

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1947)  
  
**Artikel:** Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern.  
**Autor:** van der Waerden, B.L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18052>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern

Von B. L. VAN DER WAERDEN, Laren, N.-Holland

H. Hasse hat eine arithmetische Theorie der Divisorenklassen eines algebraischen Funktionenkörpers einer Veränderlichen über einem beliebigen vollkommenen Konstantenkörper  $\Omega$  entwickelt<sup>1)</sup>. Bei einigen für die Theorie des Abelschen Funktionenkörpers grundlegenden Sätzen ist Hasse jedoch nicht zur Durchführung der Beweise gekommen, hat aber die Erwartung ausgesprochen, daß diese Beweise sich aus der von mir gegebenen Begründung der algebraischen Geometrie ergeben würden. In der Tat ist es mir gelungen, nicht nur die fraglichen Beweise mit meinen Methoden zu erbringen, sondern darüber hinaus noch ein weiteres Problem zu lösen, das sich aus den Hasseschen Fragestellungen zwangsläufig ergab, nämlich die Konstruktion einer *Klassenmannigfaltigkeit*, deren Punkte eineindeutig den Divisorenklassen nullten Grades des gegebenen algebraischen Funktionenkörpers entsprechen. Die Klassenmannigfaltigkeit ist ein ausgezeichnetes projektives Modell des Abelschen Funktionenkörpers; ihre Punkte übernehmen die Rolle der Hasseschen „X-Punkte“ (Hasse § 7, 7). Die Hasseschen Sätze § 6, 5 und § 8, 2 aber, deren Beweise hier gegeben werden sollen, drücken im wesentlichen aus, daß *den algebraischen Operationen, die man mit Divisorenklassen vornehmen kann, auch algebraische Operationen auf der Klassenmannigfaltigkeit entsprechen*. Diese Operationen sind: die Addition von Klassen  $X + Y = Z$  und die komplexen Multiplikationen  $X = \mu Y$ , die aus den algebraischen Korrespondenzen des Funktionenkörpers entstehen.

Der Darstellung dieser Ergebnisse soll eine Übersicht über die grundlegenden Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie vorangeschickt werden. Ich habe mich dabei nicht auf das unbedingt notwendige Minimum an Sätzen beschränkt, sondern ich habe mich bemüht, aus diesem einleitenden Teil einen Rechenschaftsbericht über die Begründung der

---

<sup>1)</sup> H. Hasse, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper, Jahresber. D. M. V. 52 (1942) S. 1—48.



algebraischen Geometrie und eine Art Lehrgang der algebraischen Geometrie für Algebraiker zu machen. Die Definitionen sind vollständig angegeben, während bei den Sätzen jeweils angegeben ist, wo man ihre Beweise finden kann.

Nach dieser Einführung (§ 1 bis 10) folgt der Hauptteil (§ 11 bis 19). Der Gedankengang des Hauptteils ist folgender. Wir gehen von einem algebraischen Funktionenkörper  $K$  vom Geschlechte  $g$  aus und legen als „projektives Modell“ dieses Körpers eine singularitätenfreie Kurve  $\Gamma$  zugrunde. Nach Erweiterung des Konstantenkörpers  $\Omega$  zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\overline{\Omega}$  entsprechen die Punkte von  $\Gamma$  eineindeutig den Stellen von  $K$  (§ 11). Die Gruppen von  $g$  Punkten auf  $\Gamma$  können durch Koordinaten dargestellt und so auf Punkte eines Bildraumes abgebildet werden (§ 12). Die Gesamtheit dieser Bildpunkte ist eine glatte, d. h. singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit  $M$  (§ 13). Produkte und Äquivalenzen von Punktgruppen auf  $\Gamma$  können durch algebraische Gleichungen zwischen ihren Koordinaten ausgedrückt werden, geben also zu algebraischen Korrespondenzen auf  $M$  Anlaß (§ 14). Setzt man dieses Ergebnis zu dem Hasseschen Begriff des  $\mathfrak{X}$ -Punktes in Beziehung, so erhält man den Beweis des ersten Hasseschen Satzes (§ 15). Sodann wird die erwähnte Klassenmannigfaltigkeit konstruiert, deren Punkte eineindeutig den Divisorenklassen vom Grade Null entsprechen (§ 16). Die Multiplikatoren (komplexe Multiplikationen) von  $K$  ergeben ebenfalls algebraische Korrespondenzen auf  $M$  sowie auch auf der Klassenmannigfaltigkeit (§ 17). Setzt man dieses Ergebnis wieder zum Hasseschen Begriff des  $\mathfrak{X}$ -Punktes in Beziehung, so ergeben sich Beweise der weiteren Sätze von Hasse (§ 18).

## Erster Teil

### Grundlagen der algebraischen Geometrie

#### § 1. Resultantensysteme. Relationstreue Spezialisierung. Prinzip der Erhaltung der Anzahl.

1.1. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein System homogener Gleichungen

$$f_i(y_0, \dots, y_n) = 0 \quad (1)$$

eine von der Nulllösung verschiedene Lösung in einem geeigneten (algebraischen) Erweiterungskörper des Konstantenkörpers  $\Omega$  besitzt, ist das Verschwinden des Resultantensystems

$$R_j(a) = 0 \quad .$$

Dabei sind die  $R_j$  ganzzahlige Polynome in den Koeffizienten  $a$  der Formen  $f_i$ . Beweis: Moderne Algebra II, § 80 (2. Aufl.).

1.2. Zwei Nicht-Nullösungen eines homogenen Gleichungssystems (1) werden zur gleichen *Lösungsklasse* gerechnet, wenn sie sich nur um einen Faktor  $\lambda$  unterscheiden. Die Lösungsklassen heißen auch *Punkte* des projektiven Raumes  $S_n$ . Die Gesamtheit aller Lösungsklassen eines Systems (1) heißt, falls nicht leer, eine *algebraische Mannigfaltigkeit* in  $S_n$ .

1.3. Ein Punkt  $y'$  heißt eine *relationstreue Spezialisierung* eines von unbestimmten Parametern  $t_1, \dots, t_r$  abhängigen Punktes  $y$  für die *Parameterspezialisierung*  $t \rightarrow t'$ , wenn alle in den  $y$  homogenen Gleichungen  $f(t, y) = 0$  bei der Spezialisierung  $t \rightarrow t'$ ,  $y \rightarrow y'$  erhalten bleiben. Ist von Parametern  $t$  nicht die Rede, so spricht man von einer *relationstreuen Spezialisierung*  $y \rightarrow y'$  schlechthin.

1.4. Zu jeder Parameterspezialisierung  $t \rightarrow t'$  gehört stets mindestens eine relationstreue Spezialisierung  $y \rightarrow y'$ , vorausgesetzt daß  $t_j$  und  $y_k$  einem und demselben Erweiterungskörper von  $\Omega$  angehören. Ebenso läßt sich jede relationstreue Spezialisierung  $x \rightarrow x'$  stets zu einer ebensolchen Spezialisierung  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  fortsetzen, sofern die  $x$  und  $y$  einem und demselben Erweiterungskörper von  $\Omega$  angehören. Beweis: Math. Ann. 97, p. 761, oder Einführung alg. Geom., p. 107.

1.5. Wenn ein Gleichungssystem

$$f_i(t, x) = 0 \quad (2)$$

nur endlich viele Lösungsklassen  $x^{(1)}, \dots, x^{(q)}$  besitzt und wenn bei einer Spezialisierung  $t \rightarrow t'$  der Unbestimmten  $t$  die Lösungszahl endlich bleibt, so gehört dazu eine bis auf die Reihenfolge der  $y$  eindeutige relationstreue Spezialisierung  $x^{(1)} \rightarrow y^{(1)}, \dots, x^{(q)} \rightarrow y^{(q)}$ . Sie wird gefunden, indem man mit Unbestimmten  $u_0, \dots, u_n$  die Form

$$F(u) = \prod_{\nu=1}^q (u_0 x_0^{(\nu)} + u_1 x_1^{(\nu)} + \dots + u_n x_n^{(\nu)})$$

bildet (oder im Fall eines Körpers von der Charakteristik  $p$  eine geeignete  $p^f$ -te Potenz dieses Produktes), sie durch Multiplikation mit einem von den  $u$  unabhängigen Faktor ganzrational in den  $t$  und primitiv in den  $u$  macht und dann in ihr  $t \rightarrow t'$  spezialisiert. Die Zahl, die angibt, wie oft eine Lösungsklasse  $y$  des spezialisierten Systems  $f_i(t', y) = 0$  unter den  $y^{(1)}, \dots, y^{(q)}$  vorkommt, heißt die *Multiplizität* der Lösung  $y$  für die Spezialisierung  $t \rightarrow t'$ .

1.6. *Prinzip der Erhaltung der Anzahl*: Die Summe der Multiplizitäten der Lösungen des spezialisierten Gleichungssystems ist gleich der Anzahl der Lösungen des ursprünglichen Problems (2).

1.7. Die Multiplizität einer Lösung  $y$  des spezialisierten Gleichungssystems ist positiv, wenn diese Lösung  $y$  durch eine relationstreue Spezialisierung für  $t \rightarrow t'$  aus einer Lösung  $x$  des Systems (2) hervorgeht.

Beweise zu 1.5 bis 1.7: Math. Ann. 97, p. 762—766, oder Einf. alg. Geom. § 38.

1.8. *Kriterium für Multiplizität Eins*: Wenn die spezialisierten Gleichungen

$$f_i(t', y) = 0 \quad (3)$$

eine Lösung  $y$  besitzen, derart, daß die „Tangentialebenen“ der Hyperflächen (3) im Punkt  $y$ , die durch die Gleichungen

$$x_0 \partial_0 f_i(t', y) + x_1 \partial_1 f_i(t', y) + \cdots + x_n \partial_n f_i(t', y) = 0 \quad \left[ \partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial y_\kappa} \right] \quad (4)$$

definiert werden, nur den Punkt  $y$  miteinander gemeinsam haben, so hat die Lösung  $y$  höchstens die Multiplizität Eins. Beweis: ZAG 5, Math. Ann. 110, oder Einf. alg. Geom. § 39.

1.9. Die Behauptungen 1.5 bis 1.7 gelten auch in dem allgemeineren Fall, daß  $t$  nicht ein System von Unbestimmten, sondern ein allgemeiner Punkt einer irreduziblen Mannigfaltigkeit  $M$  (vgl. 2.2) und  $t'$  ein einfacher Punkt von  $M$  (vgl. 4.6) ist. Beweis: ZAG 6, Math. Ann. 110, § 3.

## § 2. Algebraische Mannigfaltigkeiten

Beweise: Math. Ann. 96, p. 183 oder Mod. Alg. II, § 93 oder Einf. alg. Geom. § 28.

2.1. Jede algebraische Mannigfaltigkeit ist eindeutig darstellbar als unverkürzbare Vereinigung von *irreduziblen*, d. h. nicht weiter zerlegbaren Mannigfaltigkeiten.

2.2. Jede irreduzible Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt einen *allgemeinen* Punkt, d. h. einen solchen Punkt  $\xi$  von  $M$ , aus dem alle Punkte von  $M$  durch relationstreue Spezialisierung hervorgehen. Er ist bis auf Körperisomorphie eindeutig bestimmt. Wenn eine Mannigfaltigkeit einen allgemeinen Punkt besitzt, so ist sie irreduzibel. Jeder Punkt  $\xi$ , dessen Koordinaten einem beliebigen Erweiterungskörper des Konstantenkörpers angehören, ist allgemeiner Punkt einer irreduziblen Mannigfaltigkeit.

2.3. Die *Dimension* einer irreduziblen Mannigfaltigkeit  $M$  ist der Transzendenzgrad der Koordinatenverhältnisse eines allgemeinen Punktes von  $M$ .

2.4. Eine nulldimensionale irreduzible Mannigfaltigkeit ist ein System konjugierter Punkte.

2.5. Eine *rein  $r$ -dimensionale* Mannigfaltigkeit ist eine solche, deren irreduzible Bestandteile alle dieselbe Dimension  $r$  haben. Diese Bestandteile können mit willkürlichen positiven Vielfachheiten versehen werden.

2.6. Eine rein  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $S_n$  ist eine *Hyperfläche*, d. h. sie wird durch eine einzige homogene Gleichung  $f = 0$  gegeben. Umgekehrt ist jede Hyperfläche rein  $(n - 1)$ -dimensional. Ihre irreduziblen Bestandteile entsprechen den irreduziblen Faktoren der Form  $f$  und werden mit denselben Vielfachheiten versehen wie diese.

2.7. Wenn eine Mannigfaltigkeit  $M$  nicht ganz in der uneigentlichen Hyperebene  $y_0 = 0$  liegt, so kann man durch die Normierung  $y_0 = 1$  für die eigentlichen Punkte von  $M$  inhomogene Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$  einführen. Das *zugehörige Ideal* von  $M$  im Polynombereich  $\Omega[x_1, \dots, x_n]$  ist dann die Gesamtheit aller Polynome  $f$ , die Null werden in allen Punkten von  $M$ .

2.8. Das zugehörige Ideal einer irreduziblen Mannigfaltigkeit ist prim. Jedes Primideal in  $\mathfrak{o} = \Omega[x_1, \dots, x_n]$  mit Ausnahme des Einheitsideals  $\mathfrak{o}$  ist zugehöriges Ideal einer einzigen irreduziblen Mannigfaltigkeit.

2.9. Bei Erweiterung des Grundkörpers  $\Omega$  kann eine irreduzible Mannigfaltigkeit nur in irreduzible Bestandteile von derselben Dimension zerfallen, die dann in bezug auf  $\Omega$  konjugiert sind.

### § 3. Algebraische Korrespondenzen

Beweise: ZAG 6, Math. Ann. 110, S. 142, oder Einf. alg. Geom. § 33.

3.1. Eine *algebraische Korrespondenz* ist eine algebraische Mannigfaltigkeit von Punktpaaren  $(x, y)$ ,  $x$  in  $S_m$ ,  $y$  in  $S_n$ , gegeben durch ein System von homogenen Gleichungen

$$f_\nu(x, y) = 0 \quad . \quad (1)$$

3.2. Die Punkte  $x$  bilden eine algebraische Mannigfaltigkeit  $M$ , die *Urmannigfaltigkeit* der Korrespondenz, deren Gleichungen durch Elimination der  $y$  aus (1) gefunden werden. Die Punkte  $y$  bilden ebenso die *Bildmannigfaltigkeit*  $N$  der Korrespondenz. Man spricht von einer *Korrespondenz zwischen  $M$  und  $N$* .

3.3. In einer irreduziblen Korrespondenz sind  $M$  und  $N$  beide irreduzibel. Einem allgemeinen Punkt  $\xi$  von  $M$  entspricht eine relativ zum Körper  $\Omega\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_m}{\xi_0}\right)$  irreduzible Teilmannigfaltigkeit  $N_\xi$  von  $N$ , ebenso einem allgemeinen Punkt  $\eta$  von  $N$  eine irreduzible Teilmannigfaltigkeit  $M_\eta$  von  $M$ .

