

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 21 (1948)

**Artikel:** La théorie de Galois des anneaux simples et semi-simples.  
**Autor:** Dieudonné, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18604>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# La théorie de Galois des anneaux simples et semi-simples (1)

Par JEAN DIEUDONNÉ, Nancy

Nous nous proposons, dans ce travail, de généraliser dans différentes directions la théorie de Galois des corps non commutatifs développée récemment par MM. *N. Jacobson* (2) et *H. Cartan* (3), et qui elle-même contient comme cas particulier la théorie de Galois classique des corps commutatifs. Notre généralisation consiste, d'une part, à considérer, au lieu de corps, des anneaux simples ou semi-simples, et d'autre part, à éliminer les restrictions de «dimension finie» qui interviennent dans la théorie de Jacobson-Cartan. Les outils principaux dans cette étude sont, d'une part les propriétés des sous-anneaux *commutants* d'un anneau d'endomorphismes d'un groupe abélien, et d'autre part l'utilisation d'une idée (qui remonte à Dedekind et Artin, et a déjà été exploitée avec succès par N. Jacobson et H. Cartan dans les mémoires précités) relative à l'*indépendance linéaire* de certains types d'endomorphismes.

1. *Sous-anneaux commutants d'un anneau d'endomorphismes.* Soit  $E$  un groupe abélien additif (sans opérateur),  $\mathfrak{E}$  son anneau d'endomorphismes ; nous considérons dans ce qui suit diverses structures de groupe abélien à opérateurs définies sur  $E$  par la donnée de sous-ensembles de  $\mathfrak{E}$  (généralement des sous-anneaux) dont les éléments sont pris comme opérateurs sur  $E$ . Lorsqu'on considère sur  $E$  une telle structure, définie par la donnée d'une partie  $\Omega$  de  $\mathfrak{E}$ , l'*anneau d'endomorphismes* du groupe abélien à opérateurs  $E$  ainsi défini n'est autre que le sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  formé des éléments qui *permettent* avec tous les éléments de  $\Omega$  ; nous dirons que c'est le sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  *commutant* avec  $\Omega$  (ou encore l'*anneau commutant* de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{E}$ ) ; il contient toujours l'élément unité de  $\mathfrak{E}$ .

Nous aurons parfois à considérer sur  $\mathfrak{E}$  la topologie de la *convergence simple*, lorsqu'on prend sur  $E$  la topologie *discrète* ; autrement dit, c'est

---

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

(2) Voir [5] et [8].

(3) Voir [2].

la topologie induite sur  $\mathfrak{E}$  par la topologie de l'espace produit  $E^E$  de toutes les applications de  $E$  dans  $E$  ; il est immédiat que  $\mathfrak{E}$  est fermé dans  $E^E$ . D'autre part, pour cette topologie, on vérifie aussitôt que les applications  $(u, v) \rightarrow u + v$ ,  $u \rightarrow -u$  et  $(u, v) \rightarrow u v$  sont continues, autrement dit,  $\mathfrak{E}$  est un *anneau topologique* (4) ; par suite, l'anneau commutant d'une partie quelconque de  $\mathfrak{E}$  est fermé.

Commençons par rappeler le lemme suivant, cas particulier d'un résultat de *N. Jacobson* (5) :

**Lemme 1.** — *Si  $K$  est un sous-corps de  $\mathfrak{E}$ , contenant l'élément unité de  $\mathfrak{E}$ , et  $A$  l'anneau commutant de  $K$  dans  $\mathfrak{E}$ ,  $K$  est l'anneau commutant de  $A$  dans  $\mathfrak{E}$ .*

Tout sous-corps de  $\mathfrak{E}$  contenant l'élément unité de  $\mathfrak{E}$  est donc fermé. Soit maintenant  $\Omega$  une partie de  $\mathfrak{E}$  telle que  $E$ , considéré comme groupe à opérateurs sur  $\Omega$ , soit *complètement réductible* (6), c'est-à-dire somme directe d'une famille (finie ou non)  $(M_\alpha)$  de sous-groupes *simples* ; nous supposerons en outre qu'aucun des  $M_\alpha$  n'est annulé par  $\Omega$  ; rappelons comment on détermine la structure de l'anneau  $A$  commutant avec  $\Omega$  (7). Soit  $(G_\lambda)$  la famille des *composants homogènes* de  $E$  : nous appelons ainsi les sous-groupes de  $E$  obtenus en faisant la somme de ceux des  $M_\alpha$  qui sont deux à deux isomorphes ;  $E$  est somme directe des  $G_\lambda$  ; soit  $c_\lambda(x)$  le composant dans  $G_\lambda$  d'un élément quelconque  $x$  de  $E$ . A chaque endomorphisme  $u \in A$  correspond de façon biunivoque une famille  $(u_{\mu\lambda})$ , où  $u_{\mu\lambda}$  est la restriction de  $c_\mu u$  à  $G_\lambda$  ; mais si  $\lambda \neq \mu$ , on a nécessairement  $u_{\mu\lambda} = 0$ , car pour tout  $\alpha$  tel que  $M_\alpha \subset G_\lambda$ , la restriction de  $u_{\mu\lambda}$  à  $M_\alpha$  est un homomorphisme de  $M_\alpha$  dans  $G_\mu$ , donc est un isomorphisme ou est identiquement nulle ; mais dans le premier cas,  $u_{\mu\lambda}(M_\alpha)$  serait un sous-groupe simple isomorphe à  $M_\alpha$  et contenu dans  $G_\mu$ , ce qui est impossible, puisque  $G_\mu$  est somme directe de sous-groupes simples non isomorphes à  $M_\alpha$ . Il y a donc correspondance biunivoque entre  $u \in A$  et la famille  $(u_{\lambda\lambda})$  ;  $u_{\lambda\lambda}$  est la restriction de  $u$  à  $G_\lambda$ , et est un endomorphisme de  $G_\lambda$  ; on l'identifiera d'ailleurs à l'endomorphisme  $c_\lambda u c_\lambda \in A$ , identique à  $u_{\lambda\lambda}$ .

(4) Voir *N. Bourbaki*, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. III, § 5 (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 916, Paris (Hermann), 1942).

(5) Voir [6], p. 233, th. 7.

(6) Les propriétés fondamentales des modules complètement réductibles sont rappelées par exemple dans [3], p. 49—50. Nous dirons qu'un module complètement réductible est *semi-simple* s'il est somme directe d'un nombre fini de modules simples.

(7) Voir [9], p. 166—169 pour le cas d'un module semi-simple, et [3], p. 55, pour le cas général. Voir aussi *N. Jacobson*, *The theory of rings* (*Math. Surveys*, n° 2, 1943), p. 25, th. 11 et 12.

dans  $G_\lambda$ , à 0 dans les autres  $G_\mu$  ; si  $A_\lambda$  est l'anneau des  $u_{\lambda\lambda}$  (identifié à l'anneau des endomorphismes de  $G_\lambda$ ),  $A$  est donc isomorphe au *produit* des anneaux  $A_\lambda$ .

Etudions chacun des  $A_\lambda$ . Désignons par  $M$  un des sous-groupes simples  $M_\alpha$  dont  $G_\lambda$  est somme directe, et pour chacun des indices  $\alpha$ , soit  $\varphi_\alpha$  un isomorphisme de  $M$  sur  $M_\alpha$ . Soit  $L$  le corps des endomorphismes du sous-groupe simple  $M$ , et  $e$  un élément  $\neq 0$  de  $M$  ; si  $\varrho \in L$ , la relation  $\varrho e = 0$  entraîne  $\varrho = 0$  puisque tout endomorphisme de  $M$  qui n'est pas un automorphisme est nul ; donc  $F = L \cdot e$  est un espace vectoriel à gauche sur  $L$ , de dimension 1 ; l'ensemble des endomorphismes de cet espace vectoriel est un corps  $L^0$  opposé à  $L$ , et  $F$  est aussi un espace vectoriel de dimension 1 sur  $L^0$ . Si on pose  $F_\alpha = \varphi_\alpha(F)$ ,  $F_\alpha$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps  $L_\alpha = \varphi_\alpha L \varphi_\alpha^{-1}$  des endomorphismes de  $M_\alpha$ , et son corps d'endomorphismes est  $L_\alpha^0 = \varphi_\alpha L^0 \varphi_\alpha^{-1}$  ; on peut considérer chacun des  $F_\alpha$  comme espace vectoriel de dimension 1 sur  $L^0$ , en posant, pour tout  $\varrho \in L^0$  et tout  $x_\alpha = \varphi_\alpha(x) \in F_\alpha$ ,  $\varrho x_\alpha = \varphi_\alpha(\varrho x)$ . La somme directe  $N$  des  $F_\alpha$  est donc un espace vectoriel sur  $L^0$  ; nous allons voir que les restrictions des endomorphismes  $u \in A_\lambda$  à  $N$  sont des endomorphismes de cette structure d'espace vectoriel de  $N$ , et que réci-proquement, chacun endomorphisme de cette structure est restriction d'un endomorphisme et un seul appartenant à  $A_\lambda$ . En effet, soit  $h_\alpha(x)$  le composant dans  $M_\alpha$  d'un élément quelconque  $x \in G_\lambda$  ; un endomorphisme quelconque  $u \in A_\lambda$  est entièrement déterminé par la donnée de ses restrictions  $u_\alpha$  aux  $M_\alpha$ , et chaque  $u_\alpha$  est entièrement déterminé par la donnée des  $u_{\beta\alpha} = h_\beta u_\alpha$ , représentation de  $M_\alpha$  dans  $M_\beta$  ; comme, pour tout  $x_\alpha \neq 0$  dans  $M_\alpha$ , on a  $u_\alpha(x_\alpha) = \sum_\beta h_\beta(u_\alpha(x_\alpha))$  et que la somme du second membre n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, on a  $u_{\beta\alpha} = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $\beta$  (pour chaque indice  $\alpha$ ). Cela étant,  $v_\alpha = \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} u_{\beta\alpha}$  est un endomorphisme de  $M_\alpha$  ; il applique donc  $F_\alpha$  dans lui-même, donc  $u_{\beta\alpha}$  applique  $F_\alpha$  dans  $F_\beta$  ; en outre, pour tout  $x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ , avec  $x \in F$ , et tout  $\varrho \in L^0$ , on a par définition  $v_\alpha(\varrho x_\alpha) = v_\alpha(\varphi_\alpha(\varrho x))$ , d'où  $u_{\beta\alpha}(\varrho x_\alpha) = \varphi_\beta(v(\varrho x))$  où  $v = \varphi_\alpha^{-1} v_\alpha \varphi_\alpha$  est un endomorphisme de  $M$  ; on a par suite  $v(\varrho x) = \varrho v(x)$ , et par définition  $\varphi_\beta(\varrho v(x)) = \varrho \varphi_\beta(v(x))$ , ce qui montre que  $u$  est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel  $N$ . Inversement, tout endomorphisme de cet espace vectoriel est la restriction d'un endomorphisme  $u \in A_\lambda$  et d'un seul ; en effet, si  $u_{\beta\alpha}$  est une application linéaire de l'espace vectoriel  $F_\alpha$  dans l'espace vectoriel  $F_\beta$ , on voit comme ci-dessus que  $u_{\beta\alpha} = \varphi_\beta v \varphi_\alpha^{-1}$ , où  $v$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $F$  ; par suite,  $v$  appartient au corps  $L$ ,

et  $u_{\beta\alpha}$  est bien la restriction à  $F_\alpha$  d'un endomorphisme de  $M_\alpha$  dans  $M_\beta$  ; ce dernier est d'ailleurs unique, puisqu'un endomorphisme de  $M_\alpha$  dans  $M_\beta$  qui s'annule en un point  $\neq 0$  de  $M_\alpha$  est identiquement nul.

Nous avons ainsi prouvé que  $A_\lambda$  est isomorphe à l'anneau de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel  $N$  sur le corps  $L^0$  ; cherchons maintenant, dans l'anneau  $\mathfrak{E}$ , le sous-anneau  $B$  commutant avec l'anneau  $A = \prod A_\lambda$ . Pour cela, remarquons que  $M$  est un espace vectoriel sur le corps  $L$  ; soit  $(e_\gamma)$  une base de cet espace, dont  $e$  est un des éléments, et pour chaque  $\gamma$ , soit  $N_\gamma$  la somme directe de tous les sous-groupes  $\varphi_\alpha(L \cdot e_\gamma)$  ( $\alpha$  variable) ; il est clair que  $G_\lambda$  est somme directe des  $N_\gamma$ , et d'après ce qui précède, chaque  $N_\gamma$  est un module simple sur l'anneau  $A_\lambda$  (car, étant donné deux éléments  $\neq 0$  d'un espace vectoriel, il existe toujours un endomorphisme de cet espace qui transforme l'un en l'autre) ; en outre, deux quelconques des  $N_\gamma$  sont isomorphes (en tant que  $A_\lambda$ -modules), car l'hypothèse que  $M$  est simple pour les opérateurs de  $\Omega$  entraîne qu'il existe un opérateur  $\omega \in \Omega$  au moins (ou un élément du sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  engendré par  $\Omega$ , élément qu'on peut encore désigner par  $\omega$ ) tel que  $e_\gamma = \omega \cdot e$ , ce qui entraîne  $N_\gamma = \omega \cdot N$ , et l'application  $x \mapsto \omega \cdot x$  de  $N$  sur  $N_\gamma$  est un isomorphisme pour la structure de  $A_\lambda$ -module, puisque  $u(\omega \cdot x) = \omega \cdot u(x)$  pour tout  $u \in A_\lambda$  par hypothèse. Comme d'autre part, pour tout  $u \in A$  et tout  $x \in G_\lambda$ , on a  $u(x) = u_{\lambda\lambda}(x)$ , on voit que  $E$  est un  $A$ -module complètement réductible. La première partie du raisonnement montre alors que  $B$  est isomorphe au produit des anneaux  $B_\lambda$ , où  $B_\lambda$  est l'anneau des endomorphismes du  $A_\lambda$ -module  $G_\lambda$  ; en outre, d'après le lemme 1, le corps des endomorphismes du  $A_\lambda$ -module simple  $N$  est isomorphe à  $L^0$  ; donc  $B_\lambda$  est isomorphe à l'anneau des restrictions à  $M$  des endomorphismes  $v \in B_\lambda$ , et ce dernier anneau est identique à l'anneau de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel  $M$  sur le corps  $L$ .

L'anneau des endomorphismes  $\Omega(M)$  d'un espace vectoriel  $M$  sur un corps  $L$  est un anneau *primitif* dans la terminologie de *N. Jacobson* (8). Nous dirons que c'est un *anneau primitif complet* (9) : on sait (10) qu'il admet un *socle*  $S$  qui est un anneau simple, et qu'il est entièrement déterminé (à un isomorphisme près) par la donnée de son socle. Nous dirons

---

(8) Voir [7], p. 312.

