

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 21 (1948)

**Artikel:** Dreikreisesatz und Zentrumproblem.  
**Autor:** Cremer, Hubert  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18605>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Dreikreisesatz und Zentrumproblem

Von HUBERT CREMER, Aachen

Das Zentrumproblem, das ist die Frage nach notwendigen oder hinreichenden Bedingungen dafür, daß die analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $z$

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad |a_1| = 1 \quad (1)$$

in der Umgebung des Nullpunktes als transformierte Drehung, d. h. in der Form

$$f(z) = \varphi(a_1 \varphi^{-1}(z)) \quad (2)$$

mit

$$z = \varphi(w) = c_1 w + c_2 w^2 + \dots, \quad c_1 \neq 0 \quad (3)$$

dargestellt werden kann, ordnet sich in zwei große Ideenkreise organisch ein. Der eine ist die Theorie der Iteration der rationalen und der ganzen Funktionen, welche insbesondere von *Julia* und *Fatou* entwickelt worden ist; die lange ungelöste, erst jetzt durch *Siegel*<sup>1)</sup> entschiedene Hauptfrage dieser Theorie nach der Existenz nichtkonstanter Grenzfunktionen der Folge der Iterierten hängt auf das engste mit dem Zentrumproblem zusammen. Der andere ist die Uniformisierungstheorie; hier fand das Problem bei einem Versuch, die Abbildbarkeit der körperlichen Ecke auf die Kreisfläche zu beweisen, bereits das Interesse von *H. A. Schwarz*<sup>2)</sup>.

*Siegel* bewies 1942<sup>1)</sup>, daß die *Schrödersche* Funktionalgleichung (2) für fast alle Multiplikatoren, nämlich diejenigen, für welche

$$\log |a_1^n - 1| = O(\log n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4)$$

gilt, immer lösbar ist. Jede Funktion (1), deren Multiplikator  $f'(0) = a_1$

---

<sup>1)</sup> *C. L. Siegel*, Iteration of analytic functions, *Annals of Mathematics* 43 (1942) S. 607 ff.

<sup>2)</sup> Eine Darstellung dieser Zusammenhänge sowie ausführliche Literaturangaben zur Geschichte des Zentrumproblems findet der Leser in der Arbeit des Verf.: *H. Cremer*, Über die *Schrödersche* Funktionalgleichung und das *Schwarzsche* Eckenabbildungsproblem, *Leipziger Berichte* 84 (1932) S. 291—324.

der Bedingung (4) genügt, läßt sich also als transformierte Drehung darstellen. Zu allen Multiplikatoren, welche die Bedingung

$$\limsup_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n} \log |a_1^n - 1| = \infty \quad (5)$$

erfüllen, lassen sich dagegen<sup>3)</sup> Funktionen (1) konstruieren, für die (2) unlösbar ist. Die der Bedingung (4) genügenden Multiplikatoren umfassen alle Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme einer Menge  $\mathfrak{U}$  vom Lebesgueschen Maße Null. Die Multiplikatoren von  $\mathfrak{U}$  haben die Eigenschaft, daß ihre Potenzen  $a_1^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  die 1 besonders gut approximieren. Für solche Multiplikatoren und verschiedene Klassen von Funktionen hatte der Verf. schon früher<sup>2)</sup> die Unlösbarkeit der Schröderschen Funktionalgleichung bewiesen.

Im Hinblick auf das *Siegelsche* Resultat dürfte ein kurzer Beweis des folgenden Satzes von Interesse sein, welcher — grob formuliert — besagt, daß eine nichtlineare ganze Funktion  $g(z)$  sich jedenfalls dann nicht in der Form (2) darstellen läßt, wenn  $g'(0) = a_1$  gewissen, nur vom Wachstum von  $g(z)$  abhängenden Teilmengen von  $\mathfrak{U}$  angehört<sup>4)</sup>. Dieser Beweis wird durch die Anwendung des *Hadamardschen* Dreikreisesatzes<sup>5)</sup> besonders einfach und durchsichtig.

**Satz.** Eine ganze Funktion  $g(z) = \sum_1^{\infty} a_v z^v$ , die sich

(I) in der Umgebung des Nullpunktes als transformierte Drehung, d. h. in der Form  $g(z) = \varphi(a_1 \varphi^{-1}(z))$  mit  $\varphi(z) = \sum_1^{\infty} c_v z^v$ ,  $c_1 \neq 0$  darstellen läßt,

(II) die langsamer wächst als eine vorgegebene (monoton wachsende) Vergleichsfunktion  $F(r) > r$  (d. h. für alle genügend großen  $r$  der Ungleichung  $\max_{|z| \leq r} |g(z)| < F(r)$  genügt), und

(III) deren Multiplikatorpotenzen  $a_1^n = g'(0)^n$  die 1 gemäß der für große  $r$  gültigen, nur von  $F(r)$ , d. h. von der vorgegebenen Schranke für das Wachstum von  $|g(z)|$  abhängenden Bedingung

$$\liminf_{n=1,2,\dots} |a_1^n - 1| F_n(r)^{\log r} = 0 \quad (6)$$

„besonders gut“ approximieren, ist linear:  $g(z) = a_1 z$ .