3.4. *Prinzip der Konstantenzählung*: Ist  $q$  die Dimension einer irreduziblen Korrespondenz,  $a$  die von  $M$ ,  $b$  die von  $N_\xi$ ,  $c$  die von  $N$  und  $d$  die von  $M_\eta$ , so gilt

$$q = a + b = c + d .$$

3.5. Einem jeden Punkt  $x$  von  $M$  entspricht in einer irreduziblen Korrespondenz eine Teilmannigfaltigkeit  $N_x$  von  $N$ , die keine Bestandteile von kleinerer Dimension als  $b$  enthält.

3.6. Ist die Urmannigfaltigkeit  $M$  einer Korrespondenz irreduzibel und entspricht jedem Punkt von  $M$  eine irreduzible Teilmannigfaltigkeit von  $N$ , die immer dieselbe Dimension  $b$  hat, so ist die Korrespondenz irreduzibel.

#### § 4. Schnitt von Mannigfaltigkeiten mit linearen Teilräumen und Hyperflächen

Beweise: ZAG 13, Math. Ann. 115, p. 359, oder Einf. alg. Geom. § 34 und § 40—41.

4.0. Ein *linearer Teilraum*  $S_{n-k}$  des Raumes  $S_n$  wird durch  $k$  unabhängige lineare Gleichungen definiert. Sind die Koeffizienten lauter unabhängige Unbestimmte, so heißt der Teilraum *allgemein*. Ein linearer Teilraum  $S_m$  ist durch  $(m+1)$  linear unabhängige Punkte bestimmt.

4.1. Der Durchschnitt einer irreduziblen  $a$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit einem allgemeinen  $S_{n-k}$  ist im Fall  $k > a$  leer, im Fall  $k = a$  ein System von endlich vielen konjugierten Punkten, im Fall  $k < a$  eine irreduzible  $(a-k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Anzahl der Schnittpunkte im Fall  $k = a$  heißt der *reduzierte Grad* von  $M$ .

4.2. Der Durchschnitt einer irreduziblen  $a$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit vom reduzierten Grad  $g$  mit  $k$  allgemeinen Hyperflächen von den Graden  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  ist im Fall  $k > a$  leer, im Fall  $k = a$  ein System von  $g \gamma_1, \dots, \gamma_k$  konjugierten Punkten und im Fall  $k < a$  eine irreduzible  $(a-k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit vom reduzierten Grad  $g \gamma_1, \dots, \gamma_k$ .

4.3. Der Durchschnitt einer irreduziblen  $a$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit vom reduzierten Grad  $g$  mit einer Hyperfläche vom Grade  $\gamma$ , die sie nicht ganz enthält, ist rein  $(a - 1)$ -dimensional und ihre irreduziblen Bestandteile können mit solchen positiven Vielfachheiten versehen werden, daß die Summe ihrer Gradzahlen  $g_1, \dots, g_r$  multipliziert mit diesen Vielfachheiten, gleich  $g\gamma$  ist :

$$\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_r g_r = g\gamma .$$

Dabei werden die Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_r$  im Fall einer Kurve ( $a = 1$ ) durch relationstreue Spezialisierung definiert, indem man die Kurve zuerst mit einer allgemeinen Hyperfläche desselben Grades schneidet und dann diese Hyperfläche spezialisiert. Der allgemeine Fall wird auf den Fall  $a = 1$  reduziert, indem man noch  $(a - 1)$  allgemeine Hyperflächen hinzunimmt, die die Mannigfaltigkeit nach 4.2 in einer irreduziblen Kurve schneiden.

4.4. Der Durchschnitt einer rein  $a$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $k \leq a$  Hyperflächen von den Gradzahlen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  enthält keine Bestandteile von kleinerer Dimension als  $a - k$ . Falls sie auch keine Bestandteile höherer Dimension enthält, ist sie rein  $(a - k)$ -dimensional und ihre irreduziblen Bestandteile können mit solchen positiven Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_r$  versehen werden, daß der gesamte Grad

$$\mu_1 g_1 + \dots + \mu_r g_r = g\gamma_1 \dots \gamma_k .$$

ist, wo  $g$  der reduzierte Grad von  $M$  ist und  $g_1, \dots, g_r$  die reduzierten Grade der Schnittbestandteile sind.

4.5. Sind  $f$  und  $g$  Formen gleichen Grades, von denen die zweite Null wird auf  $M$ , so stimmt der Durchschnitt von  $M$  mit der Hyperfläche  $f = 0$  genau überein mit dem von  $M$  mit  $f + \lambda g = 0$ , auch was die Vielfachheiten der irreduziblen Bestandteile betrifft.

4.6. Ein Punkt  $P$  einer rein  $a$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  heißt ein  $s$ -facher Punkt von  $M$ , wenn ein allgemeiner, durch  $P$  gelegter linearer Raum  $S_{n-a}$  die Mannigfaltigkeit im Punkte  $y$  mit der Multiplizität  $s$  schneidet. Ist  $s = 1$ , so heißt  $P$  ein einfacher Punkt von  $M$ . Eine Mannigfaltigkeit mit lauter einfachen Punkten heißt *singularitätenfrei* oder *glatt*.

4.7. Eine  $a$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  hat in jedem einfachen Punkt einen *Tangentialraum*  $S_a$ , Durchschnitt der Tangentialhyperbenen aller Hyperflächen durch  $M$ . Wenn umgekehrt  $M$  in  $P$  einen Tangentialraum besitzt, so ist  $P$  ein einfacher Punkt von  $M$ .

## § 5. Zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten

Beweise: Chow und v. d. Waerden, ZAG 9, Math. Ann. 113, p. 692.  
Zum Teil auch Einf. alg. Geom. § 37.

5.1. Die *zugeordnete Form* einer irreduziblen nulldimensionalen Mannigfaltigkeit, bestehend aus den konjugierten Punkten  $y^{(1)}, \dots, y^{(h)}$ , ist das Produkt

$$F(u) = \prod_{v=1}^h (u_0 y_0^{(v)} + u_1 y_1^{(v)} + \dots + u_n y_n^{(v)})$$

oder im Fall eines unvollkommenen Körpers von der Charakteristik  $p$  eine solche  $p^f$ -te Potenz dieses Produktes, daß die Form dem Grundkörper  $\Omega$  angehört.

5.2. Die *zugeordnete Form*  $F(u; u^{(1)}, \dots, u^{(r)})$  einer irreduziblen  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist definiert als die zugeordnete Form der nulldimensionalen Schnittmannigfaltigkeit von  $M$  mit den allgemeinen Hyperebenen  $u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$ . Sie ist (bis auf einen Faktor  $\pm 1$ ) von der Reihenfolge der Hyperebenen  $u, u^{(1)}, \dots, u^{(r)}$  unabhängig. Ihr Grad heißt der *Grad* von  $M$  und ist im Fall eines vollkommenen Grundkörpers  $\Omega$  gleich dem reduzierten Grad (4.1), sonst gleich diesem mal  $p^f$ .

5.3. Die zugeordnete Form einer rein  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, deren irreduzible Bestandteile mit Vielfachheiten  $e_1, \dots, e_s$  versehen sind, ist das Produkt der zugeordneten Formen dieser Bestandteile mit Exponenten  $e_1, \dots, e_s$ :

$$F = F_1^{e_1} F_2^{e_2} \dots F_s^{e_s}.$$

5.4. Die Bedingung dafür, daß die Hyperebenen  $v, v^{(1)}, \dots, v^{(r)}$  einen Punkt mit  $M$  gemeinsam haben, lautet

$$F(v, v^{(1)}, \dots, v^{(r)}) = 0.$$

5.5. Die zugeordnete Form bestimmt die Mannigfaltigkeit  $M$  eindeutig. Ihre Koeffizienten können als *homogene Koordinaten* von  $M$  aufgefaßt werden. Durch diese Koordinaten werden die Mannigfaltigkeiten  $M$  gegebenen Grades und gegebener Dimension eineindeutig abgebildet auf Punkte eines projektiven Bildraumes  $\mathfrak{B}$ .

5.6. Die Bedingung, daß ein Punkt  $P$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  angehört, läßt sich durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordi-



naten von  $P$  und denen von  $M$  ausdrücken. Ebenso läßt sich die Bedingung, daß  $M$  in einer anderen Mannigfaltigkeit  $N$  enthalten ist, durch Gleichungen zwischen den Koordinaten von  $M$  und  $N$  ausdrücken.

5.7. Ein *algebraisches System von algebraischen Mannigfaltigkeiten* ist eine solche Menge von Mannigfaltigkeiten  $M$ , deren Bildmenge in  $\mathfrak{B}$  eine algebraische Mannigfaltigkeit ist. Das System heißt *irreduzibel*, wenn die Bildmenge es ist; die Dimension des Systems ist die Dimension der Bildmenge.

5.8. Alle Mannigfaltigkeiten gegebenen Grades und gegebener Dimension in  $S_n$  bilden ein algebraisches System.

5.9. Wenn in einer irreduziblen Korrespondenz zwischen  $M$  und  $N$  jedem Punkt  $x$  von  $M$  eine Mannigfaltigkeit  $N_x$  auf  $N$  entspricht, die 1. immer dieselbe Dimension  $b$  hat, während 2.  $M$  keine mehrfachen Punkte besitzt, so bilden diese Bildmannigfaltigkeiten  $N_x$  ein irreduzibles System  $\mathfrak{N}$ , und  $M$  ist auf  $\mathfrak{N}$  rational abgebildet. — Läßt man die beiden Voraussetzungen 1., 2. fallen, so kann man das System  $\mathfrak{N}$  und die rationale Abbildung von  $M$  auf  $\mathfrak{N}$  zwar immer noch definieren, und wenn einem Punkt  $x$  von  $M$  in dieser Abbildung eine einzige Mannigfaltigkeit  $A_x$  entspricht, so ist auch  $N_x = A_x$ , andernfalls aber ist  $N_x$  die Vereinigungsmenge aller Bildmannigfaltigkeiten  $A_x$ , die dem Punkte  $x$  in der Abbildung entsprechen. Ist  $x$  ein einfacher Punkt von  $M$ , so ist entweder  $N_x = A_x$ , oder  $N_x$  hat eine höhere Dimension als  $b$ .

*Bemerkung:* Die Ausführungen dieses Paragraphen lassen sich ohne weiteres auf Mannigfaltigkeiten von Punktepaaren, Punkttripeln usw. übertragen. Am einfachsten geschieht das dadurch, daß die Punktepaare  $(x, y)$  auf Punkte  $z$  eines Bildraumes abgebildet werden, die durch die Koordinaten

$$z_{ik} = x_i y_k$$

definiert werden, wo  $i$  von 0 bis  $m$  und  $k$  von 0 bis  $n$  läuft, wenn  $x$  einem Raume  $S_m$  und  $y$  einem Raume  $S_n$  angehört. Diese Bildpunkte  $z_{ik}$  bilden eine algebraische Mannigfaltigkeit  $Z$ , deren Gleichungen lauten

$$z_{ik} z_{jl} - z_{il} z_{jk} = 0 .$$

Jeder Mannigfaltigkeit  $M$  von Punktepaaren  $(x, y)$  entspricht eineindeutig eine Teilmannigfaltigkeit  $M'$  von  $Z$ , und als zugeordnete Form von  $M$  kann man die zugeordnete Form von  $M'$  betrachten.



## § 6. Durchschnitte von algebraischen Mannigfaltigkeiten

Die Sätze dieses § werden in der vorliegenden Arbeit nicht gebraucht.  
Beweise: ZAG 14, Math. Ann. 115, p 619.

Der Grundkörper  $\Omega$  wird in diesem § als vollkommen vorausgesetzt.

6.1. Wenn zwei reine Mannigfaltigkeiten  $M_d$  und  $M_{n-d}$  von den Dimensionen  $d$  und  $n - d$  in  $S_n$  nur endlich viele Punkte gemeinsam haben, so hat jeder dieser Schnittpunkte eine positive Vielfachheit und die Summe der Vielfachheiten ist gleich dem Produkt der Gradzahlen.

6.2. Der Durchschnitt zweier Mannigfaltigkeiten  $M_d$  und  $M_e$  in  $S_n$  hat, wenn  $d + e = n + k$  ist, keine irreduziblen Bestandteile von kleinerer Dimension als  $k$ . Falls er auch keine Bestandteile höherer Dimension hat, also rein  $k$ -dimensional ist, so kann man seine irreduziblen Bestandteile mit solchen Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_r$  versehen, daß die Summe ihrer Gradzahlen, multipliziert mit diesen Vielfachheiten, gleich dem Produkt der Gradzahlen von  $M_d$  und  $M_e$  ist:

$$\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots + \mu_r g_r = g \gamma .$$

6.3. Durchläuft  $M_d$  ein irreduzibles System  $\mathfrak{S}$  von algebraischen Mannigfaltigkeiten, so durchläuft auch die Schnittmannigfaltigkeit  $Q_k = M_d \cdot M_e$  ein irreduzibles System von  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und die Zuordnung  $M_d \rightarrow Q_k$  ist eine irreduzible Korrespondenz zwischen diesen beiden Systemen. Dieses gilt unter der Voraussetzung, daß kein  $M_d$  des Systems mit dem festen  $M_e$  einen mehr als  $k$ -dimensionalen Durchschnitt hat. Ist diese Voraussetzung nur für das allgemeine Element  $M_d^*$  von  $\mathfrak{S}$  erfüllt, so kann man das System der  $Q_k$  und die Korrespondenz  $M_d^* \rightarrow Q_k = M_d^* \cdot M_e$  immer noch definieren, und einem solchen Element  $M_d'$  von  $\mathfrak{S}$ , das mit  $M_e$  einen  $k$ -dimensionalen Durchschnitt hat, entspricht in der Korrespondenz auch nur ein Bildelement  $Q'_k = M_d' \cdot M_e$ ; hat aber  $M_d'$  einen mehr als  $k$ -dimensionalen Durchschnitt mit  $M_e$ , so können diesem  $M_d'$  mehrere Bildelemente  $Q'_k$  entsprechen, von denen jede als *virtuelle Schnittmannigfaltigkeit*  $M_d' \cdot M_e$  bezeichnet werden kann.

6.4. Ist  $M_n$  eine glatte, rein  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $S_r$ , so kann man jede Mannigfaltigkeit  $M_e$  auf  $S_r$  zu einem vollständigen Schnitt

$$M_n \cdot K_{e+r-n} = M_e + N_e$$

ergänzen, wobei  $K_{e+r-n}$  so gewählt werden kann, daß der Restschnitt  $N_e$  einen vorgegebenen Punkt  $P$  von  $M_n$  nicht enthält.

