Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 21 (1948)

Artikel: Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens.

Autor: Habicht, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18600

Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens

Von Walter Habicht, Schaffhausen

Einleitung

Es sei $f(x)$ ein Polynom in einer Variablen mit reellen Koeffizienten, dessen reelle Nullstellen alle einfach sind. Dann besagt der *Sturm*sche Satz die Existenz einer Kette von Polynomen absteigender Grade mit den Anfangsgliedern f und $f' = \frac{df}{dx}$ von folgender Eigenschaft:

Ist $\overline{a_1 a_2}$ ein reelles Intervall, in dessen Endpunkten f nicht verschwindet, z die Anzahl der Nullstellen von f auf $\overline{a_1 a_2}$, $w(\xi)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Kette an der Stelle $x = \xi$, so gilt

$$-z = w(a_2) - w(a_1) \ . \tag{a}$$

Die *Sturm*sche Kette besteht aus Restpolynomen, welche aus f und f' durch Anwendung des Euklidischen Algorithmus im Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten hervorgehen; die Ausführbarkeit dieser Konstruktion ist nicht an die spezielle Eigenschaft des zweiten Ausgangspolynoms, Ableitung des ersten zu sein, gebunden. Man kann durch dasselbe Verfahren zu zwei beliebigen Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ eine zur *Sturm*schen Kette analoge Polynomkette und die entsprechende Vorzeichenfunktion bilden, falls nur der Grad des zweiten nicht größer als der Grad des ersten Ausgangspolynoms ist. Diese Vorzeichenfunktion $w(x)$ hat, wie leicht zu sehen, folgende Bedeutung für das Polynompaar $(f(x), g(x))$[1]:

Man trage in einer Ebene den variablen Vektor mit den Komponenten $f(x)$ und $g(x)$ vom Nullpunkt aus ab und lasse die Variable x ein reelles Intervall $\overline{a_1 a_2}$, auf welchem f und g keine gemeinsame Nullstelle besitzen, im positiven Sinne durchlaufen. Es seien $\xi_1, \ldots, \xi_l$ die Nullstellen von f auf $\overline{a_1 a_2}$; man setze $c(\xi_\lambda) = +1$ oder -1, je nachdem der Vektor (f, g)

[1] Vgl. etwa *G. Valiron*, Théorie des fonctions, 109—111.

beim Übergang über die Stelle ξ_λ von einem ungeradzahligen in einem geradzahligen Quadranten übertritt oder umgekehrt. Bleibt der Vektor beim Übergang im selben Quadranten, so setze man $c(\xi_\lambda) = 0$. Dann gilt

$$\sum_{\lambda=1}^{l} c(\xi_\lambda) = w(a_2) - w(a_1) \quad . \tag{b}$$

Die linksstehende Summe wird funktionentheoretisch als Index des Quotienten $\frac{f}{g}$ zwischen a_1 und a_2 bezeichnet (vgl. a. a. O.[1]); wir werden sie in § 3 als *Indikator* des Polynompaares (f, g) bezüglich $\overline{a_1 a_2}$ bezeichnen, da wir die Bezeichnung Index im Hinblick auf die in einer andern Arbeit[2]) behandelte n-dimensionale Verallgemeinerung in einem andern, nämlich im abbildungstheoretischen Sinne gebrauchen werden (vgl. § 3, Def. 2 und 3).

Offenbar ist die *Sturm*sche Formel (a) in der Formel (b) enthalten (vgl. auch § 3), so daß wir uns im folgenden auf die letztere beschränken können.

Das Resultat (b) kann in zweifacher Hinsicht verallgemeinert bzw. präzisiert werden:

1. Da es sich bei der Bestimmung des Indikators eines Polynompaars um ein rein algebraisches Problem handelt, scheint es vom axiomatischen Standpunkt aus angemessen, einen rein algebraisch charakterisierten Körper als Koeffizienten- und Variablenbereich zugrundezulegen; anders ausgedrückt: es soll untersucht werden, was für Eigenschaften des Grundkörpers bei der Herleitung von (b) benützt werden.

Dementsprechend werden wir in § 3 die Gültigkeit von (b) für einen beliebigen reell-abgeschlossenen Grundkörper im Sinne von Artin-Schreier nachweisen[3]); außer den Anordnungseigenschaften werden wir dabei nur benützen, daß für Polynome über einem solchen Körper das *Bolzanosche Prinzip* gilt (vgl. § 3, 1).

2. Mit Hilfe der oben konstruierten Kette läßt sich wohl der Indikator für ein *speziell* vorgegebenes Polynompaar bestimmen. Indessen hat die Methode den Nachteil, daß bei formaler Ausführung des Euklidischen Algorithmus die Koeffizienten der Kettenpolynome als gebrochen rationale Funktionen der Koeffizienten der Anfangspolynome erscheinen. Dies hat zur Folge, daß je nach der Wahl der Anfangskoeffizienten völlig ver-

---

[2]) *W. Habicht*, Zur inhomogenen Eliminationstheorie, Comm. Math. Helv.

[3]) Vgl. *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra I, Kap. 11, §§ 67, 68, sowie *Artin-Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamb. Abh. 5 (1927), 85—99.

schiedene Ketten auftreten; zum mindesten gibt uns das Verfahren keinen Einblick in die Abhängigkeit der Kette von den Anfangskoeffizienten, wenn alle möglichen Spezialfälle mit eingeschlossen werden. Gerade dieses Problem ist aber für viele reell-algebraische Untersuchungen wichtig und interessant [4]. — So wird man auf folgendes Problem geführt:

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ die *allgemeinen* Polynome (d. h. die Polynome, deren Koeffizienten Unbestimmte sind) der Gradzahlen $n+1$ und n [5]. Zu ihnen soll eine mit f und g beginnende Kette von Polynomen absteigender Grade in x konstruiert werden, welche außerdem *ganz rational von den unbestimmten Koeffizienten von f und g abhängen*. Bei einer beliebigen Spezialisierung der Koeffizienten in einem reell-abgeschlossenen Körper K, bei welcher nur nicht die Anfangskoeffizienten von f und g zugleich verschwinden [6], soll die Kette dieselbe charakteristische Eigenschaft wie die gewöhnliche, nach dem Euklidischen Algorithmus hergestellte Kette besitzen, d. h. es soll für ein beliebiges Intervall $\overline{a_1 a_2}$ aus K die Formel (b) gelten, wobei Indikator und Vorzeichenfunktion in analoger Weise wie oben zu definieren sind.

