 2^r, où $U_1, \ldots, U_{2r}$ sont donnés par (2), et où

$$U_{2r+1} = \sqrt{-1}\, R \times \cdots \times R \qquad (r \text{ facteurs}). \tag{4}$$

De plus, il est facile de démontrer (voir l'Appendice à la fin) que la représentation irréductible U_i $(i = 1, \ldots, q)$ jouit des propriétés suivantes :

Lemme 1. *Une matrice S_0 satisfaisant à la condition*[3])

$$U_i' S_0 = -S_0 U_i \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

est adiagonale[4]), *déterminée à un facteur scalaire près, et ses éléments adiagonaux diffèrent entre eux par le signe seulement. De plus : quand $q = 2r$ est pair, on a $S_0' = S_0$ et $S_0 \bar{S}_0 = \varrho I$ $(\varrho \geqq 0)$ si $r \equiv 0,3$ (mod 4), mais $S_0' = -S_0$ et $S_0 \bar{S}_0 = -\varrho I$ $(\varrho \geqq 0)$ si $r \equiv 1, 2$ (mod 4) ; quand $q = 2r + 1$ est impair, ces résultats subsistent avec l'addition que $S_0 = 0$ en cas de r pair.*

Lemme 2. *Une matrice S_1 satisfaisant à la condition*

$$U_i' S_1 = S_1 U_i \qquad (i = 1, \ldots, q)$$

---

[2]) Voir [5] p. 429; [6] p. 271; [7] p. 300.

[3]) Dans ce qui suit, $'$ dénote le transposé, $^{-}$ le conjugué complexe et I la matrice identique.

[4]) On appelle une matrice *adiagonale* si elle a la forme $\begin{pmatrix} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \end{pmatrix}$ avec des éléments nuls en dehors de la ligne ponctuelle, celle-ci s'appelle l'*adiagonale* et ses éléments *éléments adiagonaux*.

est adiagonale, déterminée à un facteur scalaire près, et ses éléments adiagonaux diffèrent entre eux par le signe seulement. De plus : quand $q = 2r$ *est pair, on a* $S_1' = S_1$ *et* $S_1 \bar{S}_1 = \varrho I$ $(\varrho \geqq 0)$ *si* $r \equiv 0, 1 \pmod 4$, *mais* $S_1' = -S_1$ *et* $S_1 \bar{S}_1 = -\varrho I$ $(\varrho \geqq 0)$ *si* $r \equiv 2, 3 \pmod 4$; *quand* $q = 2r + 1$ *est impair, ces résultats subsistent avec l'addition que* $S_1 = 0$ *en cas de* r *impair.*

2. *Réduction du problème.* Cette réduction est classique, mais nous l'indiquons dans une notation plus générale pour notre but. Supposons les formes g, h réelles, de matrices symétriques G, H respectivement. Si y et z désignent les colonne-vecteurs de composantes $y_1, \ldots, y_n$ et $z_1, \ldots, z_n$, (1) peut s'écrire

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2)\, y' G\, y = z' H\, z\ . \tag{5}$$

Puisque $z_1, \ldots, z_n$ sont par hypothèse des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$, on peut écrire $z = A\,y$ ou A est une $n \times n$ matrice dont les éléments sont par hypothèse des fonctions linéaires de $x_1, \ldots, x_p$:

$$A = A_1\, x_1 + \cdots + A_p\, x_p,$$

$A_1, \ldots, A_p$ étant des $n \times n$ matrices à éléments constants réels. Faisant $z = A\,y$ dans (5) on obtient $A' H A = (x_1^2 + \cdots + x_p^2)\, G$, et par suite

$$\left.\begin{aligned} &A_\alpha' H A_\alpha = G \qquad (\alpha = 1, \ldots, p)\ , \\ &A_\alpha' H A_\beta + A_\beta' H A_\alpha = 0 \qquad (\alpha \neq \beta\ ; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, p)\ . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Séparons les équations (6) en deux groupes (I), (II) tels que (I) comprenne les équations (6) avec les indices allant de 1 à $p - 1$, et (II) comprenne les suivantes

$$A_p' H A_p = G\ , \tag{7}$$

$$A_i' H A_p + A_p' H A_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p - 1)\ . \tag{8}$$