6.5. Ist  $D_k$  ein irreduzibler Bestandteil des Durchschnittes  $M_d \cdot M_e$  zweier Mannigfaltigkeiten  $M_d$  und  $M_e$  auf  $M_n$ , von der Dimension  $k = d + e - n$ , und wird  $K_{e+r-n}$  wie in 6.4 so gewählt, daß  $K_{e+r-n}$  irgendeinen Punkt von  $D_k$  nicht enthält, so wird die Vielfachheit von  $D_k$  als Bestandteil von  $M_d \cdot M_e$  auf  $M_n$  definiert als die Vielfachheit von  $D_k$  als Bestandteil von  $M_d \cdot K_{e+r-n}$ . Diese Vielfachheit ist von der Wahl von  $K_{e+r-n}$  unabhängig. Die Summe aller  $D_k$  mit ihren Vielfachheiten ist der Durchschnitt  $M_d \cdot M_e$  auf  $M_n$ .

6.6. Für die so definierten Durchschnitte  $M_d \cdot M_e = Q_k$  gilt wieder 6.3; weiter gelten das kommutative, assoziative und distributive Gesetz:

$$\begin{aligned} M_d \cdot M_e &= M_e \cdot M_d \\ (M_d \cdot M_e) \cdot M_f &= M_d \cdot (M_e \cdot M_f) \\ M_d \cdot (M_e + M'_e) &= M_d \cdot M_e + M_d \cdot M'_e \end{aligned}$$

## § 7. Lineare Scharen

Beweise: ZAG 6, § 5—6, Math. Ann. 110, S. 148, sowie Einf. alg. Geom. § 42—44.

7.1. Eine *virtuelle lineare Schar* von  $(d - 1)$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten einer irreduziblen  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  besteht aus den Schnittmannigfaltigkeiten von  $M$  mit einer linearen Schar von Hyperflächen

$$\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_r F_r = 0, \quad (1)$$

von denen keine  $M$  enthält, wobei zu allen diesen Schnittmannigfaltigkeiten noch eine feste  $(d - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Bestandteile mit beliebigen positiven oder negativen Multiplizitäten versehen sind, hinzugefügt werden darf. Sind alle Mannigfaltigkeiten der Schar effektiv, d. h. haben ihre irreduziblen Bestandteile nichtnegative Vielfachheiten, so heißt die Schar *effektiv*. Die Zahl  $r$  heißt die *Dimension* der Schar. Ein Punkt, der allen Mannigfaltigkeiten einer effektiven Schar gemeinsam ist, heißt *Basispunkt* der Schar. Eine feste  $(d - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die allen Elementen der Schar als Bestandteil angehört, heißt *fester Bestandteil* der Schar.

7.2. Eine lineare Formenschar (1) von der Dimension  $r$ , in der  $t$  linear unabhängige Formen vorhanden sind, die  $M$  enthalten, schneidet aus  $M$  eine lineare Schar von der Dimension  $r - t$  aus.

7.3. Die Dimension  $r$  einer linearen Schar ist gleich der Anzahl der willkürlichen Punkte, durch die ein Element der Schar bestimmt ist.

7.4. Eine lineare Schar ist ein irreduzibles System von Mannigfaltigkeiten: ihre Elemente gehen durch relationstreue Spezialisierung aus einem allgemeinen Element  $C_\lambda$  der Schar, dessen Parameter  $\lambda$  Unbestimmte sind, hervor.

7.5. Das allgemeine Element einer linearen Schar ohne feste Bestandteile ist relativ zum Körper  $\Omega(\lambda)$  irreduzibel. Es ist gleichgültig, ob man zuerst ein allgemeines Element  $C_\lambda$  der Schar und darauf einen allgemeinen Punkt  $\xi$  bestimmt oder zuerst einen allgemeinen Punkt  $\xi$  von  $M$  nimmt und durch ihn ein möglichst allgemeines  $C_\lambda$  der Schar legt: beide Male erhält man bis auf Isomorphie dasselbe Paar  $(\lambda, \xi)$ . Die durch das allgemeine Paar  $(\lambda, \xi)$  bestimmte irreduzible Korrespondenz zwischen dem Parameterraum  $S_r$  und der Mannigfaltigkeit  $M$  ordnet jedem speziellen Punkt  $\lambda'$  von  $S_r$  genau die Punkte von  $C_{\lambda'}$  zu.

7.6. Jede lineare Schar ohne feste Bestandteile definiert eine rationale Abbildung von  $M$  auf eine Bildmannigfaltigkeit  $M'$  in  $S_r$ , wobei den Mannigfaltigkeiten  $C_\lambda$  die hyperebenen Schnitte von  $M'$  in folgendem präzisen Sinne entsprechen: Liegt ein Punkt  $P$  auf  $C_\lambda$ , so liegt mindestens einer seiner Bildpunkte  $P'$  in der entsprechenden Hyperebene; liegt umgekehrt einer der Bildpunkte  $P'$  in dieser Hyperebene, so liegt  $P$  auf  $C_\lambda$ . Die *Fundamentalphunkte* der Abbildung, d. h. die Punkte  $P$ , die mehr als endlich viele Bildpunkte  $P'$  haben, sind die Basispunkte der Schar. Einem  $s$ -fachen Punkt von  $M$ , der nicht Fundamentalphunkt ist, entsprechen höchstens  $s$  Bildpunkte, insbesondere einem einfachen Punkt nur ein Bildpunkt.

7.7. Ist  $M$  rational auf  $M'$  abgebildet, so entspricht jeder linearen Schar ohne feste Bestandteile auf  $M'$  eindeutig eine ebensolche Schar auf  $M$ . Ist die Abbildung birational, so ist das Entsprechen eineindeutig.

7.8. Die Elemente einer effektiven linearen Schar von der Dimension  $r$ , die einen gegebenen einfachen Punkt  $P$  von  $M$  enthalten, bilden, sofern  $P$  nicht Basispunkt der Schar ist, eine lineare Teilschar von der Dimension  $r - 1$ . Hält man  $k$  einfache Punkte  $P_1, \dots, P_k$  fest ( $k \leq r$ ), so erhält man eine Teilschar von der Dimension  $r'$  mit

$$r - k \leq r' \leq r .$$

Hält man irgendwelche  $(d - 1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten fest, die nicht aus lauter einfachen Punkten von  $M$  bestehen, so bilden diejenigen Elemente der linearen Schar, die diese Teilmannigfaltigkeiten mit vorgegebener Vielfachheiten enthalten, falls es solche Elemente überhaupt gibt, eine lineare Teilschar.

7.9. Wenn zwei lineare Scharen ein Element gemeinsam haben, so sind sie in einer beide umfassenden linearen Schar enthalten. Sind beide Scharen effektiv, und ist die Mannigfaltigkeit  $M$  glatt, so ist die umfassende Schar auch effektiv.

## § 8. Divisoren und lineare Scharen auf glatten Mannigfaltigkeiten

Beweise: Einf. alg. Geom. § 46—47, sowie Chow, Math. Ann. 114, p. 655. Von jetzt an sei  $M$  eine glatte, irreduzible  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

8.1. Werden irgendwelche  $(d - 1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeiten von  $M$  mit beliebigen ganzzahligen Vielfachheiten versehen, so bilden sie einen *Divisor*, und wenn alle Vielfachheiten positiv sind, einen *ganzen Divisor*.

8.2. Sind  $(r + 1)$  linear unabhängige Divisoren einer  $r$ -dimensionalen Schar ganz, so ist die Schar effektiv, d. h. alle ihre Divisoren sind ganz.

8.3. Jede effektive lineare Schar läßt sich zu einer eindeutig bestimmten *Vollchar* erweitern, die sich effektiv nicht mehr erweitern läßt.

8.4. Zwei Divisoren  $C, D$  heißen *äquivalent*, wenn sie in einer linearen Schar enthalten sind. Die Äquivalenz ist symmetrisch, reflexiv und transitiv. Die zu einem Divisor äquivalenten Divisoren bilden eine *Divisorenklasse*. Die ganzen Divisoren einer Klasse bilden, falls es sie gibt, eine *Vollchar*.

8.5. Durch Zusammenfassen der irreduziblen Bestandteile zweier Divisoren und Addition ihrer Vielfachheiten bildet man ihr *Produkt*. Die Divisoren bilden bei der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Die zum leeren Divisor oder *Einsdivisor* äquivalenten Divisoren bilden darin eine Untergruppe: die *Einsklasse*. Die Faktorengruppe nach der Einsklasse ist die *Divisorenklassengruppe*.

8.6. Über die *Sätze von Bertini* siehe ZAG 10, Math. Ann. 113, p. 705, sowie Chow, Math. Ann. 114, p. 664.

8.7. Der zur Mannigfaltigkeit  $M$  gehörige *Funktionenkörper* besteht aus allen rationalen Funktionen

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)},$$

wo  $\xi$  ein allgemeiner Punkt von  $M$  ist, während  $f$  und  $g$  Formen gleichen Grades sind. Der *Divisor* einer solchen Funktion  $\varphi$  ist der Quotient der von den Hyperflächen  $f = 0$  und  $g = 0$  auf  $M$  ausgeschnittenen Divisoren.

## § 9. Divisoren auf einer algebraischen Kurve

Beweise : W.-L. Chow, Math. Ann. 114, p. 655, oder Einf. alg. Geom.

§ 45. Von jetzt an sei der Konstantenkörper  $\Omega$  vollkommen.

9.1. Jede irreduzible Kurve  $\Gamma$  kann durch birationale Transformation in eine glatte Kurve  $\Gamma'$  verwandelt werden. Jedem Punkt von  $\Gamma'$  entspricht dabei ein einziger Punkt von  $\Gamma$ , einem Punkt von  $\Gamma$  können aber mehrere Punkte von  $\Gamma'$  entsprechen.

9.2. Eine *Stelle* von  $\Gamma$  ist ein Punkt von  $\Gamma'$ . Ist  $\Gamma''$  eine zweite glatte birationale Transformierte von  $\Gamma$ , so entsprechen sich die Punkte von  $\Gamma'$  und  $\Gamma''$  eineindeutig ; der Begriff der Stelle ist also von der Wahl von  $\Gamma'$  unabhängig.

9.3. Ein *Divisor* von  $\Gamma$  ist ein Divisor von  $\Gamma'$ . Auch die Begriffe Äquivalenz, Divisorenklasse, Vollschar usw. werden auf  $\Gamma'$  definiert. Alle diese Begriffe sind von der Wahl von  $\Gamma'$  unabhängig.

9.4. Die Vielfachheit eines Schnittpunktes  $P$  von  $\Gamma$  mit einer Hyperfläche  $H$  ist eine Summe von Beiträgen der einzelnen  $P$  entsprechenden Stellen  $P'$  von  $\Gamma'$ , die so definiert werden : Man brette  $H$  ein in die lineare Schar aller Hyperflächen gleichen Grades, deren allgemeines Element  $H_\lambda$  sei. Diese lineare Schar schneidet aus  $\Gamma$  eine lineare Schar von Punktgruppen aus, der auf  $\Gamma'$  wieder eine lineare Schar entspricht. Bei der Spezialisierung  $H_\lambda \rightarrow H$  erhält man nicht nur auf  $\Gamma$ , sondern auch auf  $\Gamma'$  durch relationstreue Spezialisierung eine ganz bestimmte Punktgruppe, in der jeder Punkt  $P'$  mit einer gewissen Vielfachheit vorkommt. Diese heißt die *Schnittmultiplizität von  $H$  und  $\Gamma$  für die Stelle  $P'$* .

9.5. Jede rationale Funktion

$$\varphi = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

im Sinne von 8.7 hat an jeder Stelle  $P'$  eine gewisse *Ordnung*, die als Differenz der Schnittvielfachheiten des Zählers und Nenners für die Stelle  $P'$  definiert wird. Ist die Ordnung positiv, so hat man eine *Nullstelle*, ist sie negativ, einen *Pol* der Funktion  $\varphi$ . Die Nullstellen und Pole, mit ihren Ordnungen als Vielfachheiten versehen, bilden den *Divisor* der Funktion  $\varphi$  im Sinne von 8.7.

9.6. Die Summe der Ordnungen einer Funktion  $\varphi$  ist Null.

9.7. Es gibt zu jeder Stelle eine Ortsuniformisierende  $\tau$ , d. h. eine Funktion der Ordnung 1. Alle anderen Funktionen auf  $\Gamma$ , insbesondere

die Koordinatenverhältnisse  $\xi_i : \xi_0$ , können in Potenzreihen nach  $\tau$  entwickelt werden.

9.8. Umgekehrt gehört zu jedem System von Potenzreihenentwicklungen eines allgemeinen Punktes von  $\Gamma$

$$\xi_k = a_{k0} + a_{k1} \tau + a_{k2} \tau^2 + \dots$$

eine Stelle von  $\Gamma$ .

Über den Zusammenhang des Stellenbegriffs mit dem Bewertungsbegriff siehe § 11.

## § 10. Differentialklasse, adjungierte Kurven und Riemann-Rochscher Satz

Beweise: Einf. alg. Geom. § 48—51.

10.1. Sind  $\varphi$  und  $\eta$  rationale Funktionen auf einer Kurve  $\Gamma$ , so heißt der Ausdruck  $\varphi d\eta$  ein *Differential* des Funktionenkörpers. Die Gleichheit  $\varphi d\eta = \psi d\zeta$  bedeutet

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\psi}{\varphi}.$$

Ist  $\tau$  Ortsuniformisierende einer Stelle  $P'$  und setzt man  $\varphi d\eta = \chi d\tau$ , so versteht man unter der *Ordnung* des Differentials an der Stelle  $P'$  die Ordnung von  $\chi$  in  $P'$ . Ist sie positiv, so hat man eine *Nullstelle*, ist sie negativ, einen *Pol* des Differentials. Die Nullstellen und Pole, mit ihren Ordnungen als Vielfachheiten versehen, bilden den *Divisor* des Differentials. Die Divisoren aller Differentiale bilden eine *Divisorenklasse*  $W$ . Ein Differential ohne Pole heißt *Differential erster Gattung*.

10.2. Eine ebene Kurve  $\Gamma$  habe die Gleichung  $f = 0$ . Die Polare eines Punktes  $Q$  wird durch

$$\sum_0^2 q_k \partial_k f = 0 \quad \left( \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

definiert. Sie schneide die Kurve  $\Gamma$  in einem Punkte  $P$ , und die Schnittmultiplizität an einer zu  $P$  gehörigen Stelle  $P'$  sei  $\nu'$ . Die Verbindungsgerade  $PQ$  schneide  $\Gamma$  an der Stelle  $P'$  mit der Multiplizität  $\kappa'$ . Dann ist

$$\delta' = \nu' - (\kappa' - 1)$$

unabhängig von der Wahl von  $Q$  und nicht negativ. Der Divisor, der aus allen Stellen  $P'$  mit den Vielfachheiten  $\delta'$  besteht, heißt der *Doppelpunktsdivisor* von  $\Gamma$ . Eine Kurve  $g = 0$  heißt zu  $\Gamma$  *adjungiert*, wenn ihr Schnitt mit  $\Gamma$  durch den Doppelpunktsdivisor teilbar ist.