Dieses Problem soll in der vorliegenden Arbeit gelöst werden. In § 1 gehen wir aus von zwei allgemeinen Polynomen f und g der Grade $n+1$ und n und geben direkt die explizite Darstellung der Kettenglieder (§ 1, **1**, (5), (6)). Aus ihr leiten wir in den beiden folgenden Abschnitten gewisse rekursive Beziehungen zwischen je drei Kettengliedern ab; als Spezialfälle sind in ihnen jene Rekursionen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Kettengliedern enthalten, welche dem Euklidischen Algorithmus entsprechen (§ 1, **3** (10), (11)). — In § 2 wird das Verhalten der Kette bei Spezialisierung zunächst in einem beliebigen Körper K untersucht (§ 2, **1**, Satz 1) und sodann für den Fall, daß K angeordnet ist, die Haupteigen-

---

[4]) Als Beispiel sei erwähnt *E. Artin*, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Hamb. Abh. **5** (1927), 2. Teil, S. 104. Dort wird folgende Tatsache benützt: Ist $f(x) = u_0 x^n + \cdots + u_n$ das allgemeine Polynom n-ten Grades und K ein reell-abgeschlossener Körper, so gibt es eine Kette von endlich vielen ganzen rationalen Funktionen $\varphi_s(u)$ der u mit rationalen Koeffizienten von der Art, daß für spezielle u_ν aus K die Vorzeichenverteilung in der Kette $\varphi_s(u)$ Aufschluß gibt über die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln der für diese u_ν spezialisierten Funktion $f(x)$. — Dies entspricht dem Spezialfall $g = f'$ unseres Reduktionssatzes (vgl. § 3, **2**) (anstatt die Werte der Kettenpolynome in zwei festen Punkten zu bilden, nehme man deren Anfangskoeffizienten, mit geeigneten Vorzeichen versehen).

[5]) Die Forderung über die Grade ist nur scheinbar speziell; in Wirklichkeit umschließt sie alle möglichen Fälle als Spezialfälle (vgl. auch § 2, **1**).

[6]) Diese einzige Bedingung, welche wir an die Spezialisierung knüpfen, bedeutet für die späteren Anwendungen ebenfalls keine Einschränkung.

schaft der Kette hergeleitet: jedem $\xi_0 \epsilon K$ mit $f(\xi_0) \neq 0$ läßt sich eine Umgebung $U(\xi_0)$ zuordnen, innerhalb welcher die Vorzeichenfunktion $w(\xi)$ konstant ist (§ 2, 3, Satz 3).

Schließlich wird in § 3 als weiteres Postulat die reelle Abgeschlossenheit von K hinzugenommen und der Begriff des Indikators eingeführt (§ 3, 1, Def. 2, 3). Der *Sturm*sche Satz läßt sich dann dahin verallgemeinern, daß der Indikator bei beliebiger Spezialisierung von f und g in K durch die Vorzeichenverteilung der Kette, gebildet in den Endpunkten des Intervalls, völlig charakterisiert ist (§ 3, 2, Reduktionssatz).

§ 1. Die verallgemeinerte Sturmsche Kette von zwei Polynomen in einer Variablen

1. Es seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} u_k \cdot x^{n+1-k}\,, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k \cdot x^{n-k} \tag{1}$$

zwei Polynome von den Graden $n+1$ und n in einer Variablen x mit unbestimmten Koeffizienten [7]). Wir wollen zu jeder ganzen Zahl r mit $0 \leqq r < n$ zwei Polynome

$$p_r(x) = \sum_{k=0}^{n-r-1} a_k \cdot x^{n-r-1-k}\,, \quad q_r(x) = \sum_{k=0}^{n-r} b_k \cdot x^{n-r-k} \tag{2}$$

von den Graden $n-r-1$ und $n-r$ mit Koeffizienten aus dem Ring $\Gamma[u, v]$ bestimmen [8]), so daß das Polynom

$$p_r \cdot f + q_r \cdot g$$

nur vom Grade r in x ist.

Bilden wir letzteren Ausdruck rein formal aus (1) und (2), so wird er vom Grade $2n-r$. Wir fordern, daß hierin die ersten $2(n-r)$ Koeffizienten verschwinden und haben dafür $2(n-r)+1$ zu bestimmende Größen a_k, b_k zur Verfügung. Das bezügliche Gleichungssystem lautet

$$\begin{array}{llr} u_0 \cdot a_0 & + v_0 \cdot b_0 & = 0 \\ u_1 \cdot a_0 + u_0\, a_1 & + v_1 \cdot b_0 + v_0 \cdot b_1 & = 0 \\ \ddots & \ddots & \\ \cdots\cdots + u_{n-r}\, a_{n-r-1} & + \cdots\cdots + v_{n-r-1}\, b_{n-r} & = 0\,. \end{array} \tag{3}$$

---

[7]) Vgl. Anm. 5.

[8]) Γ bedeutet den Ring der ganzen Zahlen, R den Körper der rationalen Zahlen.

Das Hauptglied des ersten $2(n-r)$-reihigen Minors der Koeffizientenmatrix lautet $u_0^{n-r} \cdot v_{n-r}^{n-r} \neq 0$, und dieses Glied liefert die höchsten Potenzen von u_0 und v_{n-r}, die in der Entwicklung des Minors auftreten; der Rang des Gleichungssystems ist also $2(n-r)$ und die Lösung demnach bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt.

Sei nun

$$\delta_k = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \quad (k = 0, 1, \ldots) .$$

Die Vorzeichen δ_k erfüllen die beiden Relationen

$$\delta_k \cdot \delta_{k+1} = (-1)^{k+1} \quad \text{und} \quad \delta_k \cdot \delta_{k+2} = -1 . \tag{4}$$

Wir wählen als Lösung des Gleichungssystems (3) die mit dem Vorzeichen δ_{n-r} versehenen Minoren, d. h. wir nehmen für die Polynome p_r und q_r die beiden folgenden Determinanten:

$$p_r = \delta_{n-r} \cdot \begin{vmatrix} x^{n-r-1} \cdots 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ u_0 \,. & v_0 \,. \\ \vdots \;\; \ddots & \vdots \;\; \ddots \\ \vdots \quad u_0 & \vdots \quad\quad v_0 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \cdots u_{n-r} & \cdots v_{n-r-1} \end{vmatrix} , \quad q_r = \delta_{n-r} \cdot \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & x^{n-r} \cdots 1 \\ u_0 \,. & v_0 \,. \\ \vdots \;\; \ddots & \vdots \;\; \ddots \\ \vdots \quad u_0 & \vdots \quad\quad v_0 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \cdots u_{n-r} & \cdots v_{n-r-1} \end{vmatrix} . \tag{5}$$

$$(r = n-1, \ldots, 0)$$

p_r und q_r sind demnach gewisse Funktionale des Polynompaares (f, g); dies wollen wir durch die symbolische Schreibweise $p_r = \varphi_{n,r}(f, g)$, $q_r = \psi_{n,r}(f, g)$ ausdrücken. $\varphi_{n,r}$ und $\psi_{n,r}$ sind dabei als Operatoren aufzufassen, welche sich auf ein beliebiges Polynompaar der Grade $n+1$ und n ausüben lassen (vgl. **3**).