Puisque G et H sont non singulières, (7) implique que A_p l'est aussi et que, pour que le problème soit possible dans le réel, *les formes* g *et* h *doivent avoir la même signature.* Nous verrons plus tard que ces formes doivent être définies (positives ou négatives). Pour le moment supposons seulement qu'elles aient la même signature. Donc, on peut trouver la matrice réelle non singulière A_p satisfaisant à (7), et même sa totalité. D'autre part, de (7) on tire $A_p' = G A_p^{-1} H^{-1}$, et alors (8) donne $A_i' = -G A_p^{-1} A_i A_p^{-1} H^{-1}$ $(i = 1, \ldots, p - 1)$; si on introduit celle-ci dans les équations du groupe (I), le résultat peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned} B_i^2 &= -I \qquad (i = 1, \ldots, p-1)\,, \\ B_i B_j &= -B_j B_i \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p-1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où $B_i = A_p^{-1} A_i$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Donc $A_i = A_p B_i$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ et par suite (8) donne, eu égard de (7),

$$B_i' G = -G B_i \qquad (i = 1, \ldots, p-1)\,. \tag{10}$$

Les matrices A_α étant réelles, les B_i le sont aussi. Supposons inversement qu'on ait trouvé les matrices réelles B_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ satisfaisant à (9) et (10); on définit d'abord la matrice réelle A_p par (7) et l'on pose ensuite $A_i = A_p B_i$ $(i = 1, \ldots, p-1)$; les matrices réelles A_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$ ainsi obtenues satisferont à (6). Ainsi, notre problème se réduit à trouver des matrices réelles B_i satisfaisant à (9) et (10).

3. *Démonstration du théorème de Hurwitz.* D'après (9), les B_i constituent une représentation réelle de degré n de l'algèbre de Clifford C_{p-1}. L'algèbre étant semi-simple [4], toute représentation complexe est équivalente à une somme directe B_i^0 de représentations irréductibles U_i (comme citées au n° 1). Alors, à partir d'une telle B_i^0 donnée, on cherchera s'il existe une représentation équivalente $B_i = T B_i^0 T^{-1}$ qui satisfait à (10): $(T B_i^0 T^{-1})' G = -G(T B_i^0 T^{-1})$, et qui est réelle: $\overline{T}\,\overline{B_i^0}\,\overline{T}^{-1} = T B_i^0 T^{-1}$: la première condition peut être écrite

$$(B_i^0)' X = -X B_i^0 \tag{11}$$

où

$$X = T' G T\,, \tag{12}$$

et la seconde prend la forme suivante

$$\overline{B_i^0}\, Y = Y B_i^0 \tag{13}$$

où

$$Y = \overline{T}^{-1} T\,. \tag{14}$$

Considérons d'abord la condition (11).

1° Prenons, au premier lieu, B_i^0 irréductible:

$$(a_1) \qquad B_i^0 = U_i\,;$$

donc (11) est la condition du Lemme 1. Puisque X est symétrique et non singulière d'après (12), Lemme 1 implique que $r \equiv 0, 3 \pmod 4$ si $p - 1 = 2r$, et $r \equiv 3 \pmod 4$ si $p - 1 = 2r + 1$, et que

$$(b_1) \qquad X = S_0 \qquad [S_0' = S_0,\ S_0 \overline{S}_0 = \varrho I \qquad (\varrho > 0)]\,.$$