10.3. *Satz vom Doppelpunktsdivisor.* Wenn eine Kurve  $g = 0$  aus  $\Gamma$  den Divisor  $G$  ausschneidet und wenn eine adjungierte Kurve  $F = 0$  aus  $\Gamma$  mindestens den Divisor  $DG$  ausschneidet, wo  $D$  der Doppelpunktsdivisor von  $\Gamma$  ist, so gilt eine Identität

$$F = Af + Bg ,$$

wobei die Kurve  $B = 0$  zu  $\Gamma$  adjungiert ist.

10.4. Die adjungierten Kurven irgendeines Grades schneiden aus  $\Gamma$  außer dem Doppelpunktsdivisor eine Vollschar aus. Insbesondere schneiden die adjungierten Kurven  $(n - 3)$ -Ordnung die zur Differentialschar  $W$  gehörige Vollschar aus.

10.5. Die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung, oder die um 1 vermehrte Dimension der zu  $W$  gehörigen Vollschar, heißt das *Geschlecht*  $g$  von  $\Gamma$ . Ist  $g = 0$ , so ist  $\Gamma$  rational. Die Summe der Ordnungen eines Differentials ist  $2g - 2$ .

10.6. *Reduktionssatz.* Es sei  $C$  ein ganzer Divisor und  $P$  eine Stelle. Wenn es einen ganzen Divisor der Differentialklasse gibt, der  $C$ , aber nicht  $CP$  enthält, dann ist  $P$  ein fester Punkt der Vollschar  $|C|$ , und umgekehrt.

10.7. *Riemann-Rochscher Satz.* Ist  $\dim C$  die *Dimension* einer Divisorenklasse  $C$ , d. h. die um 1 verminderte Anzahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse, und ist  $c$  der *Grad* der Klasse, d. h. die Summe der Vielfachheiten aller Punkte eines Divisors der Klasse, so gilt

$$\dim C = c - g + i ,$$

wobei der *Spezialitätsindex*  $i \geq 0$  durch

$$i = 1 + \dim \frac{W}{C}$$

definiert ist. Ist  $i > 0$ , so heißt die Klasse und jede ihrer Divisoren *spezial*. Ist  $\dim C \geq g$  oder  $c > 2g - 2$ , dann ist  $i = 0$  und die Klasse ist nicht *spezial*.



## Anwendung der algebraischen Geometrie auf die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionenkörper

### § 11. Die Kurve $\Gamma$

Wie Hasse gehen wir von einem algebraischen Funktionenkörper  $K = \Omega(x, y)$  vom Geschlechte  $g$  mit  $f(x, y) = 0$  aus. Hasse definiert nun (§ 3) mit Hilfe einer Divisorenklasse  $M$  dieses Funktionenkörpers neue homogene Erzeugende  $x_0 : \dots : x_n$ , leitet ein System  $(G)$  von homogenen algebraischen Gleichungen zwischen  $x_0, \dots, x_n$  her und bemerkt dazu: In der Ausdrucksweise der algebraischen Geometrie ist der Übergang von der ursprünglich gegebenen Erzeugung  $K = \Omega(x, y)$  mit  $f(x, y) = 0$  zu einer Erzeugung  $K = \Omega(x_0 : \dots : x_n)$  mit  $(G)$  eine birationale Transformation der gegebenen zweidimensionalen affinen Kurve in eine  $n$ -dimensionale projektive Kurve mit lauter einfachen Punkten. In der Tat kann man in Anschluß an die Hasseschen Ausführungen beweisen, daß die Gleichungen  $(G)$  eine irreduzible algebraische Kurve  $\Gamma$  definieren, deren allgemeiner Punkt die Koordinaten  $x_0, \dots, x_n$  hat, daß diese Kurve zur Kurve  $f(x, y) = 0$  birational äquivalent ist, daß die Schnittpunktgruppen von  $\Gamma$  mit den Hyperebenen des Raumes  $S_n$  den ganzen Divisoren der Klasse  $M$  entsprechen und daß die Kurve  $\Gamma$  lauter einfache Punkte hat.

Wesentlich einfacher werden aber die Beweise, wenn man nicht erst am Schluß der Rechnungen, sondern gleich am Anfang die Begriffe und Ausdrucksweise der algebraischen Geometrie einführt. Man gehe zunächst von der affinen zur projektiven Ebene  $S_2$  über, indem man die Gleichung  $f(x, y) = 0$  homogen macht. Die so erhaltene Kurve in  $S_2$  kann nach 9.1 durch birationale Transformation in eine glatte Kurve  $\Gamma$  in einem projektiven Raum  $S_n$  verwandelt werden. Geht man den Beweis des Satzes 9.1 noch einmal durch, so sieht man leicht, daß die Dimension des Raumes  $S_n$  beliebig groß gewählt werden kann; wir können also  $n \geq 2g$  annehmen. Die Hyperebenen des Raumes  $S_n$  schneiden aus der Kurve  $\Gamma$  eine lineare Schar von Punktgruppen aus, von der wir annehmen können, daß sie eine Vollschar ist. Der Existenzbeweis der glatten Kurve  $\Gamma$  kann nämlich leicht so geführt werden, daß dabei nur Volscharen verwendet werden. Man kann auch nachträglich die die Transformation vermittelnde lineare Schar zu einer Vollschar erweitern.

Ein allgemeiner Punkt von  $\Gamma$  habe die Koordinaten  $\xi_0, \dots, \xi_n$ , wobei wir  $\xi_0 = 1$  normieren können: dann sind  $\xi_0, \dots, \xi_n$  sämtlich Elemente



des Funktionenkörpers  $K$ . Sie entsprechen den Hasseschen Erzeugenden  $x_0, \dots, x_n$ .

Ist  $\bar{p}$  ein „algebraischer Punkt“ von  $K/\Omega$  im Sinne von Hasse, d. h. ein Primdivisor des Körpers  $\bar{K} = \bar{\Omega}(x, y)$  oder ein „Punkt“ im Sinne von Dedekind und Weber<sup>1)</sup>, wo  $\bar{\Omega}$  der zu  $\Omega$  gehörige algebraisch abgeschlossene Körper ist, und ist  $\xi_j$  eine von den Koordinaten  $\xi_k$ , die die kleinste Ordnung an der Stelle  $\bar{p}$  haben, so bleiben alle  $\xi_j^{-1} \xi_k$  endlich an der Stelle  $\bar{p}$ , und durch

$$\bar{p}_k = \xi_j^{-1} \xi_k(\bar{p})$$

ist ein Punkt  $\bar{p}$  mit den Koordinaten  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n$  definiert, die alle endlich und nicht alle Null sind. Alle homogenen Gleichungen  $F(\xi) = 0$ , die für die  $\xi_k$  gelten, gelten auch für  $\xi_j^{-1} \xi_k$ , also auch für die  $\bar{p}_k$ ; also ist  $\bar{p}$  ein Punkt der Kurve. Wir beweisen nun :

11.1. (Vgl. Hasse § 3, 2.) *Verschiedene „algebraische Punkte“  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  ergeben auch verschiedene Punkte  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  von  $\Gamma$ .*

11.2. (Vgl. Hasse § 3, 5.) *Alle Punkte  $\bar{p}$  der Kurve  $\Gamma$  mit Koordinaten aus  $\bar{\Omega}$  können in dieser Weise erhalten werden.*

*Beweis von 11.1.* Gesetzt, zwei verschiedene Primdivisoren  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  würden denselben Punkt  $\bar{p}(\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n)$  ergeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $\bar{p}_0 = 1$  und  $\xi_0 = 1$  annehmen. Es sei  $\xi_{n+1}$  eine Funktion des Körpers, die für  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  verschiedene endliche Werte  $\xi_{n+1}(\bar{p})$  und  $\xi_{n+1}(\bar{q})$  annimmt. Durch die homogenen Koordinaten  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$  ist ein allgemeiner Punkt  $\xi^*$  einer Kurve  $\Gamma^*$  in  $S_{n+1}$  definiert (2.2). Da die Koordinaten von  $\xi^*$  rationale Funktionen von denen von  $\xi$  sind und umgekehrt, so ist  $\Gamma^*$  birational auf  $\Gamma$  abgebildet, und zwar wird der einem Punkt  $p^*(\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, \bar{p}_{n+1})$  von  $\Gamma^*$  entsprechende Punkt  $\bar{p}(\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n)$  von  $\Gamma$  gefunden, indem die letzte Koordinate einfach weggelassen wird. Zu jedem Primdivisor  $\bar{p}$  oder  $\bar{q}$  des Körpers  $\bar{K}$  gehört nach der oben angegebenen Vorschrift nicht nur ein Punkt von  $\Gamma$ , sondern auch ein Punkt von  $\Gamma^*$ , und zwar gehören zu  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  zwei verschiedene Punkte von  $\Gamma^*$ , da  $\xi_{n+1}(\bar{p}) \neq \xi_{n+1}(\bar{q})$  sein sollte. Diese zwei Punkte von  $\Gamma^*$  stimmen aber in allen Koordinaten außer der letzten überein, daher entspricht ihnen in der birationalen Abbildung ein und derselbe Punkt  $\bar{p}$  von  $\Gamma$ . Einem einfachen Punkt  $\bar{p}$  von  $\Gamma$  kann aber in einer birationalen Abbildung nur ein Punkt von  $\Gamma^*$  entsprechen (7.6).

<sup>1)</sup> Dedekind und Weber, Crelle's Journal 92, (1882) p. 181.

*Beweis von 11.2.* Zu einem Punkt  $\bar{p}$  von  $\Gamma$  gehört eine Bewertung des Funktionenkörpers  $\bar{K}$ , die folgendermaßen definiert wird: Jede Funktion des Körpers kann als Quotient von Formen gleichen Grades in  $\xi_0, \dots, \xi_n$  geschrieben werden:

$$\varphi = \frac{f(\xi_0, \dots, \xi_n)}{g(\xi_0, \dots, \xi_n)}.$$

Die Flächen  $f = 0$  und  $g = 0$  schneiden  $\Gamma$  in  $\bar{p}$  mit bestimmten Multiplizitäten  $\mu$  und  $\nu$ . Dann wird die Bewertung durch

$$w(\varphi) = \mu - \nu$$

definiert. Die Eindeutigkeit der Definition und die Eigenschaft  $w(\varphi\psi) = w(\varphi) + w(\psi)$  sind klar. Die Eigenschaft

$$w(\varphi + \psi) \geq \min(w(\varphi), w(\psi))$$

kommt darauf hinaus, daß die Schnittmultiplizität von  $f_1 + f_2$  oder allgemeiner von  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  mit  $\Gamma$  mindestens gleich der kleineren der Schnittmultiplizitäten von  $f_1$  und  $f_2$  mit  $\Gamma$  ist. Dies aber folgt aus 7.8.

Diese Bewertung definiert bekanntlich einen Primdivisor des Körpers  $\bar{K}$  im Sinne von Dedekind und Weber. Jedes Element  $\varphi$  des Bewertungsringes ist nämlich modulo dem Bewertungsideal einer Konstanten  $\omega$  aus  $\bar{\Omega}$  kongruent, und die Zuordnung  $\varphi \rightarrow \omega$  ist ein „Punkt“  $\bar{p}$  im Dedekind-Weberschen Sinne. Wir schreiben  $\varphi(\bar{p}) = \omega$ .

Nimmt man wieder  $\bar{p}_0 = 1$  und  $\xi_0 = 1$  an, so haben die Funktionen  $\xi_1 - \bar{p}_1, \dots, \xi_n - \bar{p}_n$  in der eben definierten Bewertung positive Ordnungszahlen, also gehören sie dem Bewertungsideal an, mithin ist

$$\xi_0(\bar{p}) = \bar{p}_0, \xi_1(\bar{p}) = \bar{p}_1, \dots, \xi_n(\bar{p}) = \bar{p}_n.$$

Das heißt aber: der dem „algebraischen Punkt“  $\bar{p}$  entsprechende Kurvenpunkt ist genau der Punkt  $\bar{p}$ , von dem wir ausgegangen sind. Damit ist 11.2 bewiesen.

Nach 11.1 und 11.2 entsprechen die „algebraischen Punkte“  $\bar{p}$  des Körpers  $K$  eineindeutig den Punkten  $\bar{p}$  der Kurve  $\Gamma$  mit Koordinaten aus  $\bar{\Omega}$ . Wir brauchen daher von jetzt an zwischen  $\bar{p}$  und  $\bar{p}$  nicht mehr zu unterscheiden. Wir bezeichnen mit Hasse  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n$  als die homogenen Koordinaten des Punktes  $\bar{p}$ .

Als weitere Vereinfachung lassen wir von jetzt an die Querstriche, die bei Hasse zum Ausdruck bringen sollen, daß die Koordinaten  $\bar{p}_k$  dem Körper  $\bar{\Omega}$  angehören sollen, weg. Wir bezeichnen die Punkte von  $\Gamma$  also einfach mit  $P$ ,  $p$  oder  $p$ , ihre Koordinaten mit  $p_k$ , die Punktgruppen mit  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{D}$ , usw.

## § 12. Die Chow-Koordinaten eines Divisors

Ein ganzer Divisor  $\mathfrak{A} = p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(h)}$ , d. h. eine Punktgruppe auf  $\Gamma$ , kann nach 5.5 eindeutig charakterisiert werden durch die zugeordnete Form

$$A(u) = P^{(1)}(u) P^{(2)}(u) \dots P^{(h)}(u) ,$$

wo

$$P^{(\nu)}(u) = p_0^{(\nu)} u_0 + p_1^{(\nu)} u_1 + \dots + p_n^{(\nu)} u_n .$$

Die Koeffizienten der Form  $A(u)$  nennen wir die *Chow-Koordinaten* des Divisors  $\mathfrak{A}$ , weil Chow als erster die zugeordneten Formen systematisch als Beweismittel in die algebraische Geometrie eingeführt hat.

Hasse definiert die Koordinaten von  $\mathfrak{A}$  etwas komplizierter. Für jeden Punkt  $p^{(\nu)}$  werden die mit Unbestimmten  $x_0, \dots, x_n$  gebildeten Ausdrücke  $p_j x_i - p_i x_j$  irgendwie als  $P_0(x), \dots, P_r(x)$  durchnummeriert und dann die Form

$$F^{(\nu)}(x, t) = P_0(x) t^r + P_1(x) t^{r-1} + \dots + P_r(x)$$

gebildet. Multiplikation dieser Formen ergibt eine Form  $\Phi(x, t)$ , deren Koeffizienten die Hasse-Koordinaten von  $\mathfrak{A}$  sind.