(9) Un tel anneau peut effectivement être caractérisé intrinsèquement (parmi les anneaux primitifs) par la propriété d'être *complet* pour la structure uniforme de la convergence simple, quand on considère l'anneau primitif comme anneau d'endomorphismes d'un de ses idéaux à gauche minimaux, muni de la topologie discrète. Voir [3], p. 68, et *N. Jacobson*, *On the theory of primitive rings*, *Annals of Mathematics*, t. 48 (1947), p. 7—21.

(10) Pour la définition et les propriétés du *socle* d'un anneau, voir [3], p. 51 et suiv.

qu'un produit d'anneaux primitifs complets est un *anneau semi-simple* (11) *complet* ; on voit aisément que son socle la somme directe des socles des anneaux facteurs. Cela étant, soit  $A$  un anneau semi-simple complet, contenu dans  $\mathfrak{E}$ , et contenant l'élément unité de  $\mathfrak{E}$ . Si  $S$  est le socle de  $A$  le sous-groupe  $S \cdot E$  de  $E$  (engendré par les  $u(x)$ , où  $u$  parcourt  $S$  et  $x$  parcourt  $E$ ) est un  $S$ -module *complètement réductible*, car  $S$  étant somme de ses idéaux minimaux,  $S \cdot E$  est somme des sous-modules  $I \cdot x$ , où  $I$  parcourt l'ensemble des idéaux minimaux de  $S$ , et  $x$  parcourt  $E$  ; mais  $I \cdot x$  est nul ou est un  $S$ -module simple isomorphe à  $I$ , donc  $S \cdot E$  est somme de  $S$ -modules simples et par suite complètement réductible ; a fortiori,  $S \cdot E$  est un  $A$ -module complètement réductible, car chaque  $I \cdot x$  est un  $A$ -module simple. On en conclut que, si  $S \cdot E = E$ ,  $E$  est un  $A$ -module complètement réductible, auquel s'applique donc la théorie précédente : l'anneau commutant de  $A$  est un anneau semi-simple complet  $B$  ; inversement,  $A$  est l'anneau commutant de  $B$ . En effet, il suffit de démontrer ce dernier point lorsque  $A$  est primitif complet ; si  $M$  est un sous-module simple de  $E$ , isomorphe à un idéal minimal de  $A$ ,  $L$  son corps d'endomorphismes,  $M$  est un espace vectoriel sur  $L$  et l'ensemble des restrictions des endomorphismes  $v \in A$  à  $M$  est identique à l'anneau de tous les endomorphismes de cet espace vectoriel (12) ; cet ensemble est donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, identique à l'ensemble des restrictions à  $M$  des endomorphismes appartenant à l'anneau commutant de  $B$  ; cela ayant lieu pour tout sous-module simple de  $E$ , la proposition est bien établie.

La condition  $S \cdot E = E$  peut encore s'exprimer en disant que  $A$  est contenu dans l'*adhérence* de son socle  $S$  dans  $\mathfrak{E}$  ; cette dernière condition entraîne en effet  $S \cdot E = E$  de façon évidente ; réciproquement, si  $S \cdot E = E$  est vérifiée, pour tout endomorphisme  $u \in A$ , et un nombre fini quelconque d'éléments  $x_i \in E$ , il existe un  $v \in S$  tel que  $v(x_i) = u(x_i)$  pour tout  $i$  ; en effet,  $E$  est alors somme directe de  $S$ -modules simples  $M_\alpha$  ; on peut se borner au cas où chacun des  $x_i$  appartient à un  $M_\alpha$  ; en groupant ceux des  $M_\alpha$  qui sont isomorphes, et tenant compte de la définition du socle d'un anneau primitif complet, on se ramène finalement à prouver qu'étant donné un endomorphisme  $u_0$  d'un espace vectoriel  $F$ , il existe toujours un endomorphisme  $v_0$  de  $F$ , de rang *fini*, qui coïncide avec  $u_0$  en

---

(11) La définition générale des anneaux semi-simples est due à N. Jacobson (voir [7], p. 304). Un anneau semi-simple complet peut encore être caractérisé intrinsèquement parmi les anneaux semi-simples par le fait d'être représenté isomorphiquement comme anneau d'endomorphismes de son socle  $S$ , et d'être complet pour la structure de la convergence simple dans  $S$  (muni de la topologie discrète).

(12) Voir [4], p. 61.

un nombre fini d'éléments donnés, ce qui est immédiat. En résumé, on a donc prouvé le théorème suivant :

**Théorème 1.** — *Pour tout sous-anneau semi-simple complet  $A$  de  $\mathfrak{E}$ , contenant l'élément unité de  $\mathfrak{E}$ , et contenu dans l'adhérence de son socle (dans  $\mathfrak{E}$ ), le sous-anneau  $B$  de  $\mathfrak{E}$  commutant avec  $A$  est un anneau ayant les mêmes propriétés, et  $A$  est le sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  commutant avec  $B$ .*

Les conditions de l'énoncé entraînent en particulier que  $A$  est *fermé* dans  $\mathfrak{E}$ , donc non seulement contenu dans l'adhérence de son socle, mais identique à cette adhérence. Ces conditions sont en particulier remplies de façon évidente lorsque  $A$  est un anneau semi-simple de longueur *finie* (c'est-à-dire un anneau semi-simple au sens classique), puisqu'il est alors identique à son socle. Par contre, on peut aisément donner des exemples d'anneaux semi-simples complets  $A$  contenus dans un anneau  $\mathfrak{E}$ , mais non contenus dans l'adhérence de leur socle par rapport à  $\mathfrak{E}$ . Considérons en effet un espace vectoriel  $F$  de dimension infinie, et prenons pour  $E$  l'anneau de tous ses endomorphismes, pour  $A$  l'anneau (dont la structure est isomorphe à la structure d'anneau de  $E$ ) des homothétries à gauche  $v \rightarrow u v$  de  $E$  ; si  $S$  est le socle de  $A$ , il est clair que  $S \cdot E$  est le socle de l'anneau  $E$ , donc distinct de  $E$ .

Nous dirons pour abréger qu'un sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  qui est semi-simple, complet, contient l'élément unité de  $\mathfrak{E}$  et est identique à l'adhérence de son socle, est *distingué*.

Il résulte de la démonstration du théorème 1 que, lorsque  $A$  est un anneau primitif complet (distingué), il en est de même de  $B$ . Soient  $A, A'$  deux anneaux primitifs complets (distingués) tels que  $A' \subset A$  ; nous allons préciser le théorème 1 en montrant comment certaines relations entre  $A$  et  $A'$  donnent, par «dualité», des relations analogues entre les anneaux commutants  $B$  et  $B'$ .

De façon générale, soient  $A, A'$  deux anneaux primitifs complets tels que  $A' \subset A$  et que  $A'$  contienne l'élément unité de  $A$  ; un raisonnement d'Artin et Whaples pour les anneaux simples de longueur finie (13) s'étend au cas général, et montre que si  $I_1$  et  $I_2$  sont deux idéaux minimaux à gauche (nécessairement isomorphes) de  $A'$ ,  $A \cdot I_1$  et  $A \cdot I_2$  sont deux idéaux isomorphes dans  $A$  ; si un idéal minimal  $I$  de  $A'$  est donc tel que  $A \cdot I$  soit un idéal de longueur finie de  $A$ , tout autre idéal minimal de  $A'$  a la même propriété, et la longueur des idéaux de  $A$  ainsi obtenus est un invariant, que nous appellerons l'*indice* (à gauche) de  $A'$  par rapport à  $A$  ;

---

(13) Voir [1], p. 102.

lorsque  $A \cdot I$  est somme directe d'une infinité d'idéaux minimaux de  $A$ , nous dirons que l'indice de  $A'$  par rapport à  $A$  est infini ; enfin, l'indice n'est pas défini si  $A \cdot I$  n'est pas somme directe d'idéaux minimaux. D'autre part, tout idéal minimal à gauche de  $A$  (ou, ce qui revient au même, tout  $A$ -module simple isomorphe à un tel idéal) est un  $A'$ -module à gauche, et deux idéaux minimaux de  $A$  sont des  $A'$ -modules isomorphes ; si un idéal minimal de  $A$  est un  $A'$ -module de longueur finie, cette longueur est un nouvel invariant, que nous appellerons la *hauteur* (à gauche) de  $A$  par rapport à  $A'$  ; si un idéal minimal de  $A$  est un  $A'$ -module complètement réductible, somme directe d'une infinité de  $A'$ -modules simples isomorphes à un idéal minimal de  $A'$ , nous dirons que la hauteur de  $A$  par rapport à  $A'$  est infinie ; enfin, la hauteur n'est pas définie lorsqu'un idéal minimal de  $A$  n'est pas un  $A'$ -module complètement réductible. Il est immédiat que l'indice et la hauteur sont *multiplicatifs* lorsqu'ils sont finis, c'est-à-dire que si  $A \supset A' \supset A''$ , l'indice de  $A''$  par rapport à  $A$  est le produit de celui de  $A'$  par rapport à  $A$  et de celui de  $A''$  par rapport à  $A'$ , et de même pour les hauteurs. Le produit de l'indice et de la hauteur (quand tous deux sont finis) n'est autre, dans le cas classique, que le *degré* (à gauche) de  $A$  par rapport à  $A'$ , tel qu'il est défini par Artin et Whaples (13) ; dans le cas général, dire que ce degré est fini et égal à  $n$  signifie que, pour tout idéal minimal  $I$  de  $A'$ ,  $A \cdot I$  est un  $A'$ -module de longueur  $n$ .

Lorsque  $A$  et  $A'$  sont deux anneaux primitifs complets *distingués* dans  $\mathfrak{E}$ , et tels que  $A' \subset A$ , la hauteur de  $A$  par rapport à  $A'$  est toujours définie ; en effet,  $E$  est alors somme directe de  $A$ -modules simples  $M_\alpha$  isomorphes à un idéal minimal de  $A$  ; si  $S'$  est le socle de  $A'$ , on a par hypothèse  $S' \cdot E = E$ , et a fortiori  $S' \cdot M_\alpha = M_\alpha$ , puisque  $S' \cdot M_\alpha \subset M_\alpha$  ; donc  $M_\alpha$  est un  $S'$ -module complètement réductible, et a fortiori un  $A'$ -module complètement réductible, somme directe de  $A'$ -modules simples isomorphes aux idéaux minimaux de  $A'$ .

Cela étant, on a la relation de dualité suivante :

**Théorème 2.** — *Soient  $A$ ,  $A'$  deux sous-anneaux primitifs complets distingués dans  $\mathfrak{E}$ ,  $B$  et  $B'$  leurs anneaux commutants respectifs. Si  $A \supset A'$ , et si la hauteur de  $A$  par rapport à  $A'$  (resp. l'indice de  $A'$  par rapport à  $A$ ) est finie, l'indice de  $B$  par rapport à  $B'$  (resp. la hauteur de  $B'$  par rapport à  $B$ ) est fini et lui est égal.*

Supposons en effet que la hauteur de  $A$  par rapport à  $A'$  soit égale à  $p$  ; conservons les notations de la démonstration du théorème 1, en permutant simplement les rôles de  $A$  et  $B$ . Chacun des  $A$ -modules simples  $M_\alpha$

est somme directe de  $p$   $A'$ -modules simples  $M'_{i\alpha}$ ; en particulier, soient  $M'_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) les  $p$   $A'$ -modules simples en lesquels se décompose  $M$ . Soit  $I$  l'idéal à gauche minimal de  $B$ , formé des endomorphismes  $u$  du  $A$ -module  $E$  qui sont nuls dans tous les  $M_\alpha$  distincts de  $M$ ; on peut écrire  $I = Bu_0$ , où  $u_0$  est l'endomorphisme (idempotent) nul dans les  $M_\alpha$  distinct de  $M$ , et dont la restriction à  $M$  est l'application identique. On a donc  $B'I = B'u_0$ , et il est immédiat que cet idéal est formé des endomorphismes  $u' \in B'$  du  $A'$ -module  $E$  qui sont nuls dans tous les  $M'_{i\alpha}$  distincts des  $M'_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ); on voit donc que cet idéal est de longueur  $p$  dans  $B'$ , autrement dit que  $B$  est d'indice  $p$  par rapport à  $B'$ . Le même raisonnement montre que, si  $A$  est de hauteur infinie par rapport à  $A'$ , l'indice de  $B$  par rapport à  $B'$  n'est pas défini; de ces deux propriétés, et de la réciprocité des sous-anneaux commutants dans  $\mathfrak{E}$ , on déduit le théorème.

**Corollaire.** — *Si le degré de  $A$  par rapport à  $A'$  est fini, le degré de  $B'$  par rapport à  $B$  est fini et lui est égal.*

On notera que si l'indice de  $A'$  par rapport à  $A$  est un nombre fini  $q$ , et si  $A'$  est de longueur finie  $n$ ,  $A$  est de longueur finie  $m = nq$ ; et réciproquement, si  $A$  est de longueur finie,  $n$  et  $q$  sont nécessairement finis; par contre, la hauteur de  $A$  sur  $A'$  peut être infinie lorsque  $A$  est de longueur finie.