Wir setzen jetzt

$$f_r = p_r \cdot f + q_r \cdot g = \sum_{k=0}^{r} c_{r,k} \cdot x^{r-k} \quad (r = n-1, \ldots, 0) . \tag{6}$$

Hierin spielen die höchsten Koeffizienten später eine besondere Rolle; deshalb führen wir für sie eigene Buchstaben ein:

$$c_{r,0} = R_r \qquad (r = n-1, \ldots, 0)$$

und bezeichnen sie als *Nebenresultanten.* Berücksichtigt man die aus dem Gleichungssystem (3) hervorgehende Definition von p_r und q_r, so ergibt sich aus (6) unmittelbar (da die Determinanten (5) ungerader Ordnung sind):

$$R_r = \delta_{n-r}\cdot \left| \begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} u_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & u_0 \\ \vdots & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{n-r+1}\end{matrix}}^{n-r} & \overbrace{\begin{matrix} v_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & v_0 \\ \vdots & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & v_{n-r}\end{matrix}}^{n-r+1}\end{matrix} \right| . \qquad (7)$$

Insbesondere ist also $R_0 = R$ bis auf das Vorzeichen die *Sylvester*sche *Resultante* von f und g. — Man erkennt sofort, daß keiner der Ausdrücke R_r identisch verschwindet (etwa wieder durch Betrachtung des Hauptglieds). Ferner ergeben sich aus (7) und (5) durch leichte Rechnung unter Benützung der ersten Relation (4) die beiden bemerkenswerten Formeln

$$\begin{aligned} v_0 \cdot R_r &= -\, a_{r-1,0} \\ u_0 \cdot R_r &= \, b_{r-1,0}\,, \end{aligned} \qquad (8)$$

wobei $a_{r-1,0}$ bzw. $b_{r-1,0}$ die höchsten Koeffizienten von p_{r-1} bzw. q_{r-1} bedeuten.

2. Wir haben zu jedem Index r mit $0 \leq r < n$ je eine Gruppe von drei Polynomen p_r, q_r, f_r konstruiert; mit abnehmendem Index wachsen die Grade der ersten beiden Polynome, diejenigen der letzten hingegen nehmen ab, und zwar je um eins. Wir verknüpfen jetzt je zwei Gruppen mit benachbartem Index durch drei grundlegende Formeln, welche wir sinngemäß als *Umkehrformeln* bezeichnen. Sie lauten

$$\begin{vmatrix} p_r & p_{r-1} \\ q_r & q_{r-1} \end{vmatrix} = R_r^2\,, \qquad \begin{vmatrix} p_r & p_{r-1} \\ f_r & f_{r-1} \end{vmatrix} = R_r^2 \cdot g\,, \qquad \begin{vmatrix} q_r & q_{r-1} \\ f_r & f_{r-1} \end{vmatrix} = -R_r^2 \cdot f\,. \qquad (9)$$

Beweis. Aus den beiden Formeln

$$\begin{aligned} f_r &= p_r \cdot f + q_r \cdot g \\ f_{r-1} &= p_{r-1} \cdot f + q_{r-1} \cdot g \end{aligned} \qquad (6')$$

erhält man zunächst

$$\begin{vmatrix} p_r & p_{r-1} \\ f_r & f_{r-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_r & p_{r-1} \\ q_r & q_{r-1} \end{vmatrix} \cdot g\,. \qquad (6'')$$

Hierin ist die linke Seite ein Polynom vom Grad n, denn $p_{r-1} \cdot f_r$ ist vom Grad n, $p_r \cdot f_{r-1}$ sogar nur vom Grad $n-2$. Da aber auch g vom Grad n ist, so ist die rechtsstehende Determinante eine *Konstante* aus dem Koeffizientenring $\Gamma[u, v]$, und zwar gleich dem Quotienten der höchsten Koeffizienten von $-p_{r-1} \cdot f_r$ und g, also nach der ersten Formel (8) gleich R_r^2, q. e. d.

Die Formeln (9) gelten ihrer Herleitung gemäß für sämtliche Indices r zwischen $n-1$ und 1. Wir können sie aber ohne weiteres auf die Indices n und $n+1$ ausdehnen, indem wir setzen

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 1, & q_{n+1} &= 0, & f_{n+1} &= f, \\ p_n &= 0, & q_n &= 1, & f_n &= g. \end{aligned}$$

Bei dieser Wahl bleiben die Formeln (6′) und (6″) weiter gültig; wegen $p_{n-1} = -v_0^2 = -R_n^2$ gelten dann die Formeln (9) unverändert für den Index n, während man für den Index $n+1$ rechts an Stelle von R_{n+1}^2 die Zahl 1 zu setzen hat.

Damit bilden die Polynome $f = f_{n+1}$, $g = f_n$, $f_{n+1}, \ldots, f_0 = R$ eine vollständige Kette, zwischen deren Gliedern die Relationen (9) bestehen (wobei für den Index $n+1$ rechts an Stelle von R_{n+1}^2 die Zahl 1 steht). Wir wollen diese Kette im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

3. Wir leiten jetzt eine rekursive Beziehung zwischen f_{r-1}, f_r und f_{r-1} resp. allgemeiner zwischen f_{r+1}, f_r und f_s $(s<r)$ her, welche für sämtliche Indices r mit $1 \leqq r \leqq n-1$ gilt und die Verwandtschaft unserer Kette mit der *Sturm*schen Kette aufzeigt.