Die Beziehung zwischen den Hasse-Koordinaten und den Chow-Koordinaten ist leicht zu finden. Die Form  $F^{(\nu)}(x, t)$  ist nämlich linear in  $p_0, \dots, p_n$  und entsteht folglich aus der Linearform

$$P^{(\nu)}(u) = p_0^{(\nu)} u_0 + \dots + p_n^{(\nu)} u_n ,$$

indem für die  $u_j$  gewisse ganzzahlige Polynome in den  $x$  und  $t$  eingesetzt werden. Folglich entsteht auch das Produkt  $\Phi(x, t)$  aus dem Produkt  $A(u)$  durch dieselbe Substitution. Somit sind die Koeffizienten von  $\Phi(x, t)$  gewisse ganzzahlige Linearkombinationen der Koeffizienten von  $A(u)$ , m. a. W. die Hasse-Koordinaten sind ganzzahlige Linearkombinationen der Chow-Koordinaten.

Umgekehrt sind bei Charakteristik Null nach *Franz* (Hasse, § 3, 3) alle symmetrischen Funktionen der Koordinaten von  $p^{(1)}, \dots, p^{(h)}$ , also insbesondere die Chow-Koordinaten, homogene Polynome in den Hasse-Koordinaten.

Wir werden im folgenden nur mit den Chow-Koordinaten arbeiten, weil sie einfacher definiert, frei von Willkür und leichter zu handhaben sind.

### § 13. Die Mannigfaltigkeit aller Gruppen von $g$ Punkten auf $\Gamma$

Es sei  $g$  das Geschlecht der Kurve  $\Gamma$ . Wenn im folgenden von *Punktgruppen* die Rede ist, so sind damit immer ganze Divisoren

$$\mathfrak{A} = p^{(1)} p^{(2)} \dots, p^{(g)}$$

vom Grade  $g$  auf  $\Gamma$  gemeint. Einer solchen Punktgruppe entspricht nach § 12 eine zugeordnete Form

$$A(u) = \lambda P^{(1)}(u) P^{(2)}(u) \dots P^{(g)}(u) , \quad (1)$$

deren Koeffizienten die Chow-Koordinaten  $a_0, \dots, a_h$  von  $\mathfrak{A}$  sind. Faßt man sie als Koordinaten eines Bildpunktes  $A$  in einem  $h$ -dimensionalen Bildraum  $S_h$  auf, so erhält man eine Abbildung der Gesamtheit aller Punktgruppen  $\mathfrak{A}$  auf eine Gesamtheit von Bildpunkten in  $S_h$ . Wir wollen beweisen, daß diese Gesamtheit eine algebraische Mannigfaltigkeit  $M$  ist.

Vergleicht man in (1) links und rechts die Koeffizienten der Potenzprodukte der  $u$ , so erhält man Gleichungen der Form

$$a_j = \lambda g_j(p^{(1)}, \dots, p^{(g)}) , \quad (2)$$

die durch Elimination von  $\lambda$  homogen werden :

$$a_j g_k(p^{(1)}, \dots, p^{(g)}) - a_k g_j(p^{(1)}, \dots, p^{(g)}) = 0 . \quad (3)$$

Dazu kommen die Gleichungen, die ausdrücken, daß die Punkte  $p^{(\nu)}$  auf  $\Gamma$  liegen :

$$f_i(p^{(\nu)}) = 0 . \quad (4)$$

Aus den homogenen Gleichungen (3), (4) eliminieren wir  $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$  durch Bildung des Resultantensystems

$$R_j(a_0, \dots, a_h) = 0 . \quad (5)$$

Die Gleichungen (5) sind notwendig und hinreichend, damit  $a_0, \dots, a_h$  die Koordinaten einer Punktgruppe  $\mathfrak{A}$  auf  $\Gamma$  sind. Also bilden diese Punktgruppen eine algebraische Mannigfaltigkeit  $M$ .

Diese Mannigfaltigkeit  $M$  ist irreduzibel; denn alle Punktgruppen  $\mathfrak{A} = p^{(1)} \dots p^{(g)}$  entstehen durch relationstreue Spezialisierung aus einer allgemeinen Punktgruppe  $\mathfrak{X} = \Pi^{(1)} \dots \Pi^{(g)}$ , wo  $\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(g)}$  unabhängige allgemeine Punkte von  $\Gamma$  sind.

Wir wollen nun beweisen, daß die Mannigfaltigkeit  $M$  glatt ist, d. h. lauter einfache Punkte hat. Dazu dient das folgende

*Kriterium.* Wenn die Koordinaten  $1, \xi_1, \dots, \xi_n$  eines allgemeinen Punktes einer  $g$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  separable Funktionen von den  $g$  algebraisch unabhängigen  $\xi_1, \dots, \xi_g$  sind und wenn von den verschiedenen konjugierten Punkten  $\xi^{(\nu)}$  mit Koordinaten  $(1, \xi_1, \dots, \xi_g, \xi_{g+1}^{(\nu)}, \dots, \xi_n^{(\nu)})$ , die zu den gegebenen  $\xi_1, \dots, \xi_g$  gehören, bei der relationstreuen Spezialisierung  $\xi^{(\nu)} \rightarrow \eta^{(\nu)}$  nur einer in den Punkt  $\eta(1, \eta_1, \dots, \eta_n)$  übergeht, dann ist  $\eta$  ein einfacher Punkt von  $M$ .

*Beweis:* Die Punkte  $\xi^{(\nu)}$  sind die Schnittpunkte von  $M$  mit den Hyperbenen

$$x_k - x_0 \xi_k = 0 \quad (k = 1, \dots, g) . \quad (6)$$

Da jedes  $\xi_{g+i}$  eine separable Funktion von  $\xi_1, \dots, \xi_g$  ist, so gilt für jedes von ihnen eine Gleichung

$$f_i(\xi_1, \dots, \xi_g, \xi_{g+i}) = 0 \quad (7)$$

mit

$$\partial_{g+i} f_i(\xi_1, \dots, \xi_g, \xi_{g+i}) \neq 0 .$$

Die Gleichung (7) kann durch Einführung von  $\xi_0$  homogen gemacht werden. Sie gilt für den allgemeinen Punkt, also für alle Punkte von  $M$ , d. h. die Hyperfläche  $f_i = 0$  enthält  $M$ . Die Tangentialebene dieser Hyperfläche im Punkte  $\xi$  hat nach 1.8 die Gleichung

$$x_0 \partial_0 f_i(\xi) + x_1 \partial_1 f_i(\xi) + \dots + x_g \partial_g f_i(\xi) + x_{g+i} \partial_{g+i} f_i(\xi) = 0 . \quad (8)$$

Die Gleichungen (6) und (8) bestimmen die Verhältnisse

$$x_0 : x_1 : \dots : x_g : x_{g+1} : \dots : x_n$$

eindeutig, denn wenn  $x_0$  willkürlich angenommen wird, so bestimmen sich  $x_1, \dots, x_g$  aus (6), die übrigen  $x_{g+i}$  aus (8). Also zählt (nach Kriterium 1.8) der Punkt  $\xi$  als Schnittpunkt von  $M$  mit den Hyperebenen (6) einfach, und dasselbe gilt von den konjugierten Punkten  $\xi^{(\nu)}$ . Spezialisiert man also ein System von  $r$  allgemeinen Hyperebenen zunächst zu den Hyperebenen (6), so gehen die Schnittpunkte von  $M$  mit den allgemeinen Hyperebenen in die nur einmal gezählten Punkte  $\xi^{(\nu)}$  über. Spezialisiert man nun weiter  $\xi_j \rightarrow \eta_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ), so entsteht der Punkt  $\eta$  bei dieser Spezialisierung nach Voraussetzung ebenfalls nur einmal. Also ist

$\eta$  ein einfacher Schnittpunkt von  $M$  mit den Hyperebenen  $x_j - x_0 \eta_j = 0$  und somit ein einfacher Punkt von  $M$ .

Als Anwendung dieses Kriteriums beweisen wir nun, daß die Mannigfaltigkeit  $M$  der Punktgruppen  $\mathfrak{A}$  lauter einfache Punkte hat.

Es sei  $\mathfrak{A} = p^{(1)} \dots p^{(g)}$  eine solche Punktgruppe. Die Punkte  $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$  mögen alle im endlichen liegen ( $p_0^{(i)} \neq 0$ ) und es möge  $p_0^{(i)} = 1$  gewählt werden ( $i = 1, \dots, g$ ). Die Tangenten von  $\Gamma$  in diesen Punkten mögen die uneigentliche Hyperebene  $x_0 = 0$  in den Punkten  $q^{(1)}, \dots, q^{(g)}$  schneiden und die Verbindungslinien  $p^{(i)} p^{(j)}$  möge dieselbe Hyperebene in  $q^{(ij)}$  schneiden. Wir wählen die Koordinatenebene  $x_1 = 0$  so, daß sie keinen der Punkte  $q^{(i)}$ ,  $q^{(ij)}$  und keinen der uneigentlichen Punkte von  $\Gamma$  enthält. Dann werden die Hyperebenen

$$x_1 = p_1^{(1)} x_0, \dots, x_1 = p_1^{(g)} x_0,$$

die parallel zur Koordinatenebene  $x_1 = 0$  sind, ebenfalls die Punkte  $q^{(1)}, \dots, q^{(g)}$  nicht enthalten, also werden sie auch die Tangenten von  $\Gamma$  in den Punkten  $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$  nicht enthalten, d. h. sie berühren  $\Gamma$  in diesen Punkten nicht. Auch enthält keine von ihnen zwei verschiedene Punkte  $p^{(i)}$ ,  $p^{(j)}$ , denn sonst müßte deren Verbindungsgerade und somit auch der Punkt  $q^{(ij)}$  in der betreffenden Ebene liegen.

Die Koordinaten von  $\mathfrak{A}$  sind die Koeffizienten der Form (1), wobei wir  $\lambda = 1$  annehmen dürfen. Unter ihnen heben wir besonders die Koeffizienten  $a_i$  von  $u_0^{g-i} u_1^i$  hervor. Setzen wir in (1)  $u_2 = \dots = u_n = 0$ , so bleiben nur diese Glieder übrig und wir erhalten

$$\sum_i a_i u_0^{g-i} u_1^i = (u_0 + p_1^{(1)} u_1)(u_0 + p_1^{(2)} u_1) \dots (u_0 + p_1^{(g)} u_1).$$

Folglich ist  $a_0 = 1$  und  $a_1, \dots, a_g$  sind die elementaren symmetrischen Funktionen der ersten Koordinaten  $p_1^{(1)}, \dots, p_1^{(g)}$  der Punkte  $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$ .

Dies gilt für jede Punktgruppe, also auch dann, wenn die Punkte  $p^{(1)}, \dots, p^{(g)}$  durch ebensoviele allgemeine Punkte  $\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(g)}$  von  $\Gamma$  ersetzt werden, deren erste Koordinaten  $\Pi_1^{(1)}, \dots, \Pi_1^{(g)}$  unabhängige Unbestimmte sind. Von den Koordinaten  $\alpha_0, \dots, \alpha_g$  dieser allgemeinen Punktgruppe ist  $\alpha_0 = 1$ , und  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  sind die elementar-symmetrischen Funktionen der Unbestimmten  $\Pi_1^{(1)}, \dots, \Pi_1^{(g)}$ .

Nun ist klar, daß die Unbestimmten  $\Pi_1^{(1)}, \dots, \Pi_1^{(g)}$  separable Funktionen sind; denn sie sind Wurzeln einer Gleichung

$$\Pi^g - \Pi^{g-1} \alpha_1 + \Pi^{g-2} \alpha_2 - \dots = 0$$

mit lauter verschiedenen, nämlich unbestimmten Wurzeln  $\Pi_1^{(1)}, \dots, \Pi_1^{(g)}$ . Die übrigen Koordinaten  $\Pi_2^{(\nu)}, \dots, \Pi_n^{(\nu)}$  eines jeden dieser Punkte sind wiederum separable Funktionen der ersten Koordinaten  $\Pi_1^{(\nu)}$ , wie wir nachher beweisen werden. Also sind alle  $\Pi_k^{(2)}$  separable Funktionen von  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Dann sind aber auch alle Koordinaten der Punktgruppe  $\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(g)}$  separable Funktionen von  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ , d. h. die erste Bedingung des Kriteriums ist erfüllt.

Um auch die zweite Bedingung zu verifizieren, setzen wir die relationstreue Spezialisierung  $\alpha_1, \dots, \alpha_g \rightarrow a_1, \dots, a_g$  zu einer relationstreu Spezialisierung nicht nur sämtlicher Punkte  $\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(g)}$ , sondern auch sämtlicher konjugierter Schnittpunkte  $\Pi^{(1\nu)}, \dots, \Pi^{(g\nu)}$  der Hyper ebenen  $x_1 - x_0 \Pi_1^{(1)} = 0, \dots, x_1 - x_0 \Pi_1^{(g)} = 0$  mit der Kurve  $\Gamma$  fort. Kombiniert man jeden der  $m$  Punkte  $\Pi^{(1\nu)}$  mit jedem der  $m$  Punkte  $\Pi^{(2\nu)}$ , usw. bis  $\Pi^{(g\nu)}$ , so erhält man  $m^g$  Punktgruppen  $(\Pi^{(1\lambda)} \Pi^{(2\mu)}, \dots, \Pi^{(g\nu)})$ . Die ersten  $g + 1$  Koordinaten dieser Punktgruppen, nämlich die Koeffizienten der Potenzprodukte  $u_0^{g-i} u_1^i$  in ihrer zugeordneten Form, sind alle gleich den elementarsymmetrischen Funktionen  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_g$  der Koordinaten  $\Pi_1^{(1)}, \dots, \Pi_1^{(g)}$ . Diese Punktgruppen sind auch die einzigen Punktgruppen von  $\Gamma$ , deren erste  $g + 1$  Koordinaten diese Werte haben. Wir haben nun nachzuweisen, daß bei der Spezialisierung  $\alpha_1 \rightarrow a_1, \dots, \alpha_g \rightarrow a_g$  nur eine von diesen Punktgruppen in  $\mathfrak{A} = p^{(1)} \dots p^{(g)}$  übergeht.

Bei dieser Spezialisierung mögen die Punkte  $\Pi^{(1\lambda)}$  in  $p^{(1\lambda)}$  übergehen. Da die ersten Koordinaten  $\Pi_1^{(1\lambda)}$  alle gleich  $\Pi_1^{(1)}$  sind, so sind auch nach der Spezialisierung die ersten Koordinaten  $p_1^{(1\lambda)}$  alle gleich  $p_1^{(1)}$ , entsprechend alle  $p_1^{(2\mu)} = p_1^{(2)}$ , ... und alle  $p_1^{(g\nu)} = p_1^{(g)}$ . Die Punkte  $\Pi^{(1\lambda)}$  sind die Schnittpunkte der Hyperebene  $x_1 - x_0 \Pi_1^{(1)} = 0$  mit der Kurve  $\Gamma$ ; die spezialisierten Punkte  $p^{(1\lambda)}$  sind also die Schnittpunkte der Hyperebene  $x_1 - x_0 p_1^{(1)} = 0$  mit  $\Gamma$ . Gesetzt nun, es würden bei der Spezialisierung zwei von diesen Punkten  $\Pi^{(1\lambda)}$  in den einen Punkt  $p^{(1)}$  hineintrücken, so müßte die spezialisierte Hyperebene die Kurve im Punkte  $p^{(1)}$  berühren. Dies ist aber nicht der Fall, also rückt nur einer von den Punkten  $\Pi^{(1\lambda)}$  in  $p^{(1)}$  hinein, ebenso nur ein  $\Pi^{(2\mu)}$  in  $p^{(2)}$ , usw. bis  $p^{(g)}$ . Daraus folgt leicht, daß nur eine von den  $m^g$  Punktgruppen  $\Pi^{(1\lambda)} \Pi^{(2\mu)} \dots \Pi^{(g\nu)}$ , nämlich  $\Pi^{(1)} \Pi^{(2)} \dots \Pi^{(g)}$ , bei der Spezialisierung in  $p^{(1)} \dots p^{(g)}$  übergeht.