On peut étendre les considérations qui précèdent au cas où  $A$  et  $A'$  sont des anneaux semi-simples complets (distingués dans  $\mathfrak{E}$ ) quelconques; nous nous bornerons sur ce point à de brèves indications auxquelles le lecteur suppléera sans peine. Soit  $A = \prod_\lambda A_\lambda$ ,  $A' = \prod_\mu A'_\mu$  les décompositions de  $A$  et  $A'$  en produit d'anneaux primitifs complets,  $B = \prod_\lambda B_\lambda$ ,  $B' = \prod_\mu B'_\mu$  les décompositions analogues de leurs anneaux commutants respectifs.  $E$  est somme directe de sous-groupes  $G_\lambda$ , qui sont à la fois des  $A$ -modules et des  $B$ -modules,  $G_\lambda$  étant annulé par tous les anneaux facteurs de  $A$  et de  $B$  autres que  $A_\lambda$  et  $B_\lambda$ . Comme  $A' \subset A$ ,  $G_\lambda$  est un  $A'$ -module; si  $H_{\lambda\mu}$  est la partie de  $G_\lambda$  qui est annulée par tous les facteurs de  $A'$  sauf  $A'_\mu$ ,  $H_{\lambda\mu}$  est un  $B_\lambda$ -module, et on vérifie aussitôt que  $G_\lambda$  est somme directe de ceux des  $H_{\lambda\mu}$  ( $\lambda$  fixe,  $\mu$  variable) qui ne sont pas nuls. Soit alors  $A''_{\lambda\mu}$  l'anneau (primitif complet) des endomorphismes du  $B_\lambda$ -module  $H_{\lambda\mu}$ ; dans l'anneau  $\mathfrak{E}_{\lambda\mu}$  des endomorphismes du groupe additif  $H_{\lambda\mu}$ ,  $A'_\mu$  et  $B_\lambda$  admettent des représentations isomorphes  $A'_{\lambda\mu}$  et  $B_{\lambda\mu}$ , et  $A''_{\lambda\mu}$  est l'anneau commutant de  $B_{\lambda\mu}$ ; si  $B''_{\lambda\mu}$  désigne l'anneau commutant de  $A'_{\lambda\mu}$  dans  $\mathfrak{E}_{\lambda\mu}$ , on est ramené, en ce qui concerne l'étude

des quatre anneaux  $A''_{\lambda\mu}$ ,  $A'_{\lambda\mu}$ ,  $B_{\lambda\mu}$ ,  $B''_{\lambda\mu}$ , au cas examiné dans le théorème 2. D'autre part, si  $G'_{\mu}$  est la somme (directe) de ceux des  $H_{\lambda\mu}$  ( $\lambda$  variable,  $\mu$  fixe) qui ne sont pas nuls,  $E$  est somme directe des  $G'_{\mu}$ , qui sont à la fois des  $A'$ -modules et des  $B'$ -modules,  $G'_{\mu}$  étant annulé par tous les facteurs de  $A'$  et de  $B'$  autres que  $A'_{\mu}$  et  $B'_{\mu}$ .

Lorsque  $A$  et  $A'$  sont des produits d'un nombre *fini* d'anneaux primitifs complets, nous dirons encore, pour abréger, que  $A$  est de *degré fini* sur  $A'$  si chacun des  $A''_{\lambda\mu}$  est de degré fini sur  $A'_{\lambda\mu}$  (pour les  $H_{\lambda\mu}$  non réduits à 0) ; alors chacun des  $B''_{\lambda\mu}$  est de degré fini par rapport à  $B_{\lambda\mu}$ . Dans le cas particulier où  $B$  est un *corps* et par suite  $A$  est primitif complet cela signifie que  $B'$  est de *dimension finie* quand on le considère comme un espace vectoriel (à gauche) sur le corps  $B$ .

2. *Sous-anneaux semi-simples complets d'un anneau primitif complet.* Nous allons à présent supposer que  $E$  est muni d'une structure d'espace vectoriel par rapport à un corps  $K$  contenu dans l'anneau  $\mathfrak{E}$  et contenant l'élément unité de  $\mathfrak{E}$  (14), et nous désignerons par  $A$  l'anneau primitif complet (contenu dans  $\mathfrak{E}$ ) formé de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel  $E$  ;  $K$  et  $A$  sont donc deux sous-anneaux commutants de  $\mathfrak{E}$  (lemme 1), leur intersection  $Z$  est leur centre commun. Nous allons considérer les sous-anneaux  $B$  de  $A$  qui sont *distingués* dans  $\mathfrak{E}$  ; le sous-anneau  $C$  de  $\mathfrak{E}$  commutant avec un tel anneau est lui aussi un anneau distingué, d'après le théorème 1, et contient évidemment  $K$ . Il y a donc correspondance biunivoque et réciproque entre les sous-anneaux distingués contenus dans  $A$  et ceux qui contiennent  $K$ . En particulier, si on prend pour  $B$  l'anneau  $A$  lui-même, l'anneau commutant  $C$  est identique à  $K$  ; si on prend pour  $B$  un *sous-corps*  $R$  de  $A$ , contenant l'élément unité de  $A$ ,  $C$  est identique à l'anneau  $U(R)$  de tous les endomorphismes de  $E$  considéré comme espace vectoriel sur le corps  $R$ .

Lorsque  $B$  et  $C$  sont des anneaux primitifs complets, l'indice de  $K$  par rapport à  $C$  est identique à la *longueur* de  $C$ , et la hauteur de  $C$  par rapport à  $K$  est la dimension sur  $K$  (à gauche) d'un idéal minimal (à gauche) de  $C$ . Le théorème 2 montre donc que la longueur de  $C$  est égale à la hauteur de  $A$  par rapport à  $B$ , et la dimension d'un idéal minimal de  $C$  égale à l'indice de  $B$  par rapport à  $A$  (lorsque ces nombres sont finis). De même, si  $R$  et  $S$  sont deux sous-corps de  $A$  tels que  $S \subset R$ , l'indice de  $S$  par rapport à  $R$  est 1, la hauteur de  $R$  par rapport à  $S$  égale au degré

---

(14) Ceci n'est évidemment pas possible pour un groupe abélien quelconque  $E$  ; on voit aussitôt que  $E$  doit être muni d'une structure d'espace vectoriel par rapport à un corps premier (corps des rationnels ou corps fini ayant un nombre premier d'éléments).

(à gauche) de  $R$  sur  $S$ , d'où les valeurs (faciles d'ailleurs à déterminer directement) de la hauteur de  $U(S)$  sur  $U(R)$  et de l'indice de  $U(R)$  dans  $U(S)$ .

Lorsque  $E$  est de dimension 1 sur  $K$ ,  $A$  est un corps isomorphe à l'opposé  $K^\theta$  de  $K$ , et tout sous-anneau distingué de  $A$  est un *sous-corps*  $B$  de  $K^\theta$ ; l'anneau commutant  $C$  de  $B$  est alors un anneau primitif complet, de hauteur 1 sur  $K$ , de longueur égale au degré (à gauche) de  $K^\theta$  sur  $B$ : on retrouve ainsi le résultat fondamental de Jacobson-Cartan, en tenant compte de ce que, dans ce cas particulier, tout sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  contenant  $K$  et qui est de dimension *finie* sur  $K$  (à gauche) est *automatiquement* un anneau simple de longueur finie (15) (naturellement, ce dernier résultat est inexact lorsque la dimension de  $E$  sur  $K$  est  $> 1$ ). Il serait intéressant d'avoir (toujours dans le cas où  $E$  est de dimension 1 sur  $K$ ) un critère qui caractériserait de même les anneaux primitifs complets  $C$  contenant  $K$ : on peut par exemple se demander si tout anneau  $C$  contenant  $K$  et *fermé* dans  $\mathfrak{E}$  est nécessairement un anneau primitif complet?

Revenons maintenant au cas général.

**Lemme 2** (16). — a) Si  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des applications semi-linéaires (17) de  $E$  dans lui-même, relatives à un même automorphisme  $\sigma$  du corps  $K$ , et qui sont linéairement indépendantes par rapport au centre  $Z$  de  $K$ , elles sont linéairement indépendantes par rapport à  $K$ .

b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{E}$  par rapport à  $K$ , engendré par un ensemble  $T$  d'applications semi-linéaires de  $E$  dans lui-même. Pour chaque classe  $\theta$  d'automorphismes de  $K$  modulo le groupe des automorphismes intérieurs de  $K$ , on désigne par  $F_\theta$  le sous-espace de  $F$  engendré par les applications semi-linéaires  $u \in T$  relatives à un automorphisme appartenant à la classe  $\theta$ ; l'espace  $F$  est alors somme directe de ceux des sous-espaces  $F_\theta$  qui ne sont pas réduits à 0.

Nous démontrerons d'un seul coup les deux parties du lemme. Considérons un nombre fini d'applications semi-linéaires  $u_i$  de  $E$  dans lui-même, non identiquement nulles, et relatives respectivement aux automorphismes  $\sigma_i$  de  $K$  ( $1 \leq i \leq p$ ). Supposons que les  $u_i$  soient linéairement dépendantes par rapport à  $K$ , et soit  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$  une relation primor-

(15) Voir [8], p. 28, th. 2.

(16) Voir [8], p. 29, lemma 1 et p. 29, lemma 2, et [2], p. 68, lemme 1.

(17) Rappelons qu'une application  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  (par rapport à un corps  $K$ ) dans lui-même est dite *semi-linéaire* relativement à un automorphisme  $\sigma$  de  $K$  si on a  $u(x + y) = u(x) + u(y)$  et  $u(\lambda x) = \lambda^\sigma u(x)$  quels que soient  $x, y$  dans  $E$  et  $\lambda$  dans  $K$ .

iale (18) entre les  $u_i$ , à coefficients  $\lambda_i \in K$ . Pour tout  $x \in E$ , on a donc  $\sum_i \lambda_i u_i(x) = 0$ , donc aussi, pour tout  $\mu \in K$ ,  $\sum_i \lambda_i u_i(\mu x) = 0$ , c'est-à-dire  $\sum_i \lambda_i \mu^{\sigma_i} u_i(x) = 0$ ; cette dernière relation ayant lieu pour tout  $x \in E$ , signifie que  $\sum_i \lambda_i \mu^{\sigma_i} u_i = 0$ ; en vertu de l'hypothèse, il existe donc un  $\varrho \in K$  tel que  $\lambda_i \mu^{\sigma_i} = \varrho \lambda_i$  pour tout  $i$  tel que  $\lambda_i \neq 0$ ; comme il y a par hypothèse un de ces indices  $k$  tel que  $\lambda_k = 1$ , on a  $\varrho = \mu^{\sigma_k}$ , d'où  $\mu^{\sigma_i} = \lambda_i^{-1} \mu^{\sigma_k} \lambda_i$  pour tout  $i$  tel que  $\lambda_i \neq 0$  et tout  $\mu \in K$ . Si on prend tous les  $\sigma_i$  égaux à un même  $\sigma$ , cela montre que les  $\lambda_i \neq 0$  sont dans le centre de  $K$ , et établit la première partie du lemme. Pour démontrer la seconde, il suffit de supposer que ceux des  $u_i$  qui correspondent à des  $\sigma_i$  d'une même classe  $\theta$  sont linéairement indépendants; on voit alors que ceux des  $\lambda_i \neq 0$  doivent correspondre à des  $\sigma_i$  d'une même classe, et on obtient une contradiction en supposant les  $u_i$  linéairement dépendantes.

La première partie du lemme 2 montre aussitôt que :

**Théorème 3.** — *Dans  $\mathfrak{E}$ , l'anneau  $A$  et le corps  $K$  sont linéairement disjoints (19) par rapport à leur centre commun  $Z$ .*

Le sous-anneau de  $\mathfrak{E}$  engendré par  $K$  et  $A$  est donc identique à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $A$  à coefficients dans  $K$ , et isomorphe au produit tensoriel  $K \otimes A$  de  $K$  et de  $A$  par rapport à  $Z$ . L'anneau commutant de  $K \otimes A$  dans  $\mathfrak{E}$  est évidemment l'intersection des anneaux commutants de  $K$  et de  $A$ , autrement dit est identique à  $Z$ ; nous savons que l'anneau  $U(Z)$  commutant de  $Z$  est l'anneau de tous les endomorphismes de  $E$  considéré comme espace vectoriel sur  $Z$ ; lorsque  $A$  est de degré fini sur  $Z$ , le calcul des degrés de  $K \otimes A$  et de  $U(Z)$  par rapport à  $Z$  donne aussitôt le résultat classique  $K \otimes A = U(Z)$ ; mais il n'en est pas de même en général. De façon plus précise, prenons dans  $E$  une base  $(e_\lambda)$  par rapport à  $K$ ; pour tout  $\alpha \in K$ , désignons par  $h_\alpha$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  tel que  $h_\alpha(e_\lambda) = \alpha e_\lambda$  pour tout  $\lambda$  («matrices diagonales»); on vérifie aussitôt, que d'une part les  $h_\alpha$  forment un sous-corps de  $A$  contenant  $Z$ , isomorphe à l'opposé  $K^0$  de  $K$ ,

(18) Voir *N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Algèbre, chap. II, § 5 (Actual. Scient. et Ind., n° 1032, Paris (Hermann), 1947).*

(19) On dit que deux sous-algèbres  $G$ ,  $H$  d'une algèbre  $F$  sur un corps commutatif  $S$  sont *linéairement disjoints* par rapport à  $S$  si : 1<sup>o</sup> elles ont un élément unité commun; 2<sup>o</sup> tout élément de  $G$  est permutable avec tout élément de  $H$ ; 3<sup>o</sup> toute base de  $H$  par rapport à  $S$  est linéairement indépendante par rapport à  $G$ .

et que nous noterons  $K^0$ ; d'autre part, que le sous-anneau  $L$  de  $A$  commutant avec  $K^0$  est l'ensemble des endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que  $u(e_\lambda)$  soit combinaison linéaire des  $e_\mu$  à coefficients dans  $Z$  (si  $F$  est le sous-espace de  $E$  par rapport au corps  $Z$ , engendré par les  $e_\lambda$ ,  $L$  est isomorphe à l'anneau des endomorphismes de cet espace vectoriel, et est donc un anneau primitif complet). Cela étant, soit  $(\theta_\nu)$  une base de  $K$  par rapport à  $Z$ ; pour tout endomorphisme  $u \in A$ , on a  $u(e_\lambda) = \sum_\mu \varrho_{\lambda\mu} e_\mu$  ( $\varrho_{\lambda\mu} = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $\mu$ , dépendant de  $\lambda$ ); si  $\varrho_{\lambda\mu} = \sum_\nu \gamma_{\lambda\mu\nu} \theta_\nu$ , où  $\gamma_{\lambda\mu\nu} \in Z$ , on peut écrire  $u(e_\lambda) = \sum_\nu \theta_\nu v_\nu(e_\lambda)$ , où  $v_\nu(e_\lambda) = \sum_\mu \gamma_{\lambda\mu\nu} e_\mu$ , les  $v_\nu$  appartenant donc à  $L$ ; si  $K$  ou  $L$  est de degré fini sur  $Z$ , ceci montre que  $A = K^0 \otimes L$ ; au contraire, si  $K$  et  $L$  sont de degré infini sur  $Z$ , on ne peut plus écrire (au sens usuel de l'algèbre)  $u = \sum_\nu \theta_\nu v_\nu$ , car il y aura en général une infinité d'indices  $\nu$  tels que  $v_\nu \neq 0$ ; mais cette relation est exacte si on interprète le second membre comme une somme infinie dans l'anneau *topologique*  $\mathfrak{E}$ ; autrement dit,  $A$  est alors l'*adhérence* dans  $\mathfrak{E}$  du produit tensoriel  $K^0 \otimes L$ .