Dans ces cas seulement, la représentation irréductible (a_1) est acceptable (degré 2^r, un choix pour $p-1$ pair, deux choix pour $p-1$ impair). Bien entendu, toute somme directe formée par cette représentation répétée m fois (degré $m \cdot 2^r$) est aussi acceptable. Alors [5])

$$n = m \cdot 2^r \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r, \qquad r \equiv 0, 3 \pmod 4, \tag{15.1}$$

$$n = m \cdot 2^r \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 3 \pmod 4. \tag{15.2}$$

2° Pour les autres cas, on doit prendre B_i^0 réductible. Essayons

$$(a_2) \qquad B_i^0 = \begin{pmatrix} U_i & O \\ O & U_i \end{pmatrix},$$

de degré $2 \cdot 2^r = 2^{r+1}$; la condition (11), où on écrit $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2' & X_3 \end{pmatrix}$ avec $X_1' = X_1$, $X_3' = X_3$, donne $U_i' X_1 = - X_1 U_i$, $U_i' X_2 = - X_2 U_i$, $U_i' X_3 = - X_3 U_i$, qui sont chacune la condition du Lemme 1. Par suite, quand $p - 1 = 2r$ et $r \equiv 1, 2 \pmod 4$, ou $p - 1 = 2r + 1$ et $r \equiv 1 \pmod 4$, on a $X_1' = - X_1$, $X_2' = - X_2$, $X_3' = - X_3$; d'où $X_1 = X_3 = 0$, et alors

$$(b_2) \qquad X = \begin{pmatrix} O & S_0 \\ S_0' & O \end{pmatrix} \qquad [S_0' = - S_0, \ S_0 \bar{S}_0 = - \varrho I \ \ (\varrho > 0)] .$$

On a maintenant [6])

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r, \qquad r \equiv 1, 2 \pmod 4, \tag{15.3}$$

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 1 \pmod 4. \tag{15.4}$$

3° Pour les cas restants de $p - 1$ impair $= 2r + 1$, et r pair $\equiv 0{,}2 \pmod 4$, prenons

$$(a_3) \qquad B_i^0 = \begin{pmatrix} U_i & O \\ O & - U_i \end{pmatrix},$$

donc (11) donne $U_i'X_1 = -X_1U_i$, $U_i'X_2 = X_2U_i$, $U_i'X_3 = -X_3U_i$. La première et la troisième de ces équations sont chacune la condition du Lemme 1, d'où, comme au-dessus, $X_1 = X_3 = 0$; la deuxième est la condition du Lemme 2, et par conséquent

---

[5]) La représentation peut être choisie d'une seule manière pour le cas (15.1), mais de $m + 1$ manières pour (15.2).

[6]) Il y a une seule représentation pour le cas (15.3), mais en $m + 1$ pour (15.4).

$$(b_3) \quad X = \begin{pmatrix} O & S_1 \\ S_1' & O \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_1' = S_1, & S_1 \bar{S}_1 = \varrho I & (\varrho > 0) \text{ si } r \equiv 0 \pmod 4 \\ S_1' = -S_1, & S_1 \bar{S}_1 = -\varrho I & (\varrho > 0) \text{ si } r \equiv 0 \pmod 4 \end{bmatrix}.$$

On a ici[7])

$$n = m \cdot 2^{r+1} \quad \text{quand} \quad p - 1 = 2r + 1, \quad r \equiv 0{,}2 \pmod 4. \tag{15.5}$$

Les valeurs (15.1—5) sont précisément celles données dans le théorème de *Hurwitz*[8]). Remarquons en passant que d'après (b_1), (b_2) et (b_3) on a

$$X \bar{X} = \varrho I \qquad (\varrho > 0) \tag{16}$$

dans tous les cas. Puisque X est aussi symétrique, il existe, d'après un théorème connu[9]), une matrice unitaire V telle que