Wir haben noch den Beweis nachzuholen, daß die Koordinaten  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  eines Punktes von  $\Gamma$ , dessen erste Koordinate  $\Pi_1$  eine Unbestimmte ist, separable Funktionen von  $\Pi_1$  sind. Zum Beweis betrachten wir die zugeordnete Form von



$$F(u, v) = \prod_v (u_0 \xi_0^{(v)} + u_1 \xi_1^{(v)} + \cdots + u_n \xi_n^{(v)}) , \quad (9)$$

wo  $\xi^{(v)}$  die Schnittpunkte der Hyperebene  $v$  mit  $\Gamma$  sind. Setzen wir für  $v$  speziell die Hyperebene  $x_1 - \Pi_1 x_0 = 0$ , so liegen diese Schnittpunkte  $\xi^{(v)}$  alle im Endlichen; wir können also  $\xi_0^{(v)} = 1$  annehmen.  $\xi_1^{(v)}$  ist dann  $= \Pi_1$ . Alle  $\xi^{(v)}$  sind allgemeine Punkte von  $\Gamma$ , also gehen sie durch Isomorphismen auseinander hervor, d. h. sie sind konjugiert über  $\Omega(\Pi_1)$ . Daher haben alle Linearfaktoren in der Zerlegung (9) auch gleiche Vielfachheiten. Wären diese Vielfachheiten  $> 1$ , so würden sie nach der Spezialisierung  $\Pi_1 \rightarrow p_1$  auch noch  $> 1$  sein. Aber die Hyperebene  $x_1 - p_1 x_0 = 0$  berührt die Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $p$  nicht. Also sind die Vielfachheiten in der Zerlegung (9) alle gleich Eins. Betrachtet man die Form (9) als Polynom in  $u_0$ , so hat sie lauter einfache Nullstellen  $u_0 = -u_1 \xi_1^{(v)} - \cdots - u_n \xi_n^{(v)}$ , darunter auch die Nullstelle  $-u_1 \Pi_1 - \cdots - u_n \Pi_n$ . Also ist  $-u_1 \Pi_1 - \cdots - u_n \Pi_n$  eine separable Funktion von  $\Pi_1, u_1, \dots, u_n$ . Ersetzt man ein  $u_k$  durch eine andere Unbestimmte  $v_k$ , so ist auch  $-u_1 \Pi_1 - \cdots - v_k \Pi_k - \cdots - u_n \Pi_n$  separabel. Also ist auch die Differenz  $(-u_k + v_k) \Pi_k$  und somit auch  $\Pi_k$  selber separabel über  $K(\Pi_1, u_1, \dots, u_n, v_k)$ . Da aber in der irreduziblen Gleichung für  $\Pi_k$  die Unbestimmten  $u_1, \dots, u_n, v_k$  gar nicht vorkommen, so folgt, daß  $\Pi_k$  separabel über  $K(\Pi_1)$  ist, was wir beweisen wollten.

#### § 14. Algebraischer Ausdruck der Äquivalenz von Divisoren auf $\Gamma$

Divisorenklassen vom Grade Null heißen nach Hasse *Nullklassen*. Jede Nullklasse kann durch einen Quotienten  $\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{P}$  von ganzen Divisoren  $g$ -ten Grades repräsentiert werden, wobei der Nenner  $\mathfrak{D}$  sogar beliebig gewählt werden kann. Die Darstellung ist eindeutig, wenn  $\mathfrak{P}$  *regulär*, d. h. nicht spezial ist. Dies alles folgt leicht aus dem Riemann-Rochschen Satz (10.7). Man kann bei gegebener Nullklasse  $A$  den Nenner  $\mathfrak{D}$  immer so wählen, daß der Zähler  $\mathfrak{P}$  regulär, also eindeutig bestimmt ist (vgl. Hasse § 4, 3).

Der Übergang zu einem anderen Nenner  $\mathfrak{D}'$  wird durch die Äquivalenz

$$\mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{P} \sim \mathfrak{D}'^{-1} \mathfrak{P}' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P} \mathfrak{D}' \sim \mathfrak{P}' \mathfrak{D} \quad (1)$$

vermittelt. Wir wollen diese Äquivalenz durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten von  $\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathfrak{P}', \mathfrak{D}'$  ausdrücken.

Durch die  $2g$  Punkte der Punktgruppe  $\mathfrak{P} \mathfrak{D}'$  kann man, da die Dimension  $n$  des Raumes  $S_n$  größer oder gleich  $2g$  sein sollte, stets eine Hyper-



ebene  $v$  legen. Diese schneide insgesamt eine Punktgruppe  $\mathfrak{R} \mathfrak{P} \mathfrak{D}'$  aus  $\Gamma$  aus. Ist nun  $\mathfrak{P} \mathfrak{D}' \sim \mathfrak{P}' \mathfrak{D}$ , also  $\mathfrak{R} \mathfrak{P} \mathfrak{D}' \sim \mathfrak{R} \mathfrak{P}' \mathfrak{D}$ , so muß auch die Punktgruppe  $\mathfrak{R} \mathfrak{P}' \mathfrak{D}$  durch eine Hyperebene  $w$  ausgeschnitten werden, da die Hyperebenen nach der in § 11 gemachten Voraussetzung eine Voll-schar ausschneiden. Wenn umgekehrt die beiden Punktgruppen  $\mathfrak{R} \mathfrak{P} \mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{R} \mathfrak{P}' \mathfrak{D}$  je durch eine Hyperebene ausgeschnitten werden, so sind sie äquivalent und es folgt (1). Die Äquivalenz (1) besagt also genau: *Es gibt zwei Hyperebenen  $v$  und  $w$  und eine Punktgruppe  $\mathfrak{R}$ , so daß  $v$  die Punktgruppe  $\mathfrak{R} \mathfrak{P} \mathfrak{D}'$  und  $w$  die Punktgruppe  $\mathfrak{R} \mathfrak{P}' \mathfrak{D}$  auf  $\Gamma$  ausschneidet.*

Ist  $\mathfrak{A}$  die volle Schnittgruppe einer Hyperebene  $v$  mit der Kurve  $\Gamma$ , so ist die zugeordnete Form  $G(u, v)$  von  $\mathfrak{A}$  nach 5.2 ganz rational und homogen in  $v_0, \dots, v_n$ . Bezeichnen nun  $P(u)$ ,  $P'(u)$ ,  $O(u)$ ,  $O'(u)$ ,  $R(u)$  die zugeordneten Formen der Punktgruppen  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P}'$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{R}$ , so kann die eben kursivierte geometrische Beziehung algebraisch durch

$$\left. \begin{aligned} G(u, v) &= \lambda R(u) P(u) O'(u) \\ G(u, w) &= \mu R(u) P'(u) O(u) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ausgedrückt werden, wobei die Proportionalitätsfaktoren  $\lambda$  und  $\mu$  nicht von den  $u$  abhängen dürfen.

Vergleicht man in (2) links und rechts die Koeffizienten der Potenzprodukte der  $u$ , so erhält man Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} g_j(v) &= \lambda h_j(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}, \mathfrak{D}') \quad , \\ g_j(w) &= \mu h_j(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}', \mathfrak{D}) \quad . \end{aligned}$$

Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  ergibt homogene Gleichungen

$$\begin{aligned} g_j(v) h_k(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}, \mathfrak{D}') - g_k(v) h_j(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}, \mathfrak{D}') &= 0 \\ g_j(w) h_k(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}', \mathfrak{D}) - g_k(w) h_j(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}', \mathfrak{D}) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

Dazu kommen noch die in § 13 (5) hergeleiteten homogenen Gleichungen in den Koordinaten von  $\mathfrak{R}$ , die ausdrücken, daß  $\mathfrak{R}$  eine Punktgruppe von  $\Gamma$  ist

$$R_j(\mathfrak{R}) = 0 \quad .$$

Aus den homogenen Gleichungen (3), (4) eliminieren wir durch Bildung des Resultantensystems nacheinander die  $v$ , die  $w$  und die Koordinaten von  $\mathfrak{R}$  und erhalten so das Eliminationsergebnis

$$S_i(\mathfrak{D}, \mathfrak{P}, \mathfrak{D}', \mathfrak{P}') = 0 \quad . \quad (5)$$

Die Gleichungen (5) sind homogen in den Chow-Koordinaten der Punktgruppen  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{P}'$  und drücken genau die Äquivalenz (1) aus.

## § 15. Punkte und relationstreue Spezialisierungen. Beweis des Satzes von Hasse § 7, 6

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen reichen zum Beweis des von Hasse § 7, 6 formulierten Satzes hin. Bevor wir diesen Beweis erbringen, müssen wir aber den Hasseschen Begriff des „algebraischen Punktes“ eines Funktionenkörpers  $K$  vom Transzendenzgrad  $g$  näher betrachten und mit den Grundbegriffen der algebraischen Geometrie vergleichen.

Hasse geht von einer homogenen Transzendenzbasis  $X_0 : X_1 : \dots : X_g$  des Körpers  $K$  aus, normiert  $X_0 = 1$ , bildet den Integritätsbereich  $I$  der in bezug auf  $X_1, \dots, X_g$  ganzen Größen von  $K$  und betrachtet die homomorphen Abbildungen von  $I$  auf algebraische Erweiterungskörper  $\Omega^*$  von  $\Omega$ . Diese Homomorphismen werden dann noch ausgedehnt auf diejenigen gebrochenen Elemente  $\eta = \varphi \psi^{-1}$  von  $K$ , deren Nenner  $\psi$  beim betreffenden Homomorphismus nicht in Null übergeht. Solche Homomorphismen nennt Hasse „algebraische Punkte“ von  $K$ .

Sind  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  Erzeugende des Integritätsbereiches  $I$ , so wird jeder Homomorphismus von  $I$  durch eine relationstreue Spezialisierung  $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \rightarrow (z_1, \dots, z_m)$  gegeben. Das Element  $\eta = f(\zeta)g(\zeta)^{-1}$  geht dabei in  $y = f(z)g(z)^{-1}$  über.

Zu der Terminologie der algebraischen Geometrie paßt die Bezeichnung dieser Homomorphismen als „Punkte“ nicht. Ein Punkt ist in der algebraischen Geometrie kein Homomorphismus, sondern eine Reihe von homogenen Koordinaten oder etwas, was durch eine solche Reihe eindeutig bestimmt wird, und an diesem Begriff „Punkt“ hängen so viele andere Begriffe und Bezeichnungen, daß man dasselbe Wort unmöglich in einer anderen Bedeutung verwenden kann. Was bei Hasse „Punkt“ heißt, ist in unserer Bezeichnungsweise eine *relationstreue Spezialisierung*  $\zeta \rightarrow z$ , der Übergang von einem allgemeinen zu einem speziellen Punkt einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

Die Unterscheidung des Hasseschen „Punkt“-Begriffes von unserem war noch nicht nötig, solange alle Homomorphismen  $\zeta \rightarrow z$  immer von *einem und demselben* allgemeinen Punkt  $\zeta$  ihren Ausgang nahmen. In der Tat konnten wir (§ 11) beweisen, daß die Hasseschen „algebraischen Punkte“  $p$  des Körpers  $K$  eineindeutig den Punkten  $p$  der Kurve  $\Gamma$  entsprechen. Eine klare Trennung wird aber nötig, sobald Homomorphismen wie  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{P}'$ , die von verschiedenen  $\mathfrak{X}$  ausgehen, gleichzeitig betrachtet werden, wie es bei Hasse (§ 7, 6) geschieht.

Wir sahen oben, wie die Spezialisierung  $\zeta \rightarrow z$  die Spezialisierung

$\eta \rightarrow y$  für solche Funktionen  $\eta$ , deren Nenner bei der Spezialisierung nicht Null werden, induziert. Die Spezialisierung  $(\zeta, \eta) \rightarrow (z, y)$  ist dann wieder relationstreu. Denn wenn  $F(\zeta, \eta) = 0$  eine algebraische Relation zwischen  $\zeta$  und  $\eta$  ist, und wenn  $\eta = f(\zeta)g(\zeta)^{-1}$  in diese Relation eingesetzt und das Ergebnis durch Multiplikation mit einer Potenz von  $g(\zeta)$  ganz rational gemacht wird, so bleibt das Ergebnis bei der Ersetzung  $\zeta \rightarrow z$  erhalten. Dividiert man nun wieder durch dieselbe Potenz von  $g(z)$  und ersetzt  $f(z)g(z)^{-1}$  durch  $y$ , so erhält man  $F(z, y) = 0$ . Die Spezialisierung  $(\zeta, \eta) \rightarrow (z, y)$  ist also eine relationstreue Fortsetzung der gegebenen Spezialisierung  $\zeta \rightarrow z$ , und zwar die einzig mögliche, denn die Relation

$$g(\zeta)\eta = f(\zeta)$$

muß bei jeder relationstreuen Spezialisierung erhalten bleiben.