Cela étant, si  $K$  est de degré fini sur  $Z$ , on a  $K \otimes A = (K \otimes K^0) \otimes L$ , et  $K \otimes K^0$  peut être identifié à l'anneau de tous les endomorphismes d'un des espaces vectoriels  $Ke_\lambda$  de dimension finie sur  $Z$ ; d'où on déduit aisément (l'espace vectoriel  $E$  sur  $Z$  pouvant être considéré comme produit tensoriel de  $F$  et d'un des  $Ke_\lambda$ ) que l'on a dans ce cas  $K \otimes A = U(Z)$ . Au contraire, cette relation est inexacte par exemple lorsque  $K$  est de degré infini sur  $Z$  et  $E$  de dimension 1 sur  $K$  (autrement dit, lorsque  $A = K^0$ ); en effet, on sait alors (20) que  $K \otimes K^0$  est un anneau *simple* ayant un élément unité; mais un tel anneau ne peut avoir d'idéaux minimaux, donc ne peut être identique à  $U(Z)$ . On peut se demander si dans ce cas  $U(Z)$  est l'adhérence de  $K \otimes K^0$  dans  $\mathfrak{E}$ : on vérifie aisément qu'il en est ainsi lorsque  $K$  est *localement fini* sur  $Z$ , c'est-à-dire que toute partie finie de  $K$  engendre un sous-corps de  $K$  de degré fini sur  $Z$ ; mais nous ne savons pas répondre à la question dans le cas général.

3. *Sous-anneaux galoisiens d'un anneau primitif complet.* Nous dirons qu'un sous-anneau distingué  $B$  de l'anneau primitif complet  $A$  est *galoisien* (respectivement *fortement galoisien*) si tout élément de l'anneau  $C$  commutant de  $B$  dans  $\mathfrak{E}$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $K$ , d'*applications semi-linéaires* de l'espace vectoriel  $E$  (sur  $K$ ) dans lui-même

---

(20) Voir [1], p. 98, th. 7.

(respectivement de *di-automorphismes* de  $E$ , c'est-à-dire d'applications semi-linéaires *biunivoques* de  $E$  sur  $E$ ). Nous dirons que  $B$  est un anneau galoisien (respectivement fortement galoisien) *intérieur* si  $C$  est formé de combinaisons linéaires d'*endomorphismes* (respectivement d'*automorphismes*) de l'espace vectoriel  $E$  sur  $K$ .

Le théorème suivant généralise un résultat de Cartan-Jacobson (21) :

**Théorème 4.** — *Si  $B$  est un sous-anneau galoisien de  $A$ , tout sous-anneau distingué  $B'$  de  $A$  tel que  $B \subset B' \subset A$ , est galoisien.*

Par hypothèse, l'anneau  $C$  commutant de  $B$  dans  $\mathfrak{E}$  admet une base (par rapport à  $K$ , à gauche) formée d'applications semi-linéaires  $u_\lambda$ ; nous désignerons par  $\sigma_\lambda$  l'automorphisme du corps  $K$  correspondant à  $u_\lambda$ . L'anneau  $C'$  commutant de  $B'$  dans  $\mathfrak{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $C$  (par rapport à  $K$ ); comme il est engendré par ses éléments primordiaux par rapport à la base  $(u_\lambda)$  de  $C$  (17), il suffira de prouver qu'un tel élément  $v$  est nécessairement une application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même. Par hypothèse, on a  $v = \sum_\lambda \alpha_\lambda u_\lambda$ , d'où  $v(\mu x) = \sum_\lambda \alpha_\lambda \mu^{\sigma_\lambda} u_\lambda(x)$  pour tout  $\mu \in K$ , ce qui s'écrit aussi  $v\mu = \sum_\lambda \alpha_\lambda \mu^{\sigma_\lambda} u_\lambda$ . Comme  $C'$  contient  $K$ ,  $v\mu$  appartient à  $C'$ ; comme  $\alpha_\lambda = 0$  entraîne que le coefficient de  $u_\lambda$  dans  $v_\mu$  est 0, il résulte des propriétés des éléments primordiaux qu'il existe  $\varrho \in K$  tel que  $\alpha_\lambda \mu^{\sigma_\lambda} = \varrho \alpha_\lambda$  pour tout  $\lambda$ ; comme il existe un indice  $\nu$  tel que  $\alpha_\nu = 1$ , on a  $\varrho = \mu^{\sigma_\nu}$ , et par suite  $v(\mu x) = \mu^{\sigma_\nu} v(x)$  pour tout  $x \in E$  et tout  $\mu \in K$ , ce qui démontre la proposition.

L'anneau  $A$  est évidemment galoisien; il en est de même de  $Z$  lorsque  $K$  est de degré fini sur  $Z$ : on a vu en effet au n° 2 qu'on a alors  $U(Z) = K \otimes A$ , ce qui prouve que  $Z$  est alors un anneau galoisien *intérieur*; lorsque  $K$  est de degré infini sur  $Z$ ,  $Z$  ne peut certainement plus être toujours un anneau galoisien intérieur, puisqu'en général  $K \otimes A \neq U(Z)$ ; nous ignorons s'il peut encore être galoisien.

La notion d'anneau galoisien *intérieur* se rattache à la théorie des sous-anneaux commutants de l'anneau  $A$  (et non plus de  $\mathfrak{E}$ ) par le théorème suivant :

**Théorème 5.** — *Pour qu'un sous-anneau distingué  $B$  de  $A$  soit galoisien intérieur, il faut et il suffit qu'il soit l'anneau commutant dans  $A$ , d'un sous-anneau  $D$  contenant  $Z$  et tel que  $K \otimes D$  soit un sous-anneau distingué de  $\mathfrak{E}$ ;  $D$  est alors l'anneau commutant de  $B$  dans  $A$ .*

---

(21) Voir [8], p. 34, th. 7, et [2], p. 66, th. 2.

La condition est nécessaire, car si  $B$  est galoisien intérieur, son anneau commutant  $C$  dans  $\mathfrak{E}$  est formé des combinaisons linéaires à coefficients dans  $K$  des éléments de l'anneau  $D = C \cap A$ , donc (théorème 3) est identique à  $K \otimes D$ , et on sait (théorème 1) qu'il est distingué dans  $\mathfrak{E}$ ;  $D$  contient évidemment  $Z = K \cap A$ ; son anneau commutant dans  $A$  est l'intersection de  $A$  et de l'anneau commutant de  $D$  dans  $\mathfrak{E}$ ; comme  $A$  est anneau commutant de  $K$  dans  $\mathfrak{E}$ , l'anneau commutant de  $D$  dans  $A$  est anneau commutant, dans  $\mathfrak{E}$ , de l'anneau engendré par  $K$  et  $D$ , c'est-à-dire de  $K \otimes D$ , donc (théorème 1) il est identique à  $B$ . La réciproque est immédiate; en outre, l'anneau commutant de  $B$  dans  $A$  est l'intersection de  $C$  et de  $A$ , donc  $D$ .

On a en particulier les corollaires suivants, qui généralisent des résultats classiques (22) :

**Corollaire 1.** — *Pour qu'un sous-anneau  $B$  de  $A$  soit galoisien intérieur dans  $A$ , et tel que  $A$  soit de degré fini sur  $B$ , il faut et il suffit qu'il soit l'anneau commutant, dans  $A$ , d'un sous-anneau semi-simple  $D$  de degré fini sur  $Z$ .*

En effet, si  $D$  est semi-simple et de degré fini sur  $Z$ ,  $K \otimes D$  est semi-simple de longueur finie, donc distingué dans  $\mathfrak{E}$ . Inversement, si  $K \otimes D$  est semi-simple et de degré fini sur  $K$ ,  $D$  est de degré fini sur  $Z$  et est semi-simple, car s'il contenait un idéal nilpotent  $\mathfrak{a} \neq (0)$ ,  $K \otimes \mathfrak{a}$  serait un idéal nilpotent  $\neq 0$  dans  $K \otimes D$ .

**Corollaire 2.** — *Si  $K$  est de degré fini sur  $Z$ , pour tout sous-anneau  $D$  de  $A$ , distingué dans  $\mathfrak{E}$  et contenant  $Z$ , l'anneau commutant de  $D$  dans  $A$  est un sous-anneau galoisien intérieur  $B$  de  $A$ , et  $D$  est l'anneau commutant de  $B$  dans  $A$ .*

En effet,  $D$  est par hypothèse un produit  $\prod_{\lambda} D_{\lambda}$  d'anneaux primitifs complets, et  $E$  se décompose en somme directe de  $D$ -modules  $E_{\lambda}$ , qui sont aussi des espaces vectoriels sur  $K$ , et sont tels que  $E_{\lambda}$  est annulé par tous les  $D_{\mu}$  d'indice  $\neq \lambda$ , et que l'on ait  $S_{\lambda} \cdot E_{\lambda} = E_{\lambda}$ , en désignant par  $S_{\lambda}$  le socle de  $D_{\lambda}$  (cf. n° 1). Soit  $(\theta_i)$  une base de  $K$  par rapport à  $Z$ ; par définition, tout élément de  $K \otimes D$  s'écrit d'une seule manière  $u = \sum_i \theta_i v_i$ , où  $v_i \in D$ ; la restriction de  $u$  à  $E_{\lambda}$  est donc  $u_{\lambda} = \sum_i \theta_i v_{i\lambda}$ , où  $v_{i\lambda}$  est la restriction de  $v_i$  à  $E_{\lambda}$ ; par suite  $u_{\lambda}$  est un endomorphisme de  $E_{\lambda}$ , qui appartient à  $K \otimes D_{\lambda}$ , si on identifie à  $D_{\lambda}$  l'anneau des restrictions à  $E_{\lambda}$ .

---

(22) Voir [1], p. 104, th. 13 et p. 105—106, th. 16.

des endomorphismes  $v \in D$ ; réciproquement, si pour chaque  $\lambda$ , on se donne arbitrairement un endomorphisme  $u_\lambda \in K \otimes D_\lambda$  de  $E_\lambda$ , l'endomorphisme  $u$  de  $E$  dont la restriction à chaque  $E_\lambda$  est  $u_\lambda$  appartient à  $K \otimes D$ ; on peut donc considérer  $K \otimes D$  comme l'anneau *produit* des  $K \otimes D_\lambda$ , et la proposition sera démontrée si on établit que  $K \otimes D_\lambda$  est un anneau primitif complet, distingué dans l'anneau  $\mathfrak{E}_\lambda$  des endomorphismes du groupe  $E_\lambda$ .

En d'autres termes, on est ramené à démontrer le corollaire lorsque  $D$  est primitif complet.  $E$  est somme directe de  $D$ -modules simples  $M_\alpha$  isomorphes à un idéal minimal de  $D$ ; et si  $M$  est l'un d'eux, tout endomorphisme  $u \in D$  est entièrement déterminé par sa restriction à  $M$ . Si  $H$  est le corps des endomorphismes du  $D$ -module  $M$ ,  $(e_\gamma)$  une base de  $M$  considéré comme espace vectoriel sur  $H$ ,  $F$  l'espace vectoriel sur  $Z$  engendré par les  $e_\gamma$ , on voit comme à la fin du n° 2 que  $D$  est l'adhérence, dans  $\mathfrak{E}$ , du produit tensoriel  $H^0 \otimes L$ , où  $L$  est l'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel  $F$  ( $H^0$  et  $L$  pouvant être considérés comme formés d'endomorphismes de  $E$ , et non seulement de  $M$ , au moyen d'isomorphismes de  $M$  sur les  $M_\alpha$ ). Comme  $K$  est de degré fini sur  $Z$ , il est clair que  $K \otimes D$  est l'adhérence, dans  $\mathfrak{E}$ , de  $K \otimes (H^0 \otimes L) = (K \otimes H^0) \otimes L$ ; d'autre part,  $K \otimes H^0$  est un anneau simple de longueur finie; si  $I$  est un idéal à gauche minimal de  $K \otimes H^0$ , nous allons voir que la somme  $P$  des  $(K \otimes H^0)$ -modules simples  $I e_\gamma$  est directe. Il suffit pour cela de voir que les  $e_\gamma$  sont linéairement indépendants par rapport à  $K \otimes H^0$ ; or, la démonstration du théorème 1 montre que, si  $G$  est l'anneau commutant de  $D$  dans  $\mathfrak{E}$ , les  $G$ -modules  $N_\gamma = G \cdot e_\gamma$  sont simples, et  $E$  somme directe des  $N_\gamma$ ; comme  $G$  contient  $K$ , et que  $H^0 e_\gamma = H e_\gamma$  est contenu dans  $N_\gamma$ ,  $(K \otimes H^0) e_\gamma$  est contenu dans  $N_\gamma$ , ce qui établit notre assertion. Soit alors  $R$  le corps des endomorphismes de l'idéal  $I$ ; il existe un nombre fini d'éléments  $w_j$  de  $I$  tels que les  $w_j e_\gamma$  forment une base de l'espace vectoriel  $P$  sur le corps  $R$ . Nous allons voir que, dans l'anneau d'endomorphismes du groupe  $P$ , les restrictions à  $P$  des endomorphismes  $u \in K \otimes H^0 \otimes L$  forment un anneau partout dense dans l'anneau  $S$  de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel  $P$  sur le corps  $R$ . Il suffit pour cela, comme on le voit aisément, de montrer que, quels que soient les indices  $j, k, \gamma, \delta$ , et  $\varrho \in R$ , il existe un endomorphisme  $u \in K \otimes H^0 \otimes L$  tel que  $u(w_j e_\gamma) = \varrho w_k e_\delta$ , et  $u(w_h e_\varepsilon) = 0$  pour  $(h, \varepsilon) \neq (j, \gamma)$ ; or, il existe  $v'' \in L$  tel que  $v''(e_\gamma) = e_\delta$ , et  $v''(e_\varepsilon) = 0$  pour  $\varepsilon \neq \gamma$ ; d'autre part, comme  $K \otimes H^0$  peut être identifié à l'anneau d'endomorphismes de l'espace vectoriel  $I$  sur  $R$ , il existe  $v' \in K \otimes H^0$  tel que  $v'(w_j) = \varrho w_k$  et  $v'(w_h) = 0$  pour  $h \neq j$ ; en pre-

nant  $u = v'v''$  on répond à la question. Ce raisonnement montre en même temps que  $P$  est un module simple sur  $K \otimes H^0 \otimes L$ . Or, on peut à partir de chacun des  $M_\alpha$ , définir ainsi un module simple  $P_\alpha$  sur  $K \otimes H^0 \otimes L$ , isomorphe à  $P$ ;  $E$  étant somme des  $M_\alpha$ , est aussi somme des  $P_\alpha$ , donc somme directe d'une sous-famille des  $P_\alpha$ ; en raison de l'isomorphie des  $P_\alpha$ , l'anneau  $S$  peut être considéré comme anneau d'endomorphismes de chacun des  $P_\alpha$ , donc aussi de  $E$ ; ce qui précède montre que  $S$  est un anneau primitif complet, distingué dans  $\mathfrak{E}$ , et que  $K \otimes H^0 \otimes L$  est partout dense dans  $S$ ; on a donc  $S = K \otimes D$ , ce qui achève le raisonnement.