$$X = \sqrt{\varrho}\, V' V \qquad (\varrho > 0)\ . \tag{17}$$

Considérons maintenant la condition (13). D'après (2) à (4) on a $\bar{U}_i = - U_i'$, et alors $\bar{B}_i^0 = -(B_i^0)'$ d'après (a_1), (a_2) et (a_3). Donc (13) a la même forme (11); par conséquent, la matrice Y est aussi donnée par (b_1), (b_2) ou (b_3) suivant le cas, et elle ne diffère de X que par un facteur scalaire. D'après (14) on doit avoir $Y \bar{Y} = I$; alors (voir (16) et (17)) on peut prendre

$$Y = V' V\ . \tag{18}$$

Donc, l'équation (14) s'écrit $\bar{T}^{-1} T = V' V = \bar{V}^{-1} V$, ce qui entraîne

$$T = R V \tag{19}$$

où R est une matrice réelle arbitraire. A l'aide de (17) et (19), la condition (12) équivaut à

$$R' G R = \sqrt{\varrho}\, I\ . \tag{20}$$

Par suite *la forme g doit être définie*[10]). Inversement, si g est une forme définie, il existe une matrice réelle R telle que (20), et toutes les conditions (11) à (14) sont donc satisfaites, ce qui complète notre démonstration dans le réel.

---

7) Il n'y a qu'une seule représentation pour le cas (15.5).

8) Dans le complexe, ce théorème est donc démontré.

9) *Radon* [2] p. 5, c). — *Schur* [8] p. 478—479.

10) M. *R. Dubisch* ([9] p. 525) a récemment démontré ce fait par un raisonnement différent.

Appendice. *Démonstration des Lemmes 1, 2.*

Combinons les conditions des Lemmes 1, 2 sous la forme

$$U_i' S = \mp S U_i \qquad (i = 1, \ldots, q) . \tag{i}$$

Supposons d'abord $q = 2r$. Donc (i) consiste en

$$U_k' S = \mp S U_k , \qquad U_{r+k}' S = \mp S U_{r+k} , \qquad (k = 1, \ldots, r) . \tag{ii}$$

Puisque $U_k' = U_k$, $U_{r+k}' = - U_{r+k}$ d'après (2) et (3), (ii) s'écrit

$$U_k S = \mp S U_k , \qquad U_{r+k} S = \pm S U_{r+k} . \tag{iii}$$

Désignons les éléments des 2×2 matrices (3) par $e_\nu^\mu, p_\nu^\mu, q_\nu^\mu, r_\nu^\mu$ respectivement, où μ indique la ligne et ν la colonne, ces indices prenant deux valeurs que nous choisissons comme $0, 1$. On a

$$\left.\begin{aligned} &e_\nu^\mu = 1 \text{ ou } 0 \text{ si } \mu = \nu \text{ ou } \mu \neq \nu , && p_\nu^\mu = e_{\bar\nu}^\mu = e_\nu^{\bar\mu} , \\ &q_\nu^\mu = (-1)^{\bar\nu} e_{\bar\nu}^\mu = (-1)^\mu e_\nu^{\bar\mu} , && r_\nu^\mu = (-1)^\mu e_\nu^\mu = (-1)^\nu e_\nu^\mu , \end{aligned}\right\} \tag{iv}$$

où si un indice prend la valeur 0 ou 1, son barré prend la valeur 1 ou 0. Les éléments des produits de *Kronecker* (2) ont la forme

$$\begin{aligned} U_k &= \sqrt{-1} \left(r_{\nu_1}^{\mu_1} \ldots r_{\nu_{k-1}}^{\mu_{k-1}} p_{\nu_k}^{\mu_k} e_{\nu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \ldots e_{\nu_r}^{\mu_r} \right) \\ U_{r+k} &= \left(r_{\nu_1}^{\mu_1} \ldots r_{\nu_{k-1}}^{\mu_{k-1}} q_{\nu_k}^{\mu_k} e_{\nu_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \ldots e_{\nu_r}^{\mu_r} \right) \end{aligned}$$