Bildet man die beiden letzten Gleichungen (9) für den Index $r+1$ $(r = n-1, \ldots, 1)$:

$$\begin{aligned} p_{r+1} \cdot f_r - p_r \cdot f_{r+1} &= R_{r+1}^2 \cdot g \\ q_{r+1} \cdot f_r - q_r \cdot f_{r+1} &= -R_{r+1}^2 \cdot f , \end{aligned}$$

multipliziert die erste dieser Identitäten mit q_{r-1}, die zweite mit p_{r-1} und subtrahiert, so erhält man

$$\begin{vmatrix} p_{r+1} & p_{r-1} \\ q_{r+1} & q_{r-1} \end{vmatrix} f_r - \begin{vmatrix} p_r & p_{r-1} \\ q_r & q_{r-1} \end{vmatrix} f_{r+1} = R_{r+1}^2 \cdot (p_{r-1} \cdot f + q_{r-1} g) ,$$

also wegen der Formeln (9):

$$R_{r+1}^2 \cdot f_{r-1} = -R_r^2 \cdot f_{r+1} + Q_r f_r . \tag{10}$$

Hierin ist Q_r ein Polynom aus $\Gamma[u, v, x]$, welches sich durch die Koeffizienten von f_{r+1} und f_r ausdrücken läßt: vergleicht man nämlich in (10) die Koeffizienten der Potenzen x^{r+1} und x^r, so erhält man mit den Bezeichnungen von **1** (6):

$$Q_r = R_r\, R_{r+1} \cdot x + (R_r\, c_{r+1,1} - R_{r+1}\, c_{r,1}) \ .$$

Mit Hilfe der in **1**. eingeführten Operatoren läßt sich damit (10) in folgender Gestalt schreiben:

$$R_{r+1}^2 \cdot f_{r-1} = \varphi_{r,r-1}(f_{r+1}, f_r) \cdot f_{r+1} + \psi_{r,r-1}(f_{r+1}, f_r) \cdot f_r \ . \qquad (10')$$

Diese Formel führt uns auf die angekündigte Verallgemeinerung von (10). Sie lautet

$$R_{r+1}^{2(r-s)} \cdot f_s = p_{rs} \cdot f_{r+1} + q_{rs} \cdot f_r \ ,$$

$$p_{rs} = \varphi_{rs}(f_{r+1}, f_r) \ , \quad q_{rs} = \psi_{rs}(f_{r+1}, f_r) \qquad (11)$$

$$(0 < r < n \ ; \quad 0 \leqq s < r) \ .$$

Beweis. Wir halten r fest, bilden zunächst die Polynome

$$\bar f_r = f_r \ ; \quad \bar f_s = p_{rs} \cdot f_{r+1} + q_{rs} \cdot f_r \qquad (s = r-1, \ldots, 0) \ ,$$

setzen sodann zur Abkürzung $R_{r+1}^2 = \lambda$ und bilden über dem Koeffizientenkörper $R(u, v)$ die Polynome

$$f_s^* = \frac{1}{\lambda^{r-s}} \cdot \bar f_s \qquad (s = r, \ldots, 0) \ ;$$

die höchsten Koeffizienten bezeichnen wir mit $\bar R_s$ resp. R_s^*. Wir beweisen nun, daß für alle Indices s mit $1 \leqq s \leqq r-1$ zwischen f_{s+1}^*, f_s^* und f_{s-1}^* die rekursive Beziehung (10) besteht; da $f_r^* = f_r$ und wegen (10'): $f_{r-1}^* = f_{r-1}$ gilt, kann man dann sukzessive schließen, daß auch $f_s^* = f_s$ sein muß für $s = r-2, \ldots, 0$.

Daß die rekursive Beziehung (10) zunächst für die $\bar f_s$ gilt, d. h. daß

$$\bar R_{s+1}^2 \cdot \bar f_{s-1} = - \bar R_s^2 \cdot \bar f_{s+1} + \bar Q_s \cdot \bar f_s \quad (s = r-1, \ldots, 1) \ ,$$

folgt aus der Bedeutung der Operatoren φ_{rs} und ψ_{rs} durch wörtliche Wiederholung der in **1**. gemachten Schlüsse. Dividiert man nun für jeden Index s die entsprechende dieser Identitäten durch

$$\lambda^{2(r-s-1)} \cdot \lambda^{r-s+1} = \lambda^{2(r-s)} \cdot \lambda^{r-s-1} \ ,$$

so kommt

$$R_{s+1}^{*2} \cdot f_{s-1}^* = - R_s^{*2} \cdot f_{s+1}^* + Q_s^* f_s^* \quad (s = r-1, \ldots, 1) \ , \ \text{q. e. d.}$$

§ 2. Die Haupteigenschaft der Kette

1. Es sei K ein beliebiger Körper, f und g zwei Polynome in einer Variablen x mit Koeffizienten aus K, n_1 und n_2 ihre Grade in x. Wir setzen $n = n_1 - 1$ für $n_1 \geqq n_2 + 1$, $n = n_2$ für $n_1 < n_2$ und denken uns f und g aus zwei allgemeinen Polynomen der Grade $n + 1$ und n durch Spezialisierung der unbestimmten Koeffizienten hervorgegangen: $u_i \to \overline{u}_i$ resp. $v_i \to \overline{v}_i$ $(i = 0, \ldots, n + 1$ resp. $n)$; dabei sind insbesondere $\overline{u}_0$ und $\overline{v}_0$ *nicht beide gleich Null.* Die Querstriche lassen wir im folgenden wieder weg. Bei der Spezialisierung geht die in § 1 konstruierte Kette über in eine Kette von Polynomen $f, g, f_{n-1}, \ldots, f_0$ mit Koeffizienten aus K. Wir bezeichnen die Koeffizienten dieser Polynome durch die gleichen Buchstaben wie in § 1, wobei immer zu beachten ist, daß es sich jetzt um spezielle Größen aus dem Körper K handelt.

Wir setzen im folgenden $R_{n+1} = u_0$, $R_n = v_0$ und untersuchen zunächst, wie sich das Verschwinden einer oder mehrerer Nebenresultanten bei der Spezialisierung auf die Kette auswirkt. Wir stützen uns dabei wesentlich auf die Formel (11) in § 1, 3.

f_r sei ein Polynom der Kette mit $0 < r \leqq n$; es sei $R_{r+1} \neq 0$ und

$$R_r = 0, \qquad c_{r1} = 0, \ldots, c_{r,\,r-s-1} = 0, \qquad c_{r,\,r-s} \neq 0 \;;$$

f sei also vom Grade $s \leqq r$. Dann folgt aus (11) bzw. (im Fall $r = n$) direkt aus (6) (man hat, um $p_{r\sigma}$ und $q_{r\sigma}$ zu bilden, in den Determinanten (5) n durch r, r durch σ und die u, v durch die Koeffizienten von f_{r+1} und f_r zu ersetzen):

1. $f_{r-1}, \ldots, f_{s+1}$ verschwinden identisch.