On notera qu'il ne suffit pas, pour que  $B$  soit galoisien intérieur, qu'il admette dans  $A$  un anneau commutant  $D$  contenant  $Z$  et tel que  $K \otimes D$  soit distingué: c'est ce que montre déjà la théorie de Cartan-Jacobson lorsque  $A$  est un corps et  $B$  un sous-corps galoisien de  $A$ , tel que le groupe des automorphismes de  $A$  par rapport à  $B$  contienne des automorphismes extérieurs de  $A$ .

En outre, si  $B$  est un sous-anneau galoisien intérieur de  $A$ , son anneau commutant  $D$  dans  $A$  n'est pas nécessairement un anneau galoisien intérieur, comme le montre le cas où on prend  $B = A$ , lorsque  $K$  est de degré infini sur  $Z$ .

Il est naturel de se demander si la distinction que nous avons introduits entre anneaux galoisiens et anneaux fortement galoisiens est réelle, c'est-à-dire s'il existe des anneaux galoisiens mais non fortement galoisiens. Nous ne savons malheureusement pas répondre à cette question; il est classique que dans l'anneau d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie tout élément est combinaison linéaire d'automorphismes de l'espace vectoriel; autrement dit, tout sous-anneau primitif complet  $B$  de  $A$  qui est galoisien *intérieur* et tel que son anneau commutant  $C$  dans  $\mathfrak{E}$  (ou son anneau commutant  $D$  dans  $A$ ) soit de longueur *finie* (ce qui revient à dire que la hauteur de  $A$  par rapport à  $B$  est finie) est fortement galoisien; mais nous ignorons si la même propriété est vraie pour tout sous-anneau galoisien intérieur (cela reviendrait à prouver que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie est combinaison linéaire d'automorphismes de cet espace, ce qui ne paraît pas pouvoir se faire par les mêmes procédés que dans le cas des espaces de dimension finie). Dans la théorie de Jacobson-Cartan ( $E$  de dimension 1 sur  $K$ ) la distinction entre sous-corps galoisiens et sous-corps fortement galoisiens n'a pas de raison d'être, toute application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même qui n'est pas identiquement nulle étant ipso facto une

application biunivoque de  $E$  sur lui-même. Enfin, nous allons indiquer un autre cas, qu'on peut considérer comme à l'opposé de celui des anneaux galoisiens intérieurs, où un anneau galoisien  $B$  est nécessairement fortement galoisien. Il résulte du lemme 2b) que l'anneau  $C$ , commutant de  $B$  dans  $\mathfrak{E}$ , peut (en tant qu'espace vectoriel sur  $K$ ) être décomposé en *somme directe* de sous-espaces  $C_\lambda$ , les éléments de  $C_\lambda$  étant combinaisons linéaires (à coefficients dans  $K$ ) d'applications semi-linéaires telles que deux quelconques d'entre elles  $u, u'$  soient relatives à des automorphismes  $\sigma, \sigma'$  de  $K$  congrus modulo le groupe des automorphismes intérieurs de  $K$  (autrement dit, tels que  $\sigma' \sigma^{-1}$  soit un automorphisme intérieur) ; chaque application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même qui appartient à  $C$  appartient nécessairement à un des  $C_\lambda$  ; en particulier, nous désignerons par  $C_0$  celui des sous-espaces  $C_\lambda$  qui est engendré par les applications linéaires de  $E$  dans lui-même (c'est naturellement un *anneau*, intersection de  $C$  et de  $K \otimes A$ ). Cela étant, nous allons considérer le cas où  $C_0$  se réduit à  $K$  (cas où on peut dire que  $B$  est un sous-anneau galoisien *extérieur*) (23) :

**Théorème 6.** — *Lorsque  $C_0 = K$  et que  $A$  et  $C$  sont des anneaux simples de longueur finie, chacun des  $C_\lambda$  est de la forme  $Ku_\lambda$ , où  $u_\lambda$  est un diautomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ , relatif à un automorphisme  $\sigma_\lambda$  de  $K$  ; en outre, les  $\sigma_\lambda$  et les automorphismes intérieurs de  $K$  engendrent un groupe  $\Gamma$  tel que le groupe des automorphismes intérieurs de  $K$  ait par rapport à  $\Gamma$  un indice fini égal au degré de  $C$  sur  $K$ .*

En effet, soit  $u_\lambda \neq 0$  une application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même appartenant à un  $C_\lambda$  distinct de  $K$ . Comme  $C$  est un anneau simple de longueur finie, l'idéal bilatère  $Cu_\lambda C$  de  $C$  est nécessairement identique à  $C$  ; il existe donc une relation de la forme  $1 = \sum_i \alpha_i v_i u_\lambda w_i$ , où les  $\alpha_i$  appartiennent à  $K$  et où les  $v_i$  et  $w_i$  sont des applications semi-linéaires de  $E$  dans lui-même. Cela étant, chacun des produits  $v_i u_\lambda w_i$ , étant une application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même, appartient à un des  $C_\lambda$  ; comme  $C$  est somme directe des  $C_\lambda$ , il résulte de la relation  $1 = \sum_i \alpha_i v_i u_\lambda w_i$  que l'un au moins des produits  $v_i u_\lambda w_i$  appartient à  $K$  et est  $\neq 0$  ; cela signifie que  $v_i u_\lambda w_i$  est un diautomorphisme de  $E$ , et comme  $E$  est de dimension finie sur  $K$  par hypothèse, on sait que cela n'est possible que lorsque chacun des facteurs  $v_i, u_\lambda, w_i$  est un diautomorphisme ; autrement dit, toute application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même appartenant

---

(23) Lorsque  $E$  est de dimension 1 sur  $K$ , ce cas est celui étudié par N. Jacobson dans [5].

à  $C$  et  $\neq 0$  est un diautomorphisme. L'hypothèse que  $A$  et  $C$  sont de longueur finie entraîne que  $C$  est de degré fini  $n$  sur  $K$ , c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension  $n$  (à gauche) sur  $K$ ; comme  $v \rightarrow v u_\lambda$  est une application linéaire biunivoque de cet espace dans lui-même, c'est un automorphisme de cet espace vectoriel, donc  $u_\lambda^{-1}$  appartient à  $C$ ; l'application  $v \rightarrow v u_\lambda^{-1}$  applique  $C_\lambda$  dans  $K$  et l'application  $v \rightarrow v u_\lambda$  applique  $K$  dans  $C_\lambda$ , ce qui montre que  $C_\lambda$  est de dimension 1 sur  $K$ , autrement dit  $C_\lambda = K u_\lambda$  pour tout  $\lambda$ ; le produit  $u_\lambda u_\mu$  étant de la forme  $\alpha u_\nu$  ( $\alpha \in K$ ), la fin de la démonstration est triviale.

Avec les mêmes hypothèses sur l'anneau galoisien «extérieur»  $B$  (c'est-à-dire que  $A$  et  $B$  sont simples de longueur finie, et  $A$  de degré fini sur  $B$ ), on voit que si on désigne par  $s_\lambda$  l'automorphisme  $v \rightarrow u_\lambda v u_\lambda^{-1}$  de  $A$ , les  $s_\lambda$  forment un groupe fini  $\mathfrak{G}$  d'ordre  $n$ , et  $B$  est le sous-anneau de  $A$  formé des éléments invariants par  $\mathfrak{G}$ ; on peut donc appeler  $\mathfrak{G}$  le *groupe de Galois* de  $A$  par rapport à  $B$ . Il est facile de voir que, réciproquement, tout automorphisme de  $A$  laissant invariants les éléments de  $B$ , appartient à  $\mathfrak{G}$ : en effet, on sait (24) que tout automorphisme de  $A$  est de la forme  $v \rightarrow u v u^{-1}$ , où  $u$  est une application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même; comme  $u$  doit être permutable avec tout élément de  $B$ ,  $u$  appartient à  $C$  et est donc nécessairement de la forme  $\alpha u_\lambda$ , d'où la proposition. Le théorème 4 montre ici que tout anneau simple  $B'$  tel que  $B \subset B' \subset A$ , est aussi un anneau galoisien extérieur, et qu'il y a correspondance biunivoque entre ces anneaux et une certaine famille de sous-groupes de  $\mathfrak{G}$  (savoir ceux tels que la somme des  $K u_\lambda$  correspondants soit un sous-anneau simple de  $C$ ).

Etudions maintenant de plus près la structure des sous-anneaux galoisiens  $B$  de  $A$ , en conservant les notations du théorème 6. Nous ne pourrons dire que peu de choses dans le cas général où on ne suppose pas  $B$  fortement galoisien, même lorsque  $A$  est de longueur finie et de degré fini sur  $B$ ; nous ignorons si dans ce cas les classes des automorphismes  $\sigma_\lambda$  (modulo le groupe des automorphismes intérieurs de  $K$ ) forment un groupe, car il n'est pas exclu que l'on ait  $C_\lambda \cdot C_\mu = (0)$  pour certains couples d'indices; nous ne pouvons même dire si le groupe engendré par ces classes est fini, ni si le sous-anneau  $C_0$  de  $C$  est semi-simple. Pour les sous-anneaux  $B$  fortement galoisiens, nous avons des renseignements plus précis. Chacun des  $C_\lambda$  admet alors par hypothèse une base (par rapport à  $K$ ) formée de diautomorphismes; dans l'hypothèse où  $C$  est de degré fini sur  $K$  (c'est-à-dire  $A$  de degré fini sur  $B$ , mais pas nécessairement de lon-

---

(24) Voir [3], p. 69—71 et [4], p. 59—60.

gueur finie), pour chacun de ces diautomorphismes  $u_\lambda$ , on voit comme dans le théorème 6 que  $v \rightarrow v u_\lambda$  est une application biunivoque de  $C$  sur lui-même ; par suite, les classes des automorphismes  $\sigma_\lambda$  (modulo le groupe des automorphismes intérieurs de  $K$ ) forment un *groupe fini*  $\mathfrak{G}$  d'ordre  $n$ , et chacun des  $C_\lambda$  a même dimension  $d$  sur  $K$ , d'où résulte que le degré de  $C$  sur  $K$  est égal à  $n d$ .

Les  $\sigma_\lambda$  induisent sur le centre  $Z$  de  $K$  un groupe fini d'automorphismes  $G$  (isomorphe à un groupe quotient de  $\mathfrak{G}$ ) ; l'ensemble des éléments de  $Z$  invariants par  $G$ , qui est identique à  $B \cap Z = B \cap K$ , est donc un *sous-corps* de  $Z$  tel que  $Z$  soit *galoisien* sur  $B \cap Z$  (même lorsque  $B$  n'est pas fortement galoisien et que  $C$  est de degré infini sur  $K$ ,  $B \cap Z$  est l'ensemble des éléments de  $Z$  invariants par une famille d'automorphismes de ce corps, et est donc toujours un corps). En outre :

**Théorème 7.** — *Le corps  $K$  et l'anneau  $B$  sont linéairement disjoints sur le corps  $B \cap Z$ .*

En effet, soit  $(v_i)$  une famille finie d'éléments de  $B$ , linéairement indépendants sur le corps  $B \cap Z$  ; supposons qu'ils ne soient pas indépendants par rapport à  $Z$  ; il existerait alors entre les  $v_i$  une relation primordiale  $\sum_i \alpha_i v_i = 0$  à coefficients dans  $Z$ . Pour chacun des  $u_\lambda$ , on a donc aussi  $\sum_i u_\lambda \alpha_i v_i = 0$ , ce qui équivaut à  $\sum_i \alpha_i^{\sigma_\lambda} u_\lambda v_i = 0$ , et comme  $u_\lambda$  est permutable avec chacun des  $v_i$ , on a aussi  $(\sum_i \alpha_i^{\sigma_\lambda} v_i) u_\lambda = 0$  ; enfin,  $u_\lambda$  étant inversible dans  $\mathfrak{G}$  par hypothèse, cette relation est équivalente à  $\sum_i \alpha_i^{\sigma_\lambda} v_i = 0$ . En vertu de l'hypothèse, il existe donc  $\varrho \in Z$  tel que  $\alpha_i^{\sigma_\lambda} = \varrho \alpha_i$  pour tout  $i$ , et comme on a  $\alpha_i = 1$  pour un indice  $i$  au moins, on a  $\varrho = 1$ ,  $\alpha_i$  est invariant par chacun des automorphismes  $\sigma_\lambda$ , et par suite appartient à  $B \cap Z$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Les  $v_i$  sont donc linéairement indépendants par rapport à  $Z$ , et par suite aussi par rapport à  $K$  d'après le théorème 3.

On notera que le théorème 7 est valable même lorsque  $A$  est de degré infini sur  $B$  ( $B$  étant toujours supposé fortement galoisien).