et si on désigne les éléments de la matrice S par $s_{\nu_1 \ldots \nu_r}^{\mu_1 \ldots \mu_r}$ les conditions (iii) s'écrivent

$$\sum_\sigma r_{\sigma_1}^{\mu_1} \ldots r_{\sigma_{k-1}}^{\mu_{k-1}} p_{\sigma_k}^{\mu_k} e_{\sigma_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \ldots e_{\sigma_r}^{\mu_r} s_{\nu_1 \ldots \nu_r}^{\sigma_1 \ldots \sigma_r} = \pm \sum_\sigma s_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}^{\mu_1 \ldots \mu_r} r_{\nu_1}^{\sigma_1} \ldots r_{\nu_{k-1}}^{\sigma_{k-1}} p_{\nu_k}^{\sigma_k} e_{\nu_{k+1}}^{\sigma_{k+1}} \ldots e_{\nu_r}^{\sigma_r} ,$$

$$\sum_\sigma r_{\sigma_1}^{\mu_1} \ldots r_{\sigma_{k-1}}^{\mu_{k-1}} q_{\sigma_k}^{\mu_k} e_{\sigma_{k+1}}^{\mu_{k+1}} \ldots e_{\sigma_r}^{\mu_r} s_{\nu_1 \ldots \nu_r}^{\sigma_1 \ldots \sigma_r} = \mp \sum_\sigma s_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}^{\mu_1 \ldots \mu_r} r_{\nu_1}^{\sigma_1} \ldots r_{\nu_{k-1}}^{\sigma_{k-1}} q_{\nu_k}^{\sigma_k} e_{\nu_{k+1}}^{\sigma_{k+1}} \ldots e_{\nu_r}^{\sigma_r} ,$$

qui, à cause des valeurs (iv), deviennent

$$(-1)^{\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}} \quad s_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_r}^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \bar\mu_k \mu_{k+1} \ldots \mu_r} = \mp (-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_{k-1}} \quad s_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \bar\nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_r}^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \mu_k \mu_{k+1} \ldots \mu_r} , \tag{v}$$

$$(-1)^{\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} + \mu_k} s_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_r}^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \bar\mu_k \mu_{k+1} \ldots \mu_r} = \pm (-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_{k-1} + \bar\nu_k} s_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \bar\nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_r}^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \mu_k \mu_{k+1} \ldots \mu_r} . \tag{vi}$$

Multiplions (v) par (-1) et égalons le second membre ainsi obtenu à celui de (vi) ; le résultat, quand on en remplace $\bar{\nu}_k$ par ν_k, peut s'écrire

$$[(-1)^{\mu_k} + (-1)^{\nu_k}]\, s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_r} = 0 \;;$$

d'où $s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_r} = 0$ dès que $\nu_k = \mu_k$ pour une valeur k. Il s'ensuit que les seuls éléments de S, qui sont peut-être non nuls, sont de la forme $s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}$, et *ces derniers se trouvent évidemment sur l'adiagonale.* Si dans (v) ou (vi) on remplace $\bar{\mu}_k$ par μ_k (donc μ_k par $\bar{\mu}_k$), et si on fait $\nu_l = \bar{\mu}_l$ $(l = 1, \dots, r)$, on obtient

$$s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r} = \pm (-1)^k\, s^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}\, \bar{\mu}_k\, \mu_{k+1} \dots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{k-1}\, \mu_k\, \bar{\mu}_{k+1} \dots \bar{\mu}_r}\,, \tag{vii}$$

ce qui montre qu'à partir d'un élément adiagonal, par exemple $s^{0 \dots 0}_{1 \dots 1}$, *tous les autres s'en déduisent par un changement de signe.*

Séparons maintenant la considération de (vii) en deux cas suivant les signes $\pm$ à droite. Prenons le signe supérieur et appliquons la formule (vii) successivement pour $k = 1, \dots, r$; on obtient

$$s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r} = (-1)^{\frac{1}{2} r (r+1)}\, s^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}_{\mu_1 \dots \mu_r}\,,$$

qui exprime la relation entre deux éléments symétriquement opposés de l'adiagonale ; il s'ensuit que *la matrice S est symétrique ou antisymétrique selon que $\frac{1}{2} r (r+1)$ est pair ou impair*, c'est-à-dire $r \equiv 0{,}3$ *ou* $1{,}2$ (*mod* 4).