2. $p_{rs} = 0$, $q_{rs} = \delta_{r-s} \cdot R_{r+1}^{r-s} \cdot c_{r,r-s}^{r-s}$,

$$\left.\begin{aligned} R_{r+1}^{r-s} \cdot f_s &= \delta_{r-s} \cdot c_{r,r-s}^{r-s} \cdot f_r \qquad (r < n) \\ f_s &= \delta_{n-s}\, v_{n-s}^{n-s} \cdot u_0^{n-s} \cdot g \qquad (r = n)\,. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Das bedeutet: f_r und f_s sind *proportional*, und der Proportionalitätsfaktor ist $\neq 0$; also ist auch f_s vom Grad s und deshalb $R_s \neq 0$. Verschwinden insbesondere nach R_{r+1} alle Nebenresultanten, so verschwinden die Polynome $f_r, \ldots, f_0$ alle identisch.

3. $p_{r,s-1} = \delta_{r-s+1} \cdot (-1)^{r-s} \cdot R_{r+1}^{r-s} \cdot c_{r,r-s}^{r-s+2}$,

also wegen (4) (§ 1, **1.**) :

$$\begin{aligned} R_{r+1}^{r-s+2} \cdot f_{s-1} &= \delta_{r-s+2} \cdot c_{r,r-s}^{r-s+2} f_{r+1} + q^*_{r,s-1} \cdot f_r \quad (r < n) \\ f_{s-1} &= \delta_{n-s+2} \cdot v_{n-s}^{n-s+2} u_0^{n-s} \cdot f + q_{s-1} \cdot g \quad (r = n) \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Dabei bedeutet $q^*_{r,s-1}$ das Polynom, welches aus $q_{r,s-1}$ durch Division mit dem Faktor R_{r+1}^{r-s} entsteht.

Wir heben noch den Fall $u_0 = 0$ hervor. Dann ist $v_0 = R_n \neq 0$, und die Formeln (5), (6) (cf. § 1, **1**) liefern direkt:

$$f_{n-1} = -v_0^2 \cdot f + u_1 \cdot v_0 \cdot g \ ; \tag{13'}$$

ist insbesondere $n_1 < n_2$, so ist also f_{n-1} vom Grad n_1.

Die volle Bedeutung der Formeln (12) und (13) wird sich in Abschnitt **3** ergeben; an dieser Stelle wollen wir die Resultate zunächst nur teilweise zusammenfassen, insoweit sie uns einen Überblick über die möglichen Strukturen der Kette gestatten.

Ein Polynom f_r der Kette heiße *vollständig*, wenn $R_r \neq 0$, *defekt*, wenn $R_r = 0$. Schreiben wir einem identisch verschwindenden Polynom formal den Grad -1 zu und setzen noch $f_{-1} = 0$, so haben wir

Satz 1. *Folgt auf ein vollständiges Polynom f_{r+1} der Kette ein defektes f_r vom Grade s, so verschwinden $f_{r-1}, \ldots, f_{s+1}$ identisch und f_s ist vollständig und proportional zu f_r; ist $n_1 < n_2$,* so ist *f_{n-1} vom Grade n_1.*

Satz 1 läßt sich durch ein *Kettenschema* veranschaulichen, indem man ein Polynom durch einen Strich von der Länge $l + 1$ symbolisiert, wo l den Grad des Polynoms bedeutet. Das Schema kann etwa folgende Gestalten annehmen:

Die Formeln (12) und (13) können übrigens zur Bestimmung der Kette dienen. $f_{n-1}, \ldots, f_{r+1}, f_r$ seien nämlich schon bestimmt; f_{r+1} sei vollständig. Ist f_r defekt, so bestimmt man f_s nach (12); weiter ist nach (13) f_{s-1} gleich dem Rest von $\delta_{r-s+2} \cdot c_{r,r-s}^{r-s+2} \cdot f_{r+1}$ mod. f_r, dividiert durch R_{r+1}^{r-s+2}. Für die praktische Rechnung ist es bequem, bei dieser Division wie beim *Sturm*schen Verfahren die (übrigens quadratischen) Faktoren aus K zunächst wegzulassen. Man erhält dann eine Kette, deren Glieder bis auf Faktoren aus K mit den vollständigen Polynomen unserer Kette übereinstimmen und welche als *gewöhnliche Sturmsche Kette* des Paares (f, g) bezeichnet werden kann. Es ist dann leicht, mit Hilfe von (12) die Faktoren nachträglich rekursiv zu bestimmen.

Beispiele. t bedeutet einen unbestimmten Parameter, von dem die Polynome ganz rational abhängen.

1.

$$\begin{aligned}
f &= x^3 - x^2 + x - t \\
g &= x^2 + 2x - 3 \\
f_1 &= -10x + (t + 9) \\
f_0 &= (t^2 + 38t - 39)
\end{aligned}$$

Die Resultante verschwindet für $t = -39$ und $t = +1$.

2.

$$\begin{aligned}
f &= x^4 - tx^2 + 1 \\
g &= x^3 - 1 \\
f_2 &= (t-1)x^2 - 1 \\
f_1 &= -(t-1)x + (t-1)^2 \\
f_0 &= -(t-1)^3 + 1
\end{aligned}$$

Die Resultante verschwindet für $t = 2$. Für $t = 1$ wird f_2 defekt vom Grad 0 und f_1 verschwindet identisch.

3.

$$\begin{aligned}
f &= x^3 + tx^2 \\
g &= x^3 + (t-1)x + 1 \\
f_2 &= -tx^2 + (t-1)x + 1 \\
f_1 &= -(t^3 - t + 1)x - (t^2 + t - 1) \\
f_0 &= (t+1)^2(t-1)
\end{aligned}$$

Die Resultante verschwindet für $t = -1$ und $t = 1$. Für $t = 0$ werden f_2 und f_1 proportional mit dem Proportionalitätsfaktor $+1$; an den Nullstellen von $t^3 - t + 1$ werden wegen $-t(t+1)^2(t-1) = -(t^2 + t - 1)^2 + t^3 - t + 1$ f_1 und f_0 proportional mit dem Faktor $t^2 + t - 1 : -t$.

2. Wir setzen jetzt voraus, daß der Körper K *angeordnet* sei [9]) und lassen die Variable x die Elemente aus K durchlaufen. Ist ξ_0 ein fester Wert aus K, so verstehen wir unter einer *ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi_0)$ von ξ_0* die Menge der Elemente ξ aus K mit

$$|\xi_0 - \varepsilon| \leqq \xi \leqq |\xi_0 + \varepsilon| ,$$

wobei ε ein positives Element aus K bedeutet.