Le sous-anneau de  $A$  engendré par  $B$  et  $Z$  est donc identique à leur produit tensoriel  $B \otimes Z$  (par rapport au corps  $B \cap Z$ ) ; supposons que  $Z$  soit de degré *fini*  $n$  sur  $B \cap Z$  (c'est-à-dire que le groupe  $G$  engendré par les restrictions des  $\sigma_\lambda$  à  $Z$  soit fini, ce qui est toujours le cas, d'après ce qui précède, lorsque  $A$  est de degré fini sur  $B$ ) ;  $Z$  est alors une extension *galoisienne* de  $B \cap Z$  ; en outre, le raisonnement du corollaire 2 du théorème 5 (tenant compte du fait que  $Z$  est une exten-

sion *séparable* de  $B \cap Z$ ) montre que  $B \otimes Z$  est un anneau semi-simple complet distingué dans  $\mathfrak{E}$ ; d'après le théorème 4 c'est donc un sous-anneau galoisien de  $A$ . Mais rien ne permet d'affirmer en général que son anneau commutant dans  $\mathfrak{E}$  soit identique à  $C_0 = C \cap (K \otimes A)$ ; on peut seulement dire qu'il contient  $C_0$ . Toutefois,  $C_0$  est bien l'anneau commutant de  $B \otimes Z$  lorsque parmi les automorphismes  $\sigma_\lambda$ , seuls les automorphismes intérieurs laissent invariants tous les éléments de  $Z$  (ce qui sera en particulier le cas lorsque tout automorphisme de  $K$  laissant invariants les éléments de  $Z$  est intérieur, et plus particulièrement encore lorsque  $K$  est de degré fini sur  $Z$ ); en effet, l'anneau  $C_1$  commutant de  $B \otimes Z$  est engendré par des applications semi-linéaires de  $E$  dans  $E$  (théorème 4); s'il était distinct de  $C_0$ , il contiendrait donc une application semi-linéaire  $v \neq 0$ , relative à un automorphisme  $\sigma$  non intérieur (congru à un des  $\sigma_\lambda$ ); comme  $v$  est permutable avec  $Z$  par hypothèse, on aurait  $v(\alpha x) = \alpha v(x)$  pour tout  $x \in E$  et tout  $\alpha \in Z$ , ce qui équivaut à  $\alpha^\sigma v(x) = \alpha v(x)$ , et comme il y a au moins un  $x$  tel que  $v(x) \neq 0$ ,  $\alpha^\sigma = \alpha$  pour tout  $\alpha \in Z$  contrairement à l'hypothèse. Dans le cas considéré,  $C_0$  est donc un anneau semi-simple distingué, et  $B \otimes Z$  un anneau *fortement galoisien intérieur*. Les restrictions à  $B \otimes Z$  des applications  $v \rightarrow u_\lambda v u_\lambda^{-1}$  sont des automorphismes de cet anneau laissant invariants les éléments de  $B$ ; le groupe engendré par ces automorphismes est isomorphe à  $G$ , auquel on peut l'identifier, et  $B$  est l'ensemble des éléments de  $B \otimes Z$  invariants par  $G$ . Supposons en outre que  $B$  et  $B \otimes Z$  soient des anneaux *primitifs complets*; soit  $F$  un sous-module simple de  $E$  considéré comme  $(B \otimes Z)$ -module,  $H$  son corps d'endomorphismes, et soit  $\mathfrak{F}$  l'anneau d'endomorphismes du groupe additif  $F$ ;  $B$  et  $B \otimes Z$  peuvent être considérés comme des sous-anneaux de  $\mathfrak{F}$ , et l'hypothèse que  $B$  est distingué dans  $\mathfrak{E}$  entraîne aussitôt qu'il est distingué dans  $\mathfrak{F}$ . Les automorphismes du groupe  $G$  sont de la forme  $v \rightarrow w_\mu v w_\mu^{-1}$ , où les  $w_\mu$  sont des diautomorphismes de  $F$  (considéré comme espace vectoriel sur  $H$ ); comme  $Z$  est contenu dans le centre de  $B \otimes Z$ , et qu'aucun des automorphismes du groupe  $G$  autre que l'identité ne laisse invariants tous les éléments de  $Z$ , les  $w_\mu$  sont linéairement indépendants par rapport à  $H$  (lemme 2b)); comme leur nombre est égal au degré  $n$  de  $B \otimes Z$  sur  $B$ , ils engendrent l'anneau commutant  $R$  de  $B$  dans  $\mathfrak{F}$ ; autrement dit, *par rapport à  $B \otimes Z$ ,  $B$  est un sous-anneau fortement galoisien extérieur*. Dans les mêmes hypothèses, il y a alors correspondance biunivoque entre *tous* les sous-groupes du groupe  $G$  et *tous* les sous-anneaux distingués  $B'$  de  $A$  tels que  $B \subset B' \subset B \otimes Z$ . En effet, à tout sous-groupe  $G'$  de  $G$  correspond un sous-corps  $Z'$  de  $Z$  tel que  $B \cap Z \subset Z' \subset Z$ , formé des

éléments de  $Z$  invariants par  $G'$  ; l'anneau  $B \otimes Z'$ , engendré par  $B$  et  $Z'$ , est un sous-anneau primitif complet, distingué dans  $\mathfrak{F}$  ; on voit aussitôt que le degré de  $B \otimes Z$  sur  $B \otimes Z'$  est égal à l'ordre du groupe  $G'$ , et par suite que les  $w_\mu$  correspondant aux automorphismes du groupe  $G'$  forment une base (par rapport à  $H$ ) de l'anneau  $R'$  commutant de  $B \otimes Z'$  dans  $\mathfrak{F}$ . Inversement, si  $B'$  est un sous-anneau distingué tel que  $B \subset B' \subset B \otimes Z$ , son anneau commutant  $R'$  dans  $\mathfrak{F}$  a une base (par rapport à  $H$ ) formé d'un certain nombre  $m$  des  $w_\mu$  (d'après le théorème 4), et le raisonnement du théorème 6 prouve que les automorphismes  $v \rightarrow w_\mu v w_\mu^{-1}$  correspondants forment un sous-groupe  $G'$  d'ordre  $m$  du groupe  $G$  ; si  $B \otimes Z'$  est le sous-anneau de  $B \otimes Z$  correspondant à  $G'$ , donc formé des éléments invariants par  $G'$ , on a  $B' \subset B \otimes Z'$  et les degrés de  $B \otimes Z$  par rapport à  $B'$  et à  $B \otimes Z'$  sont égaux ; donc  $B' = B \otimes Z'$ . On notera aussi que, lorsque  $A$  est de degré fini  $nd$  par rapport à  $B$ , il est de degré fini  $md$  par rapport à  $B'$ , et que  $B'$  est fortement galoisien *par rapport à A*, car son anneau commutant dans  $\mathfrak{E}$  est somme directe des  $C_\lambda$  correspondant aux automorphismes du groupe  $G'$ .

Soit maintenant  $B''$  un sous-anneau distingué de  $A$  tel que  $B \subset B'' \subset A$  ;  $B''$  est un sous-anneau galoisien de  $A$  (théorème 4), mais en général, nous ne savons pas démontrer qu'il est fortement galoisien par rapport à  $A$ . Si nous faisons donc l'hypothèse supplémentaire que  $B''$  est fortement galoisien par rapport à  $A$ ,  $B''$  et  $Z$  sont linéairement disjoints sur le corps  $Z' = B'' \cap Z$  (théorème 7) ; on en déduit que l'anneau  $B' = B'' \cap (B \otimes Z)$  est identique à  $B \otimes Z'$  ; en effet, il contient évidemment ce dernier, et s'il en était distinct, il existerait dans  $B'$  un élément  $\alpha = \beta_0 + \sum_i \gamma_i \xi_i$ , où  $\beta_0$  et les  $\gamma_i$  sont dans  $B$ , les  $\xi_i$  forment, avec 1, une base de  $Z$  sur  $Z'$ , et un au moins des  $\gamma_i$  n'est pas nul ; mais alors les  $\xi_i$  et 1 seraient linéairement dépendants par rapport à  $B''$ , ce qui est absurde. L'anneau  $B'$  est donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, un anneau primitif complet ; si  $B'' \otimes Z$  est un anneau primitif complet, il en est de même de  $B''$ , et le degré  $m$  de  $B'' \otimes Z$  sur  $B''$  est égal à celui de  $Z$  sur  $Z'$  et à celui de  $B \otimes Z$  sur  $B'$  ; en outre, si  $A$  est de degré fini  $d$  par rapport à  $B \otimes Z$ , son degré par rapport à  $B'' \otimes Z$  est un diviseur de  $d$ .

Remarquons enfin que, lorsque  $A$  est de degré fini sur  $Z$ , le corps  $B \cap Z$  est *fortement galoisien* par rapport à  $A$ . En effet, si on choisit un diautomorphisme  $u_\lambda$  dans chacun des  $C_\lambda$ , et si  $(v_i)$  est une base par rapport à  $Z$  de l'anneau  $U(Z)$ , commutant de  $Z$  dans  $\mathfrak{E}$ , on voit d'après le lemme 2b) que les  $u_\lambda v_i$  sont linéairement indépendants par rapport à  $K$  ; comme leur nombre est égal au degré de  $A$  sur  $B \cap Z$ , ils engendrent

l'anneau commutant de  $B \cap Z$  dans  $\mathfrak{E}$ ; d'où la proposition, puisqu'on peut toujours supposer que les  $v_i$  sont des automorphismes de l'espace vectoriel  $E$ .

4. *Isomorphismes des sous-anneaux d'un anneau primitif complet.*  
 Soient  $A, A'$  deux sous-anneaux isomorphes de  $\mathfrak{E}$ ,  $u \rightarrow \bar{u}$  un isomorphisme de  $A$  sur  $A'$ ; cet isomorphisme permet de définir sur  $E$  une seconde structure de  $A$ -module, en posant  $u \cdot x = \bar{u}(x)$ ; si les deux structures de  $A$ -module de  $E$  ainsi obtenues sont *isomorphes*, il existe une application biunivoque  $\varphi$  de  $E$  sur lui-même telle que  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  et  $\varphi(u(x)) = \bar{u}(\varphi(x))$ ; autrement dit, on a  $\bar{u} = \varphi u \varphi^{-1}$ . En outre, si  $B, B'$  sont les anneaux commutants de  $A$  et  $A'$  dans  $\mathfrak{E}$ , et si  $v \in B$ ,  $\bar{v} = \varphi v \varphi^{-1}$  appartient à  $B'$  et vice-versa, car on a  $\bar{v}(\bar{u}(x)) = \varphi v u \varphi^{-1}(x) = \varphi u v \varphi^{-1}(x) = \bar{u}(\bar{v}(x))$  pour tout  $u \in A$ ; l'application  $v \rightarrow \varphi v \varphi^{-1}$  est donc un isomorphisme de  $B$  sur  $B'$ .

Reprendons les notations des numéros antérieurs,  $K$  désignant un corps d'endomorphismes de  $E$ ,  $A$  l'anneau primitif complet des endomorphismes de l'espace vectoriel  $E$  sur  $K$ . Une première application des remarques qui précèdent redonne la caractérisation connue (24) des *automorphismes* de  $A$ : si  $u \rightarrow \bar{u}$  est un automorphisme de  $A$ , les deux structures de  $A$ -module sur  $E$  que permet de définir cet automorphisme, sont isomorphes, puisque pour chacune,  $E$  est isomorphe à un idéal minimal de l'anneau  $A$ ; on a donc  $\bar{u} = \varphi u \varphi^{-1}$ ; en outre  $\lambda \rightarrow \varphi \lambda \varphi^{-1}$  est un automorphisme  $\sigma$  du corps  $K$ ; autrement dit, on a  $\varphi(\lambda x) = \lambda^\sigma \varphi(x)$  pour tout  $x \in E$ , ce qui signifie que  $\varphi$  est un *diautomorphisme* de l'espace vectoriel  $E$ .

Nous allons chercher, dans ce qui suit, des conditions qui assurent qu'un isomorphisme d'un sous-anneau primitif complet distingué  $B$  de  $A$  sur un sous-anneau distingué  $B'$  de  $A$ , peut se prolonger en un automorphisme de  $A$ . Nous considérerons d'abord le cas où l'isomorphisme de  $B$  sur  $B'$  laisse *invariants les éléments du centre  $Z$  de  $A$* , supposé contenu dans  $B$  et  $B'$ .

**Théorème 8 (25).** — *Soient  $B, B'$  deux sous-anneaux primitifs complets de  $A$ , distingués dans  $\mathfrak{E}$  et contenant le centre  $Z$ . Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $B$  sur  $B'$ , laissant invariants les éléments de  $Z$ . L'isomorphisme  $\varphi$  peut se prolonger en un automorphisme intérieur dans les deux cas suivants :*

a)  *$B$  est de degré fini sur  $Z$ ;*

---

(25) Voir [1], p. 101, th. 12.

b)  $K$  est de degré fini sur  $Z$ , et les hauteurs de  $A$  par rapport à  $B$  et  $B'$  sont finies et égales.

En effet, l'isomorphisme  $\varphi$  se prolonge évidemment en un isomorphisme (que nous noterons encore  $\varphi$ ) de  $K \otimes B$  sur  $K \otimes B'$ , laissant invariants les éléments de  $K$ . Dans le cas a),  $K \otimes B$  et  $K \otimes B'$  sont des anneaux simples isomorphes, de longueur finie ; les dimensions par rapport à  $K$  d'un idéal minimal de  $K \otimes B$  et d'un idéal minimal de  $K \otimes B'$  sont finies et égales ; d'où on déduit aussitôt que  $E$  est somme directe de deux familles équivalentes, l'une formée de  $(K \otimes B)$ -modules simples, l'autre de  $(K \otimes B')$ -modules simples. On déduit évidemment de là, comme il a été expliqué plus haut, deux structures de  $(K \otimes B)$ -module isomorphes sur  $E$ , au moyen de l'isomorphisme  $\varphi$ , et par suite il existe une application additive biunivoque  $v$  de  $E$  sur lui-même telle que  $\varphi(u) = v u v^{-1}$  pour tout  $u \in K \otimes B$  ; en particulier,  $v$  est permutable avec tout élément de  $K$ , et par suite appartient à  $A$ , ce qui démontre dans ce cas le théorème.

Dans le cas b), l'anneau  $B$  peut être considéré comme l'adhérence, dans  $\mathfrak{E}$ , de l'anneau  $H^0 \otimes L$ , où  $L$  est l'anneau d'endomorphismes de l'espace vectoriel par rapport à  $Z$  engendré par une base (par rapport à  $H$ ) d'un  $B$ -module simple  $F$  contenu dans  $E$ . Alors le même raisonnement que dans le corollaire 2 du théorème 5 montre que  $K \otimes B$  est un anneau primitif complet, distingué dans  $\mathfrak{E}$  ; la hauteur de  $K \otimes B$  par rapport à  $B$  étant finie et égale à celle de  $K \otimes B'$  par rapport à  $B'$ , les hauteurs de  $A$  par rapport à  $K \otimes B$  et  $K \otimes B'$  sont égales ; on conclut le raisonnement comme dans le cas a).

On arriverait à la même conclusion (toujours en supposant  $K$  de degré fini) en supposant que les hauteurs de  $A$  sur  $B$  et  $B'$  sont infinies et égales, en ce sens que  $E$  est somme directe de deux familles équivalentes, l'une de  $B$ -modules simples, l'autre de  $B'$ -modules simples. Par contre, lorsque  $E$  est de dimension infinie sur  $K$ , il est facile de donner des exemples de sous-anneaux primitifs complets isomorphes  $B$ ,  $B'$ , contenant  $Z$ , mais tel que  $A$  ne soit pas de même hauteur par rapport à  $B$  et par rapport à  $B'$ .

On notera aussi que le théorème 8 cesse d'être vrai lorsqu'on ne suppose plus que  $K$  ou  $B$  est de degré fini sur  $Z$ , puisqu'on sait qu'il existe des corps non commutatifs  $K$  de degré infini sur  $Z$ , admettant des automorphismes laissant invariants tous les éléments de  $Z$  et qui ne sont pas intérieurs.

Nous allons maintenant supposer que l'isomorphisme  $\varphi$  laisse inva-

riants les éléments d'un sous-anneau  $B''$  de  $B \cap B'$ , qui est *galoisien* dans  $A$  (26).