Prenons le signe inférieur et appliquons (vii) pour $k = 1, \dots, r$ successivement ; on trouve maintenant

$$s^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r} = (-1)^{\frac{1}{2} r (r-1)}\, s^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_r}_{\mu_1 \dots \mu_r}\,,$$

d'où *S est une matrice symétrique ou antisymétrique selon que $\frac{1}{2} r (r-1)$ est pair ou impair*, c'est-à-dire $r \equiv 0{,}1$ *ou* $2{,}3$ (*mod* 4).

S étant une matrice adiagonale dont les éléments adiagonaux ont la même valeur absolue, on voit immédiatement que *le produit $S\bar{S}$ a la forme ϱI ou $-\varrho I$ ($\varrho > 0$) selon que S est symétrique ou antisymétrique.* On peut aussi en vérifier directement.

Supposons maintenant $q = 2r + 1$. Donc (i) consiste en (ii) et, en outre, la condition

$$U'_{2r+1} S = \mp S\, U_{2r+1} \,.$$

Les résultats que nous venons d'établir au-dessus subsistent encore. D'après (4) on a $U'_{2r+1} = U_{2r+1}$, et alors la condition précédente s'écrit $U_{2r+1} S = \mp S\, U_{2r+1}$, ce qui donne, puisque $U_{2r+1} = \sqrt{-1}\left(r^{\mu_1}_{\nu_1} \ldots r^{\mu_r}_{\nu_r}\right)$ d'après (4),

$$\sum_{\sigma} r^{\mu_1}_{\sigma_1} \ldots r^{\mu_r}_{\sigma_r}\, s^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \mp \sum_{\sigma} s^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}\, r^{\sigma_1}_{\nu_1} \ldots r^{\sigma_r}_{\nu_r} ,$$

c'est-à-dire

$$(-1)^{\mu_1 + \cdots + \mu_r}\, s^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \mp (-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_r}\, s^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_r} .$$

En faisant $\nu_l = \bar{\mu}_l$ $(l = 1, \ldots, r)$ dans la dernière équation on obtient $[1 \pm (-1)^r]\, s^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \ldots \bar{\mu}_r} = 0$; d'où, *pour le signe supérieur et r pair, ou pour le signe inférieur et r impair, on a* $s^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\bar{\mu}_1 \ldots \bar{\mu}_r} = 0$, c'est-à-dire $S = 0$. Les Lemmes 1, 2 sont complètement démontrés.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] *A. Hurwitz*, „Über die Komposition der quadratischen Formen", Math. Ann. 88 (1923) 1—25.

[2] *J. Radon*, „Lineare Scharen orthogonaler Matrizen", Abh. Sem. Hamburg 1 (1922) 1—14.

[3] *B. Eckmann*, „Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen", Commentarii Math. Helv. 15 (1943) 358—366.

[4] *H. C. Lee*, „On Clifford's algebra", J. of London Math. Soc. 20 (1945) 27—32.

[5] *R. Brauer* and *H. Weyl*, „Spinors in *n* dimensions", Amer. J. of Math. 57 (1935), 425—449.

[6] *H. Weyl*, The classical groups (1939).

[7] *F. D. Murnaghan*, The theory of group representations (1938).

[8] *I. Schur*, „Ein Satz über quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten", *Amer. J. of Math.* 67 (1945) 472—480.

[9] *R. Dubisch*, „Composition of quadratic forms", Ann. of Math. 47 (1946) 510—527.

(Reçu le 1er septembre 1947.)