Seien f, g zwei Polynome in x mit Koeffizienten aus K; wir setzen im folgenden voraus, daß f nicht identisch verschwinden soll. Ein Element ξ aus K heiße *singulär* (bezüglich f, g), wenn an der Stelle ξ eines der nicht identisch verschwindenden Polynome der zu f, g gehörigen Kette verschwindet, sonst regulär. Es gibt in K nur endlich viele singuläre Elemente. — Ein Element aus K heiße *kritisch*, wenn in ihm das Anfangspolynom f verschwindet. Die kritischen Elemente sind singulär.

Nun sei ξ_0 ein beliebiges Element aus K und f_κ, $\kappa = k_1, \ldots, k_l$ $(n + 1 \geqq k_1 > \cdots > k_l)$ seien diejenigen Glieder der zu f, g gehörigen Kette, welche an der Stelle ξ_0 *nicht verschwinden*. Diese Menge ist offenbar dann und nur dann leer, wenn ξ_0 eine gemeinsame Nullstelle von f und g ist. Dann heiße eine ε-Umgebung von ξ_0 eine *zulässige Umgebung*, falls in ihr jedes einzelne *f_κ konstantes Vorzeichen* besitzt und $\xi_0 - \varepsilon$, $\xi_0 + \varepsilon$ reguläre Elemente sind.

Satz 2. *Jedes Element ξ_0 aus K besitzt eine zulässige Umgebung.*

Beweis. Ist $f_\kappa(\xi_0) \neq 0$, so entwickle man f_κ nach aufsteigenden Potenzen von $y = x - \xi_0$:

$$f_\kappa = f_\kappa(\xi_0) + \sum_{\nu=1}^{n_\kappa} c_{\kappa\nu} \cdot y^\nu$$

und setze

$$\varepsilon_\kappa = \min.\left(1, \frac{f_\kappa(\xi_0)}{2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n_\kappa} |c_{\kappa\nu}|}\right);$$

dann ist für $|\xi - \xi_0| \leqq \varepsilon_\kappa$:

$$|f_\kappa(\xi) - f_\kappa(\xi_0)| \leqq \tfrac{1}{2} \cdot |f_\kappa(\xi_0)| .$$

Man wähle nun ein positives $\varepsilon \leqq \min_\kappa \varepsilon_\kappa$ so, daß $\xi_0 - \varepsilon$ und $\xi_0 + \varepsilon$

[9]) Wegen der Anordnungseigenschaften und der Beziehungen vgl. *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra I, Kap. 10, § 63, 209 ff.

regulär sind (dies ist möglich, da K von der Charakteristik 0 ist). Dann ist $U_\varepsilon(\xi_0)$ eine zulässige Umgebung von ξ_0.

3. *Definition* 1. *ξ sei regulär bezüglich f, g. Dann verstehen wir unter $w(\xi)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Kette $f, g, f_{n-1}, \ldots, f_0$ an der Stelle $x = \xi$. Bei der Zählung sind eventuell auftretende Nullen wegzulassen.*

Satz 3. *Ist ξ_0 ein nicht kritisches Element aus K und $U_\varepsilon(\xi_0)$ eine zulässige Umgebung von ξ_0, so gilt $w(\xi_0 - \varepsilon) = w(\xi_0 + \varepsilon)$.*

Dieser Satz bringt die *Haupteigenschaft der Kette* zum Ausdruck.

Beweis. Wir betrachten die nicht identisch verschwindenden Polynome der Teilkette $g, f_{n-1}, \ldots, f_0$. Unter diesen kommen nach Satz 1 jeweils höchstens zwei von gleichen Gradzahlen vor, welche zueinander proportional sind und demnach die gleichen Nullstellen haben. Falls solche Paare auftreten, verstehen wir im folgenden unter f_r das in der Kette vorangehende der beiden Paarglieder. Dann gilt für sämtliche betrachteten Polynome f_r außer eventuell für g: $R_{r+1} \neq 0$.

Nun sei $f_r(\xi_0) = 0$ und zunächst $r < n$. Dann folgt wegen $R_{r+1} \neq 0$ aus der dritten Umkehrformel (9): $f_{r+1}(\xi_0) \neq 0$. Ist nun f_r vollständig, so folgt aus der ersten Formel (13), angewandt auf $s = r$ (oder auch direkt aus (10), § 1, **3**): $f_{r-1}(\xi_0) \neq 0$ und

$$\operatorname{sgn}\left(f_{r+1}(\xi_0) \cdot f_{r-1}(\xi_0)\right) = -1 \; . \tag{14}$$

Ist aber f_r defekt vom Grad s, so folgt aus (12) und (13) in Verbindung mit der zweiten Formel (4) in § 1, **1**:

$$\operatorname{sgn}\left(f_{r+1}(\xi) \cdot f_{s-1}(\xi)\right) = -\operatorname{sgn}\left(f_r(\xi) \cdot f_s(\xi)\right) \tag{15}$$

für alle regulären ξ aus $U_\varepsilon(\xi_0)$.

Die Vorzeichenrelationen (14) und (15) gelten nun aber auch noch für $r = n$, d. h. $g(\xi_0) = 0$: denn ist $u_0 = 0$, also $v_0 \neq 0$, so folgt aus (13′), daß $f_{n-1}(\xi_0) \neq 0$ ist und (14) (mit $r = n$) erfüllt; ist aber $u_0 \neq 0$ und g vom Grad $s \leq n$, so folgt (14) resp. (15) genau wie oben aus der zweiten Formel (13).

Ist schließlich f_t das letzte nicht identisch verschwindende Polynom der Kette, so ist wegen Satz 1 (cf. **1**) $R_t \neq 0$, und daraus folgt $f_t(\xi_0) \neq 0$.

Aus dieser Tatsache und aus den Relationen (14) und (15) ergibt sich Satz 3 für alle singulären, nicht kritischen Elemente ohne weiters durch Zerlegung in Teilketten. — Für reguläre Elemente ist der Satz trivial.

Beispiele. Wir knüpfen an die Beispiele in **1** an.

1. Wir setzen in Beispiel 1 : $t = 1$. Die Stelle $x = 1$ ist eine gemeinsame Nullstelle von f und g, und an ihr verschwinden alle Polynome der Kette. An der Stelle $x = -3$ wird die Kette zu $(-40,0,40,0)$ mit der Vorzeichenverteilung $(-, 0, +, 0)$.

2. Wir setzen in Beispiel $2 : t = 5$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ erhält man folgende Vorzeichenverteilung: $(-, -, 0, +, -)$. Es ist an dieser Stelle $f_1 = -16g$.