**Théorème 9.** — *Soit  $B''$  un sous-anneau galoisien de  $A$ ; soient  $B$ ,  $B'$  deux sous-anneaux primitifs complets de  $A$ , distingués dans  $\mathfrak{E}$ , contenant  $B''$  et tels que les hauteurs de  $A$  par rapport à  $B$  et  $B'$  soient finies et égales. Si  $\varphi$  est un isomorphisme de  $B$  sur  $B'$ , laissant invariants les éléments de  $B''$ , il existe une application semi-linéaire  $v \neq 0$  de  $E$  dans lui-même telle qu'on ait identiquement  $\varphi(u)v = v u$  pour tout  $u \in B$ .*

En effet, l'hypothèse faite sur les hauteurs de  $A$  par rapport à  $B$  et  $B'$  entraîne, par le raisonnement du début de ce numéro, que l'on a identiquement  $\varphi(u) = t u t^{-1}$ , où  $t$  est une application additive biunivoque de  $E$  sur lui-même permutable avec tous les éléments de  $B''$ , donc appartenant à l'anneau  $C''$  commutant de  $B''$  dans  $\mathfrak{E}$  (on aurait la même conclusion en supposant que les hauteurs de  $A$  par rapport à  $B$  et  $B'$  sont infinies et égales). Par hypothèse les éléments de  $C''$  sont combinaisons linéaires (à coefficients dans  $K$ ) d'applications semi-linéaires de  $E$  dans lui-même ; on peut donc (lemme 2b)) décomposer l'espace vectoriel (à gauche)  $C''$  en somme directe de sous-espaces  $C''_\theta$  correspondant aux différentes classes  $\theta$  des automorphismes de  $K$  modulo le groupe des automorphismes intérieurs. Posons alors  $t = \sum_\theta t_\theta$ , où  $t_\theta \in C''_\theta$  ; pour tout  $u \in B$ ,

on a  $\sum_\theta (\varphi(u) t_\theta - t_\theta u) = 0$  ; or, pour chaque  $u \in B$ ,  $\varphi(u) t_\theta - t_\theta u$  est une combinaison linéaire, à coefficients dans  $K$ , d'applications semi-linéaires de  $E$  dans lui-même relatives à des automorphismes de  $K$  appartenant à la classe  $\theta$  ; d'après le lemme 2b), on a donc  $\varphi(u) t_\theta - t_\theta u = 0$  pour chaque  $\theta$  et tout  $u \in B$  ; il existe d'ailleurs au moins un  $t_\theta \neq 0$ . Considérons, dans le sous-espace  $C''_\theta$  correspondant, l'ensemble  $V$  des éléments  $v \in C''_\theta$  tels que  $\varphi(u)v = v u$  pour tout  $u \in B$  ; ce qui précède montre que  $V$  ne se réduit pas à 0, et on voit aussitôt que c'est un sous-espace vectoriel de  $C''_\theta$  (parce que  $\varphi(u)$  est permutable avec tout  $\mu \in K$ ). Or,  $C''_\theta$  a une base par rapport à  $K$  formée d'applications semi-linéaires  $w_i$  relatives à un même automorphisme  $\sigma$  (de la classe  $\theta$ ) ; considérons un élément primordial  $v = \sum_i \lambda_i w_i$  du sous-espace  $V$  (par rapport à cette

---

(26) Lorsque  $B = B' = A$ ,  $\varphi$  étant donc un automorphisme de  $A$  laissant invariants les éléments d'un sous-anneau *galoisien intérieur*  $B''$  de  $A$ , on a  $\varphi(u) = v u v^{-1}$ , où  $v$  est un diautomorphisme de  $E$ ; comme  $v$  est permutable avec tous les éléments de  $B''$ , il résulte du lemme 2b) que  $v$  est un diautomorphisme de  $E$  relatif à un automorphisme intérieur  $\lambda \rightarrow a \lambda a^{-1}$  de  $K$ ; mais alors  $w = a^{-1}v$  est un automorphisme de l'espace vectoriel  $E$ , et on a encore  $\varphi(u) = w u w^{-1}$ ; autrement dit,  $\varphi$  est un *automorphisme intérieur* de  $A$ . Ce résultat généralise le th. 17 de [1], p. 107.

base) ; comme  $u$  est permutable avec tout  $\mu \in K$ ,  $v\mu$  appartient aussi à  $V$  ; or on a  $v\mu = \sum_i \lambda_i \mu^\sigma w_i$ , donc comme  $v$  est primordial par hypothèse, il existe  $\varrho \in K$  tel que  $\lambda_i \mu^\sigma = \varrho \lambda_i$  pour tout indice  $i$  ; il y a par hypothèse un de ces indices tel que  $\lambda_i = 1$ , donc on a  $\varrho = \mu^\sigma$ , et par suite  $\lambda_i \mu^\sigma = \mu^\sigma \lambda_i$  ; comme  $\mu$  est arbitraire dans  $K$ , cela entraîne que les  $\lambda_i$  appartiennent tous au centre  $Z$  de  $K$ , et par suite que  $v$  est une application semi-linéaire relative à l'automorphisme  $\sigma$  de  $K$ , ce qui achève la démonstration.

**Corollaire 1.** — *On suppose que  $B$  et  $B'$  vérifient les hypothèses du théorème 9, et en outre que, si  $D$  et  $D'$  sont les sous-anneaux de  $\mathfrak{E}$  engendrés par  $K \cup B$  et  $K \cup B'$  respectivement,  $E$  est un  $D$ -module semi-simple homogène et un  $D'$ -module semi-simple homogène, ces deux modules ayant même longueur. Alors  $\varphi$  se prolonge en un automorphisme de  $A$ .*

En effet,  $E$  est somme directe de  $p$   $D$ -modules simples  $M_i$  deux à deux isomorphes, et aussi somme directe de  $p$   $D'$ -modules simples  $N_i$  deux à deux isomorphes. Cela étant, remarquons que si  $v(x) = 0$  pour un élément  $x \neq 0$  appartenant à un  $M_i$ ,  $v$  est identiquement nul dans ce module ; en effet, pour tout  $u \in B$  et tout  $\mu \in K$ , on a  $v(u(\mu x)) = v(\mu u(x)) = \mu^\sigma v(u(x)) = \mu^\sigma \varphi(u)(v(x)) = 0$  ; si  $w = \sum_j \mu_j u_j$ , où les  $u_j$  sont quelconques dans  $B$ , les  $\mu_j$  quelconques dans  $K$ , on a aussi  $v(w(x)) = 0$ , et on peut par hypothèse prendre  $w$  tel que  $w(x)$  soit un élément quelconque de  $M_i$ . Comme par hypothèse  $v \neq 0$ , il y a au moins un  $M_i$  dans lequel  $v$  ne s'annule que pour  $x = 0$  ; on peut supposer que ce module est  $M_1$ . D'autre part, pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $v(x) = \sum_{i=1}^p v_i(x)$ , où  $v_i(x) \in N_i$  ; comme  $\varphi(u) \in B'$ , on a  $\varphi(u)(v_i(x)) \in N_i$ , d'où on tire que l'on a identiquement  $\varphi(u)v_i = v_i u$  pour tout  $i$  ; les  $v_i$  sont des applications semi-linéaires (puisque les  $N_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  par rapport à  $K$ ) dont une au moins n'est pas nulle, on peut toujours supposer que c'est  $v_1$  ; restreinte à  $M_1$ ,  $v_1$  est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel  $M_1$  dans l'espace vectoriel  $N_1$  ; en outre, c'est un isomorphisme de  $M_1$  sur  $N_1$  car on voit comme ci-dessus que si  $y \neq 0$  appartient à  $v_1(M_1) \subset N_1$ ,  $w'(y)$  appartient aussi à  $v_1(M_1)$ , pour  $w' = \sum_j \mu_j' u_j'$ , où  $\mu_j' \in K$  et  $u_j' \in B'$  ; comme  $N_1$  est simple par hypothèse, on peut prendre  $w'$  tel que  $w'(y)$  soit un élément quelconque de  $N_1$ . Soit alors  $\psi_i$  un isomorphisme du  $D$ -module simple  $M_1$  sur  $M_i$ ,  $\psi_i'$  un isomorphisme du  $D'$ -module simple  $N_1$  sur  $N_i$  ; on définit une application semi-linéaire biunivoque  $v_0$  de  $E$  sur lui-même en posant  $v_0(x) = \psi_i'(v_1(\psi_i^{-1}(x)))$

pour tout  $x \in M_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), et on vérifie aussitôt qu'on a bien  $\varphi(u)v_0 = v_0u$ , autrement dit  $\varphi(u) = v_0uv_0^{-1}$  pour tout  $u \in B$ .

Les hypothèses du corollaire 1 sont en particulier remplies lorsque  $E$  est lui-même un  $D$ -module simple et un  $D'$ -module simple ; d'après la démonstration du théorème 1, cela correspond au cas où les idéaux minimaux des anneaux commutants  $C, C'$  de  $B, B'$  dans  $\mathfrak{E}$  sont de dimension 1 sur  $K$ , et par suite au cas où les *indices de*  $B$  et  $B'$  par rapport à  $A$  sont tous deux *égaux à un* ; c'est toujours le cas lorsque  $A$  est un *corps*, et on retrouve ainsi un résultat de *H. Cartan* (27).

**Corollaire 2.** — *On suppose que  $B$  et  $B'$  vérifient les hypothèses du théorème 9, et en outre que  $B''$  est un sous-anneau fortement galoisien extérieur de  $A$ , et que  $A$  est de degré fini sur  $B''$ . Alors  $\varphi$  se prolonge en un automorphisme de  $A$ .*

En effet, toute application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même contenue dans  $C''$  et non identiquement nulle est alors un diautomorphisme.

**Corollaire 3.** — *On suppose que  $B$  et  $B'$  vérifient les hypothèses du théorème 9, et que, si  $R'$  désigne le sous-anneau de  $A$  engendré par  $B'$  et  $Z$ ,  $E$  est un  $R'$ -module semi-simple homogène. Alors l'image du corps  $B \cap Z$  par l'isomorphisme  $\varphi$  est  $B' \cap Z$ .*

En effet,  $E$  est somme directe de  $R'$ -modules simples isomorphes  $N_j$ , ( $1 \leq j \leq q$ ). Pour tout  $x \in E$  on peut écrire  $v(x) = \sum_{j=1}^q v_j(x)$ , où  $v_j(x)$  appartient à  $N_j$  ; comme les  $N_j$  sont des espaces vectoriels par rapport à  $Z$ , les  $v_j$  sont des applications semi-linéaires de  $E$  dans lui-même, relatives à l'automorphisme  $\sigma$ , quand on considère  $E$  comme *espace vectoriel sur Z*. D'autre part, on a  $\varphi(u)v_j = v_ju$  pour tout indice  $j$ , et il y a au moins un indice  $j$  tel que  $v_j \neq 0$  ; comme  $N_j$  est un module simple par rapport à  $R'$ , on voit comme dans la démonstration du corollaire 1 que  $v_j$  applique  $E$  sur  $N_j$ . Cela étant, pour tout  $\mu \in B \cap Z$  et tout  $x \in E$ , on a  $\varphi(\mu)v_j(x) = v_j(\mu x) = \mu^\sigma v_j(x)$ , autrement dit  $\varphi(\mu)y = \mu^\sigma y$  pour tout  $y \in N_j$  ; tenant compte de ce que les  $N_j$  sont des  $R'$ -modules isomorphes, on en déduit qu'on a aussi  $\varphi(\mu)y = \mu^\sigma y$  pour tout  $y \in E$ , c'est-à-dire que  $\varphi(\mu) = \mu^\sigma$ , d'où le corollaire.

On notera que les hypothèses du corollaire 3 sont en particulier remplies lorsque  $B'$  est un sous-anneau fortement galoisien de  $A$ , tel que  $Z$  soit de

---

(27) Voir [2], p. 66, th. 3.

degré fini sur  $B' \cap Z$ , et que  $R'$  (alors égal à  $B' \otimes Z$ ) est un anneau primitif complet. Alors, si  $B$  est aussi fortement galoisien dans  $A$ , comme la restriction de  $\varphi$  à  $B \cap Z$  coïncide avec la restriction d'un automorphisme de  $Z$ , on voit que  $\varphi$  peut se prolonger en un isomorphisme (noté encore  $\varphi$ ) de  $B \otimes Z$  sur  $B' \otimes Z$ . Si on suppose en outre que  $K$  est de degré *fini* sur  $Z$ , les hypothèses du corollaire 1 sont remplies pour les anneaux  $B \otimes Z$  et  $B' \otimes Z$ , car le raisonnement du corollaire du théorème 5 montre alors que  $K \otimes B \otimes Z$  et  $K \otimes B' \otimes Z$  sont des anneaux primitifs complets de même hauteur sur  $B \otimes Z$  et  $B' \otimes Z$  respectivement, et que  $E$  est semi-simple, à la fois comme  $(K \otimes B \otimes Z)$ -module et comme  $(K \otimes B' \otimes Z)$ -module. On peut donc dans ce cas prolonger  $\varphi$  en un automorphisme de  $A$ .

5. *Appendice : Sous-anneaux galoisiens extérieurs et systèmes de facteurs.* Nous nous proposons de montrer comment les théories développées ci-dessus permettent en particulier de donner un exposé très simplifié de la théorie classique des «systèmes de facteurs» des algèbres simples (28).

Soit  $A$  une algèbre simple de rang fini sur son centre  $Z$ ,  $T$  un «corps de décomposition» de  $A$ , c'est-à-dire (29) un surcorps commutatif de  $Z$ , de degré fini sur  $Z$ , tel que le produit tensoriel  $A \otimes T = B$  (par rapport à  $Z$ ) soit isomorphe à une algèbre de matrices sur le corps  $T$ . On peut donc supposer que  $B$  est identifié à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $T$ ; nous désignerons par  $\mathfrak{E}$  l'anneau des endomorphismes de la structure de groupe additif de  $E$ :  $B$  est donc un sous-anneau simple de  $\mathfrak{E}$ , de centre  $T$ . Soit alors  $C$  l'anneau commutant de  $A$  dans  $\mathfrak{E}$ : c'est un anneau simple (théorème 1) qui contient  $T$ , et on a (corollaire du théorème 2)  $[C : T] = [B : A] = [T : Z]$ . Le centre de  $C$  est l'intersection  $C \cap A$  des deux anneaux commutants  $A$  et  $C$ , et c'est aussi le centre de  $A$ , donc  $Z$ ; autrement dit,  $T$  est un *sous-corps commutatif maximal* de l'algèbre simple  $C$ , tel que  $[C : Z] = [T : Z]^2$ . En outre, si  $K$  est le corps des endomorphismes des idéaux minimaux à gauche de  $A$ , le corps des endomorphismes des idéaux minimaux à gauche de  $C$  est isomorphe à  $K^0$  (n° 1). Ces remarques montrent aussitôt que l'algèbre  $C$  ne dépend que des corps  $K$  et  $T$ , à une isomorphie près: elle correspond donc de façon *biunivoque* à la classe des algèbres simples de centre  $Z$  ayant même corps  $K$  d'endomorphismes de leurs idéaux à gauche

(28) Les exposés les plus récents de cette théorie sont ceux de *N. Jacobson, Theory of rings*, p. 107—109, et *Artin-Nesbitt-Thrall, Rings with minimum condition* (Ann Arbor, 1944) chap. VIII.