Wir sehen also: Wenn  $\eta$  sich als Bruch  $f(\zeta)g(\zeta)^{-1}$  so darstellen läßt, daß der Nenner für  $\zeta \rightarrow z$  nicht Null wird, so läßt sich die relationstreue Spezialisierung  $\zeta \rightarrow z$  eindeutig durch  $\eta \rightarrow y$  fortsetzen. Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:

15.1. *Wenn die relationstreue Spezialisierung  $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \rightarrow (z_1, \dots, z_m)$  sich eindeutig durch  $\eta \rightarrow y$  fortsetzen läßt, so ist  $\eta$  als Quotient*

$$\eta = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}$$

*so darstellbar, daß der Nenner für  $\zeta = z$  nicht Null wird.*

*Beweis.* Wir können  $y \neq 0$  annehmen, da man sonst nur  $\eta$  durch  $\eta - 1$  zu ersetzen braucht. In **I** gilt die Idealtheorie der ganz-abgeschlossenen Bereiche (Math. Ann. 101, p. 293 oder Mod. Alg. II, § 105). Im Sinne dieser Theorie setzen wir als gekürzten Bruch

$$\eta \sim \frac{p_1 \cdots p_r}{q_1 \cdots q_s}.$$

Die gemeinsamen Nullstellen aller Polynome  $P(\zeta)$  eines Primideals  $\mathfrak{p}_j$  bilden die (nach 2.9 irreduzible) Nullstellenmannigfaltigkeit  $M_j$  von  $\mathfrak{p}_j$ . Wir zeigen zunächst, daß  $M_j$  den Punkt  $z$  nicht enthält. Ist  $\xi$  ein allgemeiner Punkt von  $M_j$ , so kann man durch  $\zeta \rightarrow \xi$  eine erste relationstreue Spezialisierung von  $\Omega[\zeta_1, \dots, \zeta_m]$  definieren. Da  $q_1 \cdots q_s$  nicht durch  $\mathfrak{p}_j$  teilbar ist, so gibt es im Produkt  $q_1 \cdots q_s$  ein Polynom  $h(\zeta)$ , das nicht durch  $\mathfrak{p}_j$  teilbar ist. Dann ist  $\eta \cdot h(\zeta)$  quasiteilbar durch

$$\frac{p_j}{q_1 \cdots q_s} q_1 \cdots q_s = p_j$$

also ganz :

$$\eta \cdot h(\zeta) = p(\zeta) \quad (2)$$

und sogar teilbar durch  $p_j$ ; denn in diesem Fall folgt, da  $p_j$  ein höheres Primideal ist, aus der Quasiteilbarkeit die Teilbarkeit. Da also  $p(\zeta)$  durch  $p_j$  teilbar ist, aber  $h(\zeta)$  nicht, so ist  $p(\xi) = 0$ , aber  $h(\xi) \neq 0$ . Bei der Spezialisierung  $\zeta \rightarrow \xi$  muß (2) erhalten bleiben, also muß  $\eta$  bei dieser Spezialisierung in Null übergehen. Gesetzt nun,  $z$  wäre eine Nullstelle von  $p_j$ , dann könnte man an diese erste Spezialisierung  $\zeta \rightarrow \xi$  eine zweite ebenfalls relationstreue  $\xi \rightarrow z$  reihen. Dabei bleibt  $\eta$  Null; die erhaltene relationstreue Spezialisierung ist also verschieden von der angenommenen Spezialisierung  $\eta \rightarrow y \neq 0$ , entgegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit. Also können die Nullstellenmannigfaltigkeiten von  $p_1, \dots, p_r$  den Punkt  $z$  nicht enthalten.

Es gibt also in  $p_1 \cdots p_r$  Polynome  $f_1(\zeta), \dots, f_r(\zeta)$ , die für  $\zeta = z$  nicht Null werden. Ihr Produkt  $f(\zeta)$  ist durch  $p_1 \cdots p_r$  teilbar und es ist  $f(z) \neq 0$ . Da nun  $f(\zeta)$  durch  $\eta$  quasiteilbar ist, so ist  $f(\zeta)$  auch durch  $\eta$  teilbar :

$$f(\zeta) = \eta \cdot g(\zeta) .$$

In dieser Gleichung führe man die relationstreue Spezialisierung  $\zeta \rightarrow z$ ,  $\eta \rightarrow y$  durch. Da die linke Seite nicht Null wird, wird die rechte Seite auch nicht Null, also ist  $g(z) \neq 0$ . Damit ist die gewünschte Darstellung

$$\eta = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \quad \text{mit} \quad g(z) \neq 0$$

gefunden.

Nun seien  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  zwei feste Punktgruppen auf  $\Gamma$  im Sinne von § 13. Mit jeder allgemeinen oder in der Bezeichnung von Hasse höchststranszendenten Punktgruppe  $\mathfrak{X}$  ist eine zweite  $\mathfrak{X}'$  verbunden durch die Äquivalenz

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{D}'} .$$

. Der Hassesche Satz § 7, 6 kann jetzt so formuliert werden :

*Ist*

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{D}'} \quad (4)$$

*und ist  $\mathfrak{P}'$  regulär, d. h. nicht spezial (10.7), so läßt sich die relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  eindeutig durch  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{P}'$  fortsetzen. Ist umgekehrt*

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$  eine Fortsetzung der relationstreuen Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$ , so gilt (4).

*Beweis.* Nach § 14 wird die Äquivalenz (3) durch homogene algebraische Gleichungen

$$S_i(\mathfrak{O}, \mathfrak{X}, \mathfrak{O}', \mathfrak{X}') = 0 \quad (5)$$

ausgedrückt. Bei jeder relationstreuen Spezialisierung müssen diese Gleichungen erhalten bleiben, also folgt für jede solche Spezialisierung  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}') \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$  die Äquivalenz (4). Die Fortsetzung einer gegebenen relationstreuen Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  ist nach 1.4 immer möglich und wenn dabei  $\mathfrak{X}'$  etwa in  $\mathfrak{P}''$  übergeht, so gilt (4) auch für  $\mathfrak{P}''$ ; da aber die reguläre Punktgruppe  $\mathfrak{P}'$  durch (4) eindeutig bestimmt ist, so kann  $\mathfrak{P}''$  nur mit  $\mathfrak{P}'$  zusammenfallen. Damit ist alles bewiesen.

## § 16. Die Mannigfaltigkeit der Nullklassen

Bei gegebenem  $\mathfrak{O}$  kann man aus jeder Nullklasse  $A$  einen Repräsentanten  $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{O}}$  auswählen, aber diese Darstellung ist nicht invariant und auch nicht immer eindeutig. Macht man aber (wie Hasse § 6, 3)  $\mathfrak{O}$  variabel und betrachtet die Gesamtheit aller Repräsentanten  $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}}$  der Nullklasse  $A$ , so ist diese Gesamtheit eindeutig bestimmt. Nach § 14 ist diese Gesamtheit von Paaren  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  durch ein System algebraischer Gleichungen

$$S_i(\mathfrak{O}, \mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}) = 0$$

gegeben, sie ist also eine algebraische Mannigfaltigkeit  $N_A$ . Durchläuft nun  $A$  alle Nullklassen, so durchläuft  $N_A$ , wie wir zeigen werden, ein algebraisches System von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Das heißt: Bildet man die Mannigfaltigkeiten  $N_A$  auf Punkte ab, so bilden diese Punkte eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}$ : die *Klassenmannigfaltigkeit*. Die Punkte von  $\mathfrak{R}$  entsprechen eineindeutig den Nullklassen  $A$ .

Die Gesamtheit aller Paare  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ , derart daß

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{O}} \sim \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}} \quad (1)$$

gilt, ist durch das Gleichungssystem

$$R_i(\mathfrak{O}, \mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}) = 0 \quad (2)$$

gegeben. Halten wir  $\mathfrak{D}$  fest und lassen  $\mathfrak{P}$  die ganze in § 13 untersuchte glatte Mannigfaltigkeit  $M$  durchlaufen, so definiert (2) eine algebraische Korrespondenz zwischen  $M$  und der Mannigfaltigkeit  $N$  aller Paare  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ . Wir wollen nun beweisen :

16.1. *Die Korrespondenz (2) ist irreduzibel.*

16.2. *Jedem  $\mathfrak{P}$  entspricht in der Korrespondenz eine Mannigfaltigkeit  $N_{\mathfrak{P}}$  von Paaren  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ , die immer dieselbe Dimension  $g$  besitzt.*

Aus 16.1 und 16.2 folgt nach 5.9 :

16.3. *Die Mannigfaltigkeiten  $N_{\mathfrak{P}}$  bilden ein irreduzibles System von algebraischen Mannigfaltigkeiten.*

Das ist aber genau das, was wir beweisen wollten. Da nämlich  $N$  offensichtlich nur von der Divisorenklasse  $A = \left\{ \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \right\}$  abhängt, so kann man statt  $N_{\mathfrak{P}}$  auch  $N_A$  schreiben. Die  $N_A$  sind den Nullklassen  $A$  eineindeutig zugeordnet und bilden ein irreduzibles System  $\mathfrak{R}$  von algebraischen Mannigfaltigkeiten.

*Beweis von 16.1.* Wir schreiben statt (1)

$$\mathfrak{P} \mathfrak{R} \sim \mathfrak{D} \mathfrak{S} . \quad (3)$$

Die Äquivalenz (3) definiert zunächst eine Korrespondenz zwischen den  $\mathfrak{S}$  und den Produkten  $\mathfrak{I} = \mathfrak{P} \mathfrak{R}$ . Diese ist nach dem Kriterium 3.6 irreduzibel, denn erstens bilden die  $\mathfrak{S}$  nach § 13 eine irreduzible Mannigfaltigkeit, und zweitens entspricht jedem  $\mathfrak{S}$  in der Korrespondenz (3) eine lineare Schar von Punktgruppen  $\mathfrak{P} \mathfrak{R} = \mathfrak{I}$ , die als lineare Schar selbstverständlich irreduzibel ist und nach dem Riemann-Rochschen Satz immer dieselbe Dimension  $g$  hat.

Ein allgemeines Paar dieser irreduziblen Korrespondenz erhält man, indem man  $\mathfrak{S}$  durch eine allgemeine Punktgruppe  $\mathfrak{S}^*$  ersetzt und  $\mathfrak{P} \mathfrak{R}$  durch die allgemeine Punktgruppe  $\mathfrak{I}^*$  der zugehörigen linearen Schar

$$\mathfrak{I}^* \sim \mathfrak{D} \mathfrak{S}^* . \quad (4)$$

Alle Tripel  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  der Korrespondenz (3) erhält man nun, indem man zunächst das Paar  $(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{S}^*)$  relationstreu zu  $(\mathfrak{I}, \mathfrak{S})$  spezialisiert und  $\mathfrak{I}$  in allen möglichen Weisen in  $\mathfrak{I} = \mathfrak{P} \mathfrak{R}$  zerlegt. Diese relations-treue Spezialisierung kann man aber fortsetzen zu einer relationstreuen Spezialisierung aller einzelnen Punkte der Punktgruppe  $\mathfrak{I}^*$ . Also geht

die Zerlegung  $\mathfrak{I} = \mathfrak{P} \mathfrak{R}$  aus irgendeiner der möglichen Zerlegungen  $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$  durch relationstreue Spezialisierung hervor. Demnach kann man die Tripel  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  auch so erhalten: Zunächst wird das allgemeine Paar  $(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{S}^*)$  der Korrespondenz (4) gebildet, dann wird  $\mathfrak{I}^*$  in allen möglichen Weisen in zwei Faktoren  $\mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$  zerlegt, schließlich wird relationstreu spezialisiert:  $\mathfrak{P}^* \rightarrow \mathfrak{P}, \mathfrak{R}^* \rightarrow \mathfrak{R}, \mathfrak{S}^* \rightarrow \mathfrak{S}$ .

Wir wollen nun zeigen, daß die Zerlegungen  $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$  alle untereinander konjugiert sind, d. h. daß sie durch Körperisomorphismen — auch eine Art von relationstreuen Spezialisierungen — aus einer solchen Zerlegung hervorgehen. Wenn das gezeigt ist, so folgt, daß alle Tripel  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  aus einem einzigen Tripel  $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{S}^*)$  durch relationstreue Spezialisierung hervorgehen. Die Mannigfaltigkeit aller Tripel  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  besitzt also ein allgemeines Tripel  $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{S}^*)$ , woraus ihre Irreduzibilität folgt.

Wir betrachten die Vollschar  $|\mathfrak{I}^*| = |\mathfrak{O} \mathfrak{S}^*|$ . Die Punktgruppe  $\mathfrak{S}^*$  ist allgemein, also nicht spezial. Es sei  $\mathfrak{O} = q_1 q_2 \cdots q_g$ . Die Restschar von  $q_1 q_2 \cdots q_k$  ( $1 \leq k \leq g$ ) in bezug auf  $|\mathfrak{I}^*|$  ist  $|q_{k+1} \cdots q_g \mathfrak{S}^*|$ ; diese Schar ist mithin auch nicht spezial. Für  $k < g$  hat sie auch keine festen Punkte. Denn wenn etwa  $q_{k+1}$  ein fester Punkt wäre, so wäre  $|q_{k+2} \cdots q_g \mathfrak{S}^*|$  nach dem Reduktionssatz 10.6 eine Spezialschar, was nicht der Fall ist; und wenn einer der Punkte  $s_1, s_2, \dots, s_g$ , aus denen  $\mathfrak{S}^*$  besteht, etwa  $s_g$  ein fester Punkt wäre, so wäre  $|q_{k+1} \cdots q_g s_1 \cdots s_{g-1}|$  ebenfalls nach 10.6 spezial, also wäre auch  $|q_g s_1 \cdots s_{g-1}|$  spezial. Das ist aber auch nicht der Fall; denn der Punkt  $q_g$  stellt den Punktgruppen der Differentialschar, die ihn enthalten sollen, eine lineare Bedingung und die hinzukommenden allgemeinen Punkte  $s_1, \dots, s_{g-1}$  stellen ihnen noch  $g - 1$  davon unabhängige lineare Bedingungen; das macht insgesamt  $g$  lineare Bedingungen, während doch die Differentialschar nur die Dimension  $g - 1$  hat. Damit ist gezeigt, daß die Restschar von  $q_1 \cdots q_k$  in bezug auf  $|\mathfrak{I}^*|$  für  $k \leq g$  nicht spezial ist und für  $k < g$  auch keine festen Punkte hat.

Diese Eigenschaften gelten um so mehr, wenn  $q_1, \dots, q_k$  durch ebensoviele allgemeine, von  $\mathfrak{S}^*$  unabhängige Punkte ersetzt werden. Nun zerlegen wir  $\mathfrak{I}^*$  irgendwie in  $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$  und setzen  $\mathfrak{P}^* = p_1 p_2 \cdots p_g$  und  $\mathfrak{R}^* = r_1 r_2 \cdots r_g$ . Unter den Punkten  $p_1, \dots, p_g$  seien etwa  $p_1, \dots, p_k$  algebraisch unabhängig untereinander und von  $\mathfrak{S}^*$ , während die übrigen  $p_{k+1}, \dots, p_g$  algebraisch von ihnen und von  $\mathfrak{S}^*$  abhängen. Dann folgt, daß der Rest von  $p_1 \cdots p_k$  in bezug auf  $|\mathfrak{I}^*|$  für  $k \leq g$  nicht spezial ist und für  $k < g$  auch keine festen Punkte hat.

Nun benutzen wir, daß  $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$  eine allgemeine Punktgruppe der



Vollschar  $|\mathfrak{T}^*|$  ist. Hält man nun die algebraisch unabhängigen Punkte  $p_1, \dots, p_k$  fest, so muß der Rest  $p_{k+1} \cdots p_g \mathfrak{R}^*$  eine allgemeine Punktgruppe der Restschar  $|\mathfrak{T}^*| : p_1 \cdots p_k$  sein. Wäre nun  $k < g$ , so wäre diese Restschar nach dem eben Bewiesenen eine Schar ohne feste Punkte. Andererseits wäre  $p_{k+1}$  ein solcher fester Punkt, denn  $p_{k+1}$  ist algebraisch abhängig von  $\mathfrak{S}^*$  und  $p_1, \dots, p_k$ . Also muß  $k = g$  sein, d. h. die Punkte  $p_1, \dots, p_g$  sind algebraisch unabhängig. Weiter ist die Restschar  $|\mathfrak{R}^*|$  von  $p_1 \cdots p_g$  in bezug auf  $|\mathfrak{T}^*|$  nicht spezial, also hat sie die Dimension Null, d. h. die Punktgruppe  $\mathfrak{R}^*$  ist durch  $\mathfrak{S}^*$  und  $\mathfrak{P}^*$  eindeutig bestimmt.