3. Wir setzen in Beispiel $3 : t = 0$. Die Kette lautet dann

$$\begin{aligned} f &= x^3 \\ g &= x^3 - x + 1 \\ f_2 &= - x + 1 \\ f_1 &= - x + 1 \\ f_0 &= - 1\,. \end{aligned}$$

Für $x = 1$ erhält man die Vorzeichenverteilung $(+, +, 0, 0, -)$, und in einer zulässigen Umgebung von 1 hat man an allen regulären Stellen die Verteilungen $(+, +, -, -, -)$ resp. $(+, +, +, +, -)$.

Satz 3 erlaubt, die Definition 1 auf die singulären, nicht kritischen Elemente von K auszudehnen:

Definition 1a. Ist ξ_0 singulär, aber nicht kritisch, so sei $w(\xi_0) = w(\xi)$, wo ξ ein beliebiges reguläres Element aus einer zulässigen Umgebung von ξ_0 bedeutet.

Dadurch ist w eindeutig bestimmt. Für die Berechnung ergibt sich aus (15) folgende Regel: man nehme die Kette der nicht identisch verschwindenden Polynome und bestimme zunächst die Anzahl der Vorzeichenwechsel an der Stelle ξ_0 unter Weglassung der Nullen. Treten dabei einoder mehrmal zwei Nullen hintereinander auf, so bestimme man für jedes solche Paar das Vorzeichen δ des Produkts der benachbarten Werte in der Kette und addiere zur erhaltenen Anzahl die Summe aller Zahlen $1 + \delta$.

$w(\xi_0)$ ist also auch in diesem Fall durch die Vorzeichenverteilung der Kette an der Stelle ξ_0 völlig bestimmt.

§ 3. Index und Indikator

1. Im folgenden setzen wir voraus, daß der Körper K im Sinne von *Artin-Schreier reell-abgeschlossen* sei[10]); das heißt, daß K angeordnet ist und durch Adjunktion einer Wurzel i des Polynoms x^2+1 in einen algebraisch-abgeschlossenen Körper übergeht. In einem solchen Körper gilt das *Bolzano*sche *Prinzip:*

Ist $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K, sind ferner a_1 und a_2 $(a_1 < a_2)$ zwei Werte aus K und ist $f(\xi) \neq 0$ für $a_1 \leqq \xi \leqq a_2$, so ist

$$\operatorname{sgn} f(a_1) = \operatorname{sgn} f(a_2) \ .$$

Unter einer *Strecke* $\overline{a_1 a_2}$ verstehen wir die Menge der Elemente ξ aus K, welche die Ungleichung

$$a_1 \leqq \xi \leqq a_2 \qquad (a_1, a_2 \in K\,; \quad a_1 < a_2) \tag{16}$$

erfüllen. a_1 und a_2 heißen ihre *Randpunkte*. Eine Strecke heißt *orientiert*, wenn für ihre Randpunkte eine Reihenfolge ausgezeichnet ist, und zwar *positiv* orientiert, wenn dies die natürliche Größenreihenfolge ist, andernfalls *negativ* orientiert. In der durch die Orientierung gegebenen Reihenfolge bezeichnen wir die Randpunkte als Anfangspunkt a_a und Endpunkt a_e und schreiben für die orientierte Strecke: $\overrightarrow{a_a a_e}$.

Ist

$$\overline{a_{11} a_{12}}, \ \overline{a_{21} a_{22}}, \ldots, \overline{a_{p1} a_{p2}} \tag{17}$$

$$(a_1 = a_{11} < a_{21} < \cdots < a_{p2} = a_2\,; \quad a_{i2} = a_{i+1,1} \ , \quad i = 1, \ldots, p-1)$$

eine Zerlegung der Strecke $\overline{a_1 a_2}$ in Teilstrecken, und $\overrightarrow{a_a a_e}$ eine Orientierung von $\overline{a_1 a_2}$, so heißt die Menge der mit $\overrightarrow{a_a a_e}$ *gleichorientierten* Strecken

$$\overrightarrow{a_{1a} a_{1e}}, \ \overrightarrow{a_{2a} a_{2e}}, \ldots, \overrightarrow{a_{pa} a_{pe}}$$

eine *Unterteilung* von $\overline{a}_a a_e$, die orientierten Teilstrecken deren *Elemente*. Gehört ein Wert aus K zu zwei Elementen der Unterteilung, so ist er Endpunkt des einen, Anfangspunkt des andern dieser Elemente.

Sei $f(x)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom mit Koeffizienten aus K, ξ_λ eines der endlich vielen kritischen Elemente aus K (cf. § 2, 2). Dann verstehen wir unter einer *kritischen Umgebung* $U_\varepsilon(\xi_\lambda)$

---

[10]) Vgl. Anmerkung 3.

von ξ_λ eine solche ε-Umgebung von ξ_λ, welche außer ξ_λ kein weiteres kritisches Element enthält. Kritische Umgebungen existieren trivialerweise (man setze $\varepsilon = \min\limits_{\nu} | \xi_\nu - \xi_\lambda |$, wo ξ_ν die kritischen Elemente $\neq \xi_\lambda$ durchläuft).

Definition 2. Unter dem Index $j(\xi, f, \overrightarrow{a_a a_e})$ *des Polynoms* f *bezüglich der orientierten Strecke* $\overrightarrow{a_a a_e}$ *an einer kritischen Stelle* $\xi \subset \overline{a_1 a_2}$ *verstehen wir die Zahl*

$$-\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} f(b_e) - \operatorname{sgn} f(b_a)\right) \quad , \tag{18}$$

wobei b_a *und* b_e *Anfangs- und Endpunkt einer orientierten kritischen Umgebung von* ξ *bedeuten, welche zugleich Element einer Unterteilung von* $\overrightarrow{a_a a_e}$ *ist.*

Der Index ist für alle ξ mit $a_1 < \xi < a_2$ definiert, und zwar eindeutig: denn sind $\overrightarrow{b_a b_e}$ und $\overrightarrow{b'_a b'_e}$ zwei orientierte kritische Umgebungen, so folgt aus dem *Bolzano*schen Prinzip:

$$\operatorname{sgn} f(b_a) = \operatorname{sgn} f(b'_a) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sgn} f(b_e) = \operatorname{sgn} f(b'_e)\text{[11]} \ .$$

Offenbar ist der Index eine ungerade Funktion der Orientierung der zugrunde gelegten Strecke.