(29) *Artin-Nesbitt-Thrall*, p. 76.

minimaux (élément du «groupe de Brauer» des classes d'algèbres simples de centre  $Z$  (30)).

Inversement, d'ailleurs, si  $C$  est une algèbre simple de centre  $Z$ , contenant un sous-corps commutatif  $T \supset Z$  tel que  $[C:Z] = [T:Z]^2$ , on peut identifier  $C$  à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel  $F$  sur le corps  $K^0$ ; soit  $\mathfrak{F}$  l'anneau des endomorphismes du groupe additif  $F$ . Les corps  $T$  et  $K^0$  sont linéairement disjoints sur  $Z$  (théorème 3) dans  $\mathfrak{F}$ ; comme  $K^0$  et  $C$  sont anneaux commutants dans  $\mathfrak{F}$ , l'anneau commutant de  $T \otimes K^0$  dans  $\mathfrak{F}$  n'est autre que l'anneau commutant de  $T$  dans  $C$ , c'est-à-dire  $T$  lui-même; par suite,  $T \otimes K^0$  est l'anneau des endomorphismes de  $F$  considéré comme espace vectoriel sur  $T$ , autrement dit,  $T$  est corps de décomposition de  $K^0$ .

Ayant ainsi démontré la caractérisation classique des corps de décomposition, supposons qu'un tel corps  $T$  soit galoisien sur  $Z$ , de degré  $n$ , et soit  $\Gamma$  son groupe de Galois par rapport à  $Z$ . Pour tout automorphisme  $\sigma \in \Gamma$ , il existe un élément  $u_\sigma \in C$  tel que l'automorphisme  $\sigma$  de  $T$  soit restriction à  $T$  de l'automorphisme intérieur  $z \rightarrow u_\sigma z u_\sigma^{-1}$  de  $C$ ; on a donc  $u_\sigma t u_\sigma^{-1} = t^\sigma$  pour tout  $t \in T$ , ce qui signifie que  $u_\sigma$  est une application *semi-linéaire* biunivoque de  $E$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$  de  $T$ . Les  $n$  applications semi-linéaires  $u_\sigma$  sont linéairement indépendantes par rapport à  $T$  (lemme 2b), donc, comme  $[C : T] = n$ , elles forment une base de  $C$  par rapport à  $T$ , et par suite  $A$  est un *sous-anneau galoisien extérieur* de  $B = A \otimes T$ ; toute application semi-linéaire de  $E$  dans lui-même, relative à  $\sigma$ , et contenue dans  $C$ , est de la forme  $t u_\sigma (t \in T)$ . On en déduit aussitôt qu'on a  $u_\sigma u_\tau = a_{\sigma, \tau} u_{\sigma \tau}$  où  $a_{\sigma, \tau} \in T$ ; le «système de facteurs»  $(a_{\sigma, \tau})$  satisfait aux conditions d'associativité

$$a_{\varrho, \sigma} a_{\varrho \sigma, \tau} = a_{\sigma, \tau}^{\varrho} a_{\varrho, \sigma \tau} \quad (1)$$

et si on remplace la base  $(u_\sigma)$  par une base formée de multiples scalaires  $c_\sigma u_\sigma = u'_\sigma$ , le nouveau système de facteurs  $(a'_{\sigma, \tau})$  est donné par  $a'_{\sigma, \tau} = c_\sigma c_\tau^\sigma c_{\sigma \tau}^{-1} a_{\sigma, \tau}$ . Si  $\mathfrak{A}$  désigne le groupe multiplicatif des applications  $(\sigma, \tau) \rightarrow a_{\sigma, \tau}$  de  $\Gamma \times \Gamma$  dans  $T$ , satisfaisant à (1),  $\mathfrak{C}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{A}$  formé des systèmes de facteurs dégénérés de la forme  $(c_\sigma c_\tau^\sigma c_{\sigma \tau}^{-1})$ , à toute classe d'algèbres simples de centre  $Z$  admettant  $T$  comme corps de décomposition, on fait ainsi correspondre un élément bien déterminé du groupe quotient  $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ . Cette correspondance est *biunivoque*, car la structure de l'anneau  $C$  est entièrement déterminée à une isomorphie près par l'élément correspondant de  $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ , et nous avons vu que deux classes d'algèbres

(30) Artin-Nesbitt-Thrall, p. 75.

simples ne peuvent donner des algèbres  $C$  isomorphes que si elles sont identiques. On montre aisément d'autre part (31) que tout élément du groupe  $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$  correspond à une classe d'algèbres décomposées par  $T$ . Le point qui, dans les exposés classiques, se démontre par des calculs assez pénibles, est le fait que la correspondance ainsi établie est un *isomorphisme* entre le groupe  $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$  et le groupe des classes d'algèbres décomposées par  $T$  (32). Or, soient  $A$  et  $A'$  deux algèbres simples de centre  $Z$ , décomposées par  $T$ ;  $B = A \otimes T$  et  $B' = A' \otimes T$  sont les anneaux d'endomorphismes de deux espaces vectoriels  $E, E'$  sur le corps  $T$ ;  $B \otimes B'$  (produit tensoriel pris par rapport au corps  $T$ ) est isomorphe à  $(A \otimes A') \otimes T$  (produits tensoriels par rapport au corps  $Z$ ) et peut être considéré comme anneau d'endomorphismes de l'espace vectoriel  $E'' = E \otimes E'$ , produit tensoriel de  $E$  et  $E'$  (par rapport à  $T$ ) (33). Faisons maintenant usage du lemme suivant de la théorie des produits tensoriels (33) :

**Lemme 3.** — *Soient  $E, E'$  deux espaces vectoriels sur un corps  $T$ ,  $E'' = E \otimes E'$  leur produit tensoriel; si  $u$  (respectivement  $u'$ ) est une application semi-linéaire de  $E$  (respectivement  $E'$ ) dans lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$  de  $T$ , l'application  $u''$  de  $E''$  dans lui-même, définie par  $u''(\sum_i x_i \otimes x'_i) = \sum_i u(x_i) \otimes u'(x'_i)$  (et notée  $u \otimes u'$ ) est une application semi-linéaire relative à l'automorphisme  $\sigma$ .*

Soient alors  $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$  les anneaux d'endomorphismes des groupes additifs  $E, E', E''$ , et soient  $C, C', C''$  les anneaux commutants de  $A, A', A'' = A \otimes A'$  dans  $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$  respectivement. Si  $u_\sigma$  (respectivement  $u'_\sigma$ ) est une application semi-linéaire de  $E$  (respectivement  $E'$ ) dans lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$ , et permutable avec  $A$  (respectivement  $A'$ ), le lemme 3 montre que  $u''_\sigma = u_\sigma \otimes u'_\sigma$  est une application semi-linéaire de  $E''$  dans lui-même, permutable avec  $A''$ , donc appartenant à  $C''$ ; si  $u_\sigma$  et  $u'_\sigma$  sont biunivoques, il en est évidemment de même de  $u''_\sigma$ . Comme on sait a priori que dans  $C''$  les applications semi-linéaires relativement à  $\sigma$  se déduisent toutes de l'une d'elles à un facteur près appartenant à  $T$ , on peut prendre les  $u''_\sigma$  comme base de  $C''$  sur  $T$ ; cela étant, si  $u_\sigma u_\tau = a_{\sigma, \tau} u_{\sigma \tau}$ ,  $u'_\sigma u'_\tau = a'_{\sigma, \tau} u'_{\sigma \tau}$ , il est clair que  $u''_\sigma u''_\tau = a_{\sigma, \tau} a'_{\sigma, \tau} u''_{\sigma \tau}$ : c'est le « théorème de multiplication » des systèmes de facteurs qui achève d'établir l'isomorphisme cherché.

(31) *Artin-Nesbitt-Thrall*, p. 82—83.

(32) La présentation la plus simple des calculs classiques est sans doute celle de *Jacobson, Theory of rings*, p. 108.

(33) Voir *H. Whitney, Tensor products of abelian groups*, Duke M. Journ., t. 4 (1938), p. 495—528.

De la même manière on traite l'*extension* du corps de décomposition  $T$  à un sur-corps  $S$  (galoisien sur  $Z$ ). Nous désignerons ici par  $\Gamma$  le groupe de Galois de  $S$  par rapport à  $Z$ , par  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  l'homomorphisme canonique de  $\Gamma$  sur le groupe de Galois  $\bar{\Gamma}$  de  $T$  par rapport à  $Z$ . Le produit tensoriel  $A \otimes S$  (par rapport à  $Z$ ) est identique au produit tensoriel  $B \otimes S$  (relatif à  $T$ ) ; or ce dernier peut être considéré comme l'anneau d'endomorphismes du produit tensoriel  $E' = E \otimes S$  (relatif à  $T$ ,  $S$  étant considéré comme espace vectoriel sur  $T$ ),  $E'$  étant considéré comme *espace vectoriel sur  $S$* . Cela étant,  $\sigma$  est une application semi-linéaire biunivoque de l'espace vectoriel  $S$  (relatif à  $T$ ) sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\bar{\sigma}$  de  $T$  ; si  $u_{\bar{\sigma}}$  est une application semi-linéaire de  $E$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\bar{\sigma}$ , et permutable avec  $A$ ,  $u'_{\sigma} = u_{\bar{\sigma}} \otimes \sigma$  est, d'après le lemme 3, une application semi-linéaire de  $E'$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\bar{\sigma}$  de  $T$ , et permutable avec  $A$  ; mais quand on considère  $E'$  comme espace vectoriel sur  $S$ ,  $u'_{\sigma}$  est aussi une application semi-linéaire de  $E'$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$  du corps  $S$ . On en conclut que les  $u'_{\sigma}$  forment une base par rapport à  $S$  du commutant de  $A$  dans l'anneau des endomorphismes du groupe  $E'$ , et que le système de facteurs correspondant est  $a_{\sigma, \tau} = a_{\bar{\sigma}, \bar{\tau}}$  (34).

Voyons enfin comment on passe d'un système de facteurs d'une algèbre  $A$ , décomposée par  $T$ , à un système de facteurs de l'algèbre  $A_{(U)} = A \otimes U$ , obtenue par extension du corps des scalaires  $Z$  à un surcorps commutatif  $U$  de  $Z$  (contenu, ainsi que  $T$ , dans une extension fixe  $\Omega$  de  $Z$ ) ;  $A_{(U)}$  est une algèbre simple de centre  $U$ , et elle est décomposée par l'extension galoisienne  $TU$  de  $U$  ; il s'agit naturellement d'un système de facteurs de  $A_{(U)}$  par rapport à  $TU$ . On voit aussitôt (35) qu'on peut se borner à traiter deux cas particuliers (parce que  $T$  est galoisien sur  $Z$ ) ; celui où  $U$  et  $T$  sont linéairement disjoints sur  $Z$ , et celui où  $U$  est un sous-corps de  $T$ . Dans le premier cas, tout automorphisme  $\sigma$  de  $T$  par rapport à  $Z$  s'étend d'une seule manière à un automorphisme (noté encore  $\sigma$ ) de  $TU$  par rapport à  $U$  ; soit  $E'$  l'espace vectoriel sur  $TU$  obtenu par extension à  $TU$  du corps des scalaires  $T$  de  $E$  ; si  $u_{\sigma}$  est une application semi-linéaire de  $E$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$  de  $T$  et permutable avec  $A$ , il est immédiat que  $u_{\sigma}$  se prolonge d'une seule manière en une application semi-linéaire de  $E'$  sur lui-même, relative à l'automorphisme  $\sigma$  de  $TU$ , et permutable avec  $A \otimes U$  ; donc le système de facteurs ne change pas.

---

(34) Cf. *Artin-Nesbitt-Thrall*, p. 91—93.

(35) *Artin-Nesbitt-Thrall*, p. 89—91.

Au contraire, dans le second cas, on a  $TU = T$  ; l'anneau commutant de  $A \otimes U$  dans  $\mathfrak{E}$  n'est autre que l'anneau  $C'$  commutant de  $U$  dans l'anneau  $C$ , évidemment engendré par les  $u_\sigma$  permutables avec  $U$ , c'est-à-dire correspondant aux  $\sigma$  du groupe  $\Delta$  de  $T$  par rapport à  $U$  ; le système de facteurs est alors formé des  $a_{\sigma, \tau}$  où  $\sigma$  et  $\tau$  parcouruent seulement le groupe  $\Delta$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *E. Artin and G. Whaples* : The theory of simple rings, *American Journal of Mathematics*, t. 65 (1943) p. 87—107.
- [2] *H. Cartan* : Théorie de Galois pour les corps non commutatifs, *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, t. 64 (1947) p. 59—77.
- [3] *J. Dieudonné* : Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 70 (1942), p. 46—75.
- [4] *J. Dieudonné* : Compléments à trois articles antérieurs, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 74 (1946) p. 59—68.
- [5] *N. Jacobson* : The fundamental theorem of the Galois theory for quasi-fields, *Annals of Mathematics*, t. 41 (1940) p. 1—7.
- [6] *N. Jacobson* : Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 57 (1945) p. 228—245.
- [7] *N. Jacobson* : The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *American Journal of Mathematics*, t. 67 (1945) p. 300—320.
- [8] *N. Jacobson* : A note on division rings, *American Journal of Mathematics*, t. 69 (1947) p. 27—36.
- [9] *B. L. van der Waerden* : *Moderne Algebra*, t. II, 1<sup>re</sup> éd., Berlin (Springer), 1931.

(Reçu le 1<sup>er</sup> juillet 1947.)

---

Note ajoutée pendant la correction des épreuves : Pendant l'impression de ce travail est paru un article de *T. Nakayama et G. Azumaya* : On irreducible rings, *Ann. of Math.* t. 48 (1947) p. 949—965, qui aborde la théorie des anneaux simples dans le même esprit que le présent travail, et contient un certain nombre de résultats communs, notamment nos théorèmes 1, 5 et 8a.