<sup>3)</sup> H. Cremer, Über die Häufigkeit der Nichtzentren, Math. Ann. 115 (1938) S. 578, (Formel 8).

<sup>4)</sup> Vgl. Cremer, Leipziger Berichte 84 (1932) S. 299 ff.

<sup>5)</sup> Cf. J. Hadamard, Selecta (Paris 1935), p. 94—95, Fußnote 2. — E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 76.

$F(r)$  soll hierbei eine im übrigen frei vorgebbare positive Funktion der positiv-reellen Variablen  $r$ ,  $F_n(r)$  ihre  $n$ -te Iterierte bedeuten ( $F_n(r) = F(F_{n-1}(r))$ ,  $F_1(r) = F(r)$ ).

Die Menge der Zahlen  $a_1$ , die der Bedingung (6) genügen, ist auf dem Einheitskreis überall dicht und besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums (bei jeder Wahl von  $F(r)$ ).

Auf Grund des eben formulierten Satzes lassen sich u. a. leicht Beispiele ganzer Funktionen jeder Ordnung und jedes Typus mit  $|g'(0)| = 1$ ,  $g'(0)^n \neq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  angeben, die keine Darstellung (2) gestatten. Nach dem *Siegelschen* Satze kann man aber durch eine beliebig kleine Änderung von  $a_1 = g'(0)$  allein (wobei die Bedingung  $|a_1| = 1$ ,  $a_1^n \neq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  erfüllt bleibt) für die abgeänderte Funktion eine solche Darstellung erreichen.

*Beweis des Satzes:* Es genügt zu zeigen, daß für eine passende Teilfolge  $g_{n_\nu}(z)$  der Iterierten von  $g(z)$  in der ganzen Ebene

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{n_\nu}(z) = z \quad (7)$$

gilt. Denn aus  $g(z_1) = g(z_2)$  folgt  $g_n(z_1) = g_n(z_2)$  und hieraus dann wegen (7)  $z_1 = z_2$ , also die Einwertigkeit und aus dieser die Linearität von  $g(z)$ .

Aus der Gültigkeit von (2) gewinnen wir zunächst eine Abschätzung für  $M_n(r) = \max_{|z|=r} |g_n(z) - z|$  in der Nähe des Nullpunktes. Durch  $z = \varphi(w)$  wird ein passender, zum Nullpunkt konzentrischer Kreis  $\mathfrak{R}$  der  $w$ -Ebene auf eine Umgebung  $\mathfrak{Z}$  des Nullpunktes der  $z$ -Ebene schlicht abgebildet. Einem kleineren (mit  $\mathfrak{R}$  konzentrischen) Kreise  $\mathfrak{R}_1$  entspricht hierbei eine ganz im Innern von  $\mathfrak{Z}$  enthaltene Umgebung  $\mathfrak{Z}_1$  des Nullpunktes. Da  $\varphi'(w)$  in der abgeschlossenen Hülle von  $\mathfrak{R}_1$  beschränkt ist, gibt es eine Schranke  $K_1$ , derart, daß in  $\mathfrak{R}_1$

$$|\varphi(w_2) - \varphi(w_1)| < K_1 |w_2 - w_1|$$

gilt. Nun ist  $g_n(z) = \varphi(a_1^n w)$  ( $z$  in  $\mathfrak{Z}$ ), also haben wir für alle  $z$  in  $\mathfrak{Z}_1$

$$|g_n(z) - z| = |\varphi(a_1^n w) - \varphi(w)| < K_1 |a_1^n w - w| < K |a_1^n - 1|.$$

Die eben bewiesene Abschätzung

$$M_n(r) < K |a_1^n - 1| \quad (8)$$

gelte für  $r \leq \varrho$ ,  $0 < \varrho < 1$ .

Für große  $r$  gilt

$$M_n(r) < F_n(r) + r < 2F_n(r) . \quad (9)$$

Der Beweis läßt sich nun mit Hilfe des *Hadamardschen* „Dreikreisesatzes“ sofort erbringen. Dieser gestattet eine Abschätzung des absoluten Betrages  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  einer in einem Kreisring  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  regulären und eindeutigen analytischen Funktion  $f(z)$ , wenn Schranken für  $M(r_1)$  und  $M(r_2)$  bekannt sind. Ist nämlich  $M(r_1) \leq M_1$ ,  $M(r_2) \leq M_2$ , so gilt nach *Hadamard*<sup>5)</sup> für  $r_1 \leq r \leq r_2$ :

$$M(r) \leq M_1^{\frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}}} \cdot M_2^{\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} . \quad (10)$$

Wegen (8) und (9) liefert (10) mit  $r_1 = \varrho$ ,  $r_2 = 3r\varrho$  unmittelbar

$$M_n(r\varrho) \leq K^{\frac{\log 3}{\log 3r}} |a_1^n - 1|^{\frac{\log 3}{\log 3r}} [2F_n(3r\varrho)]^{\frac{\log r}{\log 3r}} \quad (11)$$

und hieraus folgt wegen (6) nach einer leichten Umformung (man ersetze dabei in (6)  $r$  durch  $3r$ ) die Behauptung (7).

(Eingegangen den 7. Juli 1947.)