Nun seien f, g zwei Polynome mit Koeffizienten aus K, von denen das erste nicht identisch verschwinden soll. Besitzen f und g auf einer Strecke $\overline{a_1 a_2}$ keine gemeinsame Nullstelle, so heiße das Paar (f, g) *auf* $\overline{a_1 a_2}$ *definit.*

Definition 3. Das Polynompaar (f, g) *sei auf einer Strecke* $\overline{a_1 a_2}$ *definit, und* f *sei in den Randpunkten* a_1 *und* a_2 *von Null verschieden. Dann verstehen wir unter dem Indikator* $\psi(f, g, \overrightarrow{a_a a_e})$ *des Paares bezüglich der orientierten Strecke* $\overrightarrow{a_a a_e}$ *die Summe*

$$\psi(f, g, \overrightarrow{a_a a_e}) = \sum_{\lambda=1}^{l} j(\xi_\lambda, f, \overrightarrow{a_a a_e}) \cdot \operatorname{sgn} g(\xi_\lambda) \quad , \tag{19}$$

erstreckt über alle bezüglich f *kritischen Stellen auf* $\overline{a_1 a_2}$.

Der Indikator ist eine ungerade Funktion der Orientierung von $\overrightarrow{a_a a_e}$. Seine geometrische Bedeutung haben wir schon in der Einleitung auseinandergesetzt.

---

[11]) Es sei bemerkt, daß das *Bolzano*sche Prinzip hier noch nicht wesentlich in unsere Betrachtungen eingreift; man könnte nämlich den Index auch ohne das Postulat der reellen Abgeschlossenheit mit Hilfe der Ableitungen des Polynoms definıeren. Hingegen ist dies bei der n-dimensionalen Verallgemeinerung des Begriffes, welche in einer späteren Arbeit behandelt werden soll, nicht mehr möglich.

2. Sei $\overrightarrow{a_a a_e}$ eine orientierte Strecke, und das Polynompaar (f, g) erfülle bezüglich $\overline{a_1 a_2}$ die Voraussetzungen von Definition 3. Sei $f, g, f_{n-1}, \ldots, f_0$ die nach § 1 und § 2, 1 zu f, g gehörige Kette und $w(x)$ die nach den Definitionen 1 und 1a (cf. § 2, 3) für alle nicht kritischen Werte definierte ganzzahlige Funktion. Insbesondere sind also $w(a_1)$ und $w(a_2)$ definiert, und es gilt

Satz 4. *Für den Indikator des Polynompaars (f, g) bezüglich $\overrightarrow{a_a a_e}$ gilt*

$$\psi(f, g, \overrightarrow{a_a a_e}) = w(a_e) - w(a_a) \ . \tag{20}$$

Beweis. Wir wählen als Elemente einer Unterteilung von $\overrightarrow{a_a a_e}$:

1. Orientierte zulässige Umgebungen (cf. § 2, 2) der bezüglich (f, g) singulären, nicht kritischen Punkte von $\overline{a_1 a_2}$ bzw. deren Durchschnitte mit $\overline{a_1 a_2}$ (falls ein Randpunkt selbst singulär ist).
2. Orientierte zulässige Umgebungen der bezüglich (f, g) kritischen Punkte von $\overline{a_1 a_2}$.
3. Die orientierten übrigbleibenden Strecken.

Die Randpunkte der Elemente der Unterteilung seien mit b_{ia}, b_{ie} bezeichnet. Für die Strecken der 1. Kategorie gilt nach Satz 3:

$$w(b_{ie}) - w(b_{ia}) = 0 \ ;$$

auf den Strecken der 2. Kategorie ergibt sich durch Betrachtung der beiden ersten Kettenglieder

$$w(b_{ie}) - w(b_{ia}) = -\tfrac{1}{2} \cdot (\operatorname{sgn} f(b_{ie}) - \operatorname{sgn} f(b_{ia})) \cdot \operatorname{sgn} g(\xi_i) \ ,$$

wobei ξ_i die kritischen Punkte bedeuten. Auf den Strecken der 3. Kategorie haben alle nicht identisch verschwindenden Polynome der Kette konstantes Vorzeichen[12]), also gilt für sie

$$w(b_{ie}) - w(b_{ia}) = 0 \ .$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen ergibt sich die Behauptung unter Benützung der Definitionen 2 und 3.

[12]) Hier wird das *Bolzano*sche Prinzip zum erstenmal *wesentlich* benützt.

Es sei noch auf den Spezialfall hingewiesen, wo g die Ableitung des Polynoms f ist. Ist ξ_0 eine einfache Nullstelle von f, so lauten die Entwicklungen von f und $f' = \dfrac{df}{dx}$ nach Potenzen von $y = x - \xi_0$:

$$\begin{aligned} f &= c \cdot y + \cdots \qquad (c \neq 0) \;. \\ f' &= c \quad\;\; + \cdots \end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie in § 2, 2 (Beweis von Satz 2) verschafft man sich eine solche kritische Umgebung von ξ_0, innerhalb welcher für $\xi \neq \xi_0$:

$$\operatorname{sgn} f = c \cdot \operatorname{sgn} (\xi - \xi_0)$$

gilt. Daraus folgt aber, falls f auf $\overline{a_1 a_2}$ nur einfache Nullstellen besitzt und in den Randpunkten nicht verschwindet, durch Summation über alle kritischen Stellen auf $\overline{a_1 a_2}$ nach den Definitionen 2 und 3 :

$$z = - \delta \cdot \psi(f, f', \overrightarrow{a_a a_e}) \;,$$

wo z die Anzahl der Nullstellen von f auf $\overline{a_1 a_2}$, δ das Vorzeichen der Orientierung von $\overrightarrow{a_a a_e}$ bedeutet. Satz 4 liefert dann im wesentlichen den *Sturm*schen Satz von der Wurzelzählung.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit können folgendermaßen zusammengefaßt werden :

Reduktionssatz (verallgemeinerter Sturmscher Satz). Zu zwei allgemeinen Polynomen f, g von den Graden $n+1$ und n in einer Variablen x gibt es eine endliche Kette von Polynomen in x und den unbestimmten Koeffizienten mit folgender Eigenschaft: werden die Koeffizienten in einem reell-abgeschlossenen Körper K spezialisiert, verschwinden dabei die Anfangskoeffizienten von f und g nicht zugleich und ist der Indikator des spezialisierten Paares bezüglich einer orientierten Strecke $\overrightarrow{a_a a_e}$ aus K definiert, so ist letzterer durch die Vorzeichenverteilung der spezialisierten Kette in den Randpunkten a_a und a_e völlig bestimmt.

(Eingegangen den 14. Mai 1947.)