Die Punktgruppen  $\mathfrak{S}^*$ ,  $\mathfrak{P}^*$  und  $\mathfrak{R}^*$  haben also folgende Strukturen:  $\mathfrak{S}^*$  und  $\mathfrak{P}^*$  bestehen aus lauter unabhängigen allgemeinen Punkten, und  $\mathfrak{R}^*$  ist durch die Äquivalenz

$$\mathfrak{D} \mathfrak{S}^* \sim \mathfrak{P}^* \mathfrak{R}^*$$

eindeutig bestimmt.

Nun ist klar, daß jedes System von  $2g$  unabhängigen allgemeinen Punkten von  $\Gamma$  aus jedem anderen ebensolchen System durch einen Körperisomorphismus hervorgeht. Also gibt es bis auf Körperisomorphie nur ein Tripel  $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{S}^*)$ , aus dem alle Tripel  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  relationstreu hervorgehen. Damit ist 16.1 bewiesen.

*Beweis von 16.2.* Es sei  $\mathfrak{P}$  gegeben und  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  irgendeine Lösung der Äquivalenz (3). Wir haben zu beweisen, daß das Paar  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  höchstens den Transzendenzgrad  $g$  hat.

Es seien  $r_1, \dots, r_k$  die algebraisch unabhängigen unter den Punkten  $r_1, \dots, r_g$  von  $\mathfrak{R}$ . Weiter sei  $d$  die Dimension der durch (3) definierten linearen Schar  $|\mathfrak{S}|$  bei gegebenen  $r_1, \dots, r_g$ . Dann ist das Paar  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  von höchstens  $k + d$  unabhängigen Parametern abhängig. Wir haben zu beweisen:  $k + d \leq g$ .

Nach dem Riemann-Rochschen Satz ist  $d$  gleich dem Spezialitätsindex von  $|\mathfrak{S}|$ , d. h. gleich der Anzahl der linear unabhängigen Divisoren der Restschar

$$\left| \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}} \right| = \left| \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\mathfrak{S}} \right| = \left| \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}} \right|,$$

wo  $\mathfrak{D}$  irgendein Divisor der Differentialschar ist. Setzt man

$$\left| \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}} \right| = |\mathfrak{D}_1|,$$

so ist  $d$  die Anzahl der linear unabhängigen Divisoren der Restschar  $|\mathfrak{D}_1| : \mathfrak{R}$ .



Die Anzahl der linear unabhängigen Divisoren der Schar  $|\mathfrak{D}_1|$  vom Grade  $2g - 2$  ist nach dem Riemann-Rochschen Satz höchstens  $g$ . Die algebraisch unabhängigen Punkte  $r_1, \dots, r_k$  von  $\mathfrak{R}$  legen den Punktgruppen von  $|\mathfrak{D}_1|$ , die sie enthalten sollen, ebenso viele linear unabhängige Bedingungen auf. Also ist die Anzahl der linear unabhängigen Divisoren der Restschar höchstens  $g - k$ , mithin

$$d \leq g - k$$

oder

$$d + k \leq g ,$$

was wir beweisen wollten.

Als *Koordinaten der Klasse A* bezeichnet man naturgemäß die Chow-Koordinaten der Mannigfaltigkeit  $N_A$ . Es kann keine Kollision entstehen, wenn der Bildpunkt von  $A$  auf der Klassenmannigfaltigkeit  $\mathfrak{R}$ , dessen Koordinaten eben die Koordinaten von  $A$  sind, ebenfalls mit dem Buchstaben  $A$  bezeichnet wird.

Die Mannigfaltigkeit  $N_A$  besteht aus allen Paaren  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ , so daß  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{S}$  zur Klasse  $A$  gehört. Drückt man die Tatsache, daß  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  zu  $N_A$  gehört, nach 5.6 durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten von  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $A$  aus, so erhält man ein Gleichungssystem

$$G_i(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, A) = 0 , \quad (5)$$

welches ausdrückt, daß der Divisor  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{S}$  zur Klasse  $A$  gehört.

Wenn ein zweiter Divisor  $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{I}$  zur Klasse  $B$  gehört:

$$G_i(\mathfrak{S}, \mathfrak{I}, B) = 0 , \quad (6)$$

so gehört der Produktdivisor  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{I}$  zur Produktklasse  $AB = C$ :

$$G_i(\mathfrak{R}, \mathfrak{I}, C) = 0 . \quad (7)$$

Durch Elimination von  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{I}$  aus (5), (6), (7) erhält man ein Gleichungssystem

$$H_k(A, B, C) = 0 . \quad (8)$$

Umgekehrt, wenn (8) erfüllt ist, so gibt es drei Divisoren  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{I}$ , die (5), (6), (7) erfüllen, d. h.  $A$  ist die Klasse von  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{S}$ ,  $B$  die von  $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{I}$  und  $C$  die von  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{I}$ , mithin ist dann  $C = AB$ . Das Gleichungssystem (8) ist also der Produktrelation  $C = AB$  äquivalent.

## § 17. Korrespondenzen und Multiplikatoren

Es sei  $\mu$  eine algebraische Korrespondenz zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma$ . Die Korrespondenz darf reduzibel sein, aber wir setzen voraus, daß jede ihrer irreduziblen Bestandteile einem allgemeinen Punkt  $\xi$  von  $\Gamma$  endlich viele Punkte  $\eta_1, \dots, \eta_h$  von  $\Gamma$  zuordnet. Geht man durch relationstreue Spezialisierung  $\xi \rightarrow p$  zu einem speziellen Punkt  $p$  über, so gehen  $\eta_1, \dots, \eta_h$  in (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmte Punkte  $q_1, \dots, q_h$  über. Die Korrespondenz  $\mu$  ordnet also jedem Punkt  $p$  eine eindeutig bestimmte Punktgruppe  $\mu p = q = q_1 \dots q_h$  zu. Einer Punktgruppe  $a = p_1 \dots p_m$  wird demnach die Punktgruppe  $\mu a = (\mu p_1)(\mu p_2) \dots (\mu p_m)$  zugeordnet. Man beweist leicht: Wenn  $a$  eine rationale Punktgruppe ist, so ist auch  $\mu a$  rational, und wenn  $a$  eine lineare Schar durchläuft, so durchläuft auch  $\mu a$  eine lineare Schar. Schließlich kann man die Zuordnung auch auf nicht ganze Divisoren  $a b^{-1}$  ausdehnen, indem man  $\mu(a b^{-1}) = (\mu a)(\mu b)^{-1}$  setzt. Auch jetzt entspricht einer linearen Schar wieder eine lineare Schar, folglich entsprechen äquivalenten Divisoren auch äquivalente Divisoren, und einer Divisorenklasse  $B$  entspricht eine Divisorenklasse  $\mu B$ .

Die Korrespondenzen  $\mu$  heißen nach Hasse auch *Multiplikatoren*, und zwar reguläre Multiplikatoren, wenn sie einer allgemeinen Nullklasse  $Y = \{\mathfrak{Y} \mathfrak{U}^{-1}\}$  (wo  $\mathfrak{U}$  eine feste,  $\mathfrak{Y}$  eine allgemeine Punktgruppe ist) wieder eine allgemeine Nullklasse  $X = \mathfrak{X} \mathfrak{D}^{-1}$  zuordnen.

Wir wollen nun die Beziehung

$$\mu(\mathfrak{P} \mathfrak{U}^{-1}) \sim \mathfrak{S} \mathfrak{D}^{-1} \quad (1)$$

durch algebraische Gleichungen zwischen den Koordinaten von  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{D}$  ausdrücken. Wir zerlegen sie in

$$\mu \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \quad , \quad (2)$$

$$\mu \mathfrak{U} = \mathfrak{B} \quad , \quad (3)$$

$$\mathfrak{Q} \mathfrak{B}^{-1} \sim \mathfrak{S} \mathfrak{D}^{-1} \quad . \quad (4)$$

Die Systeme  $(p, q_1, \dots, q_h)$  gehen durch relationstreue Spezialisierung aus  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_h)$  hervor; sie bilden also eine irreduzible Mannigfaltigkeit, deren Gleichungen

$$f_j(p, q_1, \dots, q_h) = 0 \quad (5)$$

heißen mögen. Schreibt man die Gleichungen (5) für alle Punkte  $p_1, \dots, p_g$  der Punktgruppe  $\mathfrak{P}$  auf, fügt man die homogenen Gleichungen

$$\pi_j g_k(p_1, \dots, p_g) - \pi_k g_j(p_1, \dots, p_g) = 0 \quad (6)$$

hinzu, die nach § 13 ausdrücken, daß die Punktgruppe  $\mathfrak{P}$  aus den Punkten  $p_1, \dots, p_g$  besteht, dann noch die entsprechenden Gleichungen für die Punktgruppe  $\mathfrak{Q} = (q_{11} \dots q_{1h})(q_{21} \dots q_{2h}) \dots (q_{g1} \dots q_{gh})$  und die Gleichungen, die ausdrücken, daß alle diese Punkte  $p_i$  und  $q_{ij}$  auf  $\Gamma$  liegen, und eliminiert man nunmehr die Koordinaten der Punkte  $p_i$  und  $q_{ij}$  aus allen diesen Gleichungen, so erhält man ein System von Gleichungen

$$R_i(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0, \quad (7)$$

das die Beziehung (2) ausdrückt.

Ebenso drückt das System

$$R_i(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) = 0 \quad (8)$$

die Beziehung (3) aus.

Schließlich haben wir noch die Äquivalenz (4) durch algebraische Gleichungen auszudrücken. Zu diesem Zweck zerlegen wir  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{B}$  in lauter Gruppen von  $g$  Punkten :

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_h, \quad (9)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_h. \quad (10)$$

Dann ist (4) gleichwertig mit

$$\mathfrak{Q} \mathfrak{Q}_1 \dots \mathfrak{Q}_h \sim \mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_h \mathfrak{S}.$$

Diese Bedingung zerlegen wir in

$$\mathfrak{Q} \mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_2, \quad (11)$$

$$\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_2 \sim \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q}_3, \quad (12)$$

...

$$\mathfrak{Q}_{h-1} \mathfrak{Q}_{h-1} \sim \mathfrak{B}_{h-1} \mathfrak{Q}_h, \quad (13)$$

$$\mathfrak{Q}_h \mathfrak{Q}_h \sim \mathfrak{B}_h \mathfrak{S}, \quad (14)$$

wo  $\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \dots, \mathfrak{Q}_h$  lauter Gruppen von  $g$  Punkten sind, die durch die Äquivalenzen (11) bis (13) der Reihe nach bestimmbar sind. Nach § 10 können alle Äquivalenzen (11) bis (14) durch algebraische Gleichungen ausgedrückt werden. Ebenso kann man (9) und (10) nach der Methode des § 14 durch algebraische Gleichungen ausdrücken [vgl. § 14, (2) und (3)]. Eliminiert man aus allen diesen Gleichungen die Koordinaten der Hilfsgruppen  $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_h, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_h, \mathfrak{Q}_2, \dots, \mathfrak{Q}_h$ , so erhält man schließlich ein System von Gleichungen

$$S_i(\mathfrak{D}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{S}, \mathfrak{P}) = 0, \quad (15)$$

das die Äquivalenz (4) ausdrückt.

Eliminiert man endlich aus (7), (8), (15) die Koordinaten der Punktgruppen  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{P}$ , so erhält man die gesuchten Gleichungen

$$T_i(\mathfrak{D}, \mathfrak{P}, \mathfrak{U}, \mathfrak{S}) = 0, \quad (16)$$

welche die Äquivalenz (1) ausdrücken.

Zum Schluß vollziehen wir den Übergang auf die Klassenmannigfaltigkeit. Der zu Klasse  $A$  gehörige Punkt der Klassenmannigfaltigkeit möge ebenfalls mit  $A$  bezeichnet werden. Dann drückt das Gleichungssystem

$$G_i(\mathfrak{D}, \mathfrak{S}, A) = 0 \quad (17)$$

nach § 16, Schluß aus, daß der Divisor  $\mathfrak{D} \mathfrak{S}^{-1}$  zur Klasse  $A$  gehört; ebenso drückt das System

$$G_i(\mathfrak{U}, \mathfrak{P}, B) = 0 \quad (18)$$

aus, daß der Divisor  $\mathfrak{P} \mathfrak{U}^{-1}$  zur Klasse  $B$  gehört. Eliminiert man aus (16), (17), (18) und den Gleichungen, die ausdrücken, daß  $\mathfrak{D}, \mathfrak{P}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}$  zu  $M$  gehören, die Koordinaten von  $\mathfrak{D}, \mathfrak{P}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}$ , so erhält man ein Gleichungssystem

$$H(A, B) = 0, \quad (19)$$

welches die Beziehung  $A = \mu B$  algebraisch zum Ausdruck bringt.

## § 18. Beweis der Hasseschen Sätze § 8, 2

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen reichen zum Beweis der von Hasse in § 8, 4 formulierten Sätze hin. Bevor wir diese Beweise aber geben, müssen wir die in diesen Sätzen steckenden Begriffe, insbesondere die Zerlegung der Hasseschen „Punkte“ bei Erweiterung des Funktionenkörpers, näher betrachten und mit den Begriffen der algebraischen Geometrie vergleichen.

Was geschieht mit den „algebraischen Punkten“  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  eines Funktionenkörpers  $K$  bei Erweiterung dieses Funktionenkörpers? Hasse beruft sich (§ 7, 3) für diese Frage auf eine von Lorenzen ausgearbeitete, aber nicht publizierte Erweiterung der Krullschen Zerlegungstheorie. Da wir in dieser Arbeit alles Behauptete auch beweisen wollen, können wir uns nicht auf diese unpublizierte Theorie stützen. Außerdem ist die Formu-

lierung, die sich aus der algebraischen Geometrie ergibt, einfacher und in gewisser Hinsicht auch allgemeiner als die von Hasse verwendete.

Hasse benutzt für den Körper  $K$  und den separablen normalen Erweiterungskörper  $K^*$  eine und dieselbe homogene Transzendenzbasis  $X_0 : X_1 : \dots : X_g$ . Wenn es sich um solche Homomorphismen handelt, bei denen  $X_0$  nicht in Null übergeht, kann man wieder  $X_0 = 1$  normieren. Ein Erzeugendensystem der ganzen Größen von  $K$  sei  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , von  $K^*$  ebenso  $\zeta_1^*, \dots, \zeta_q^*$ . Die  $\zeta^*$  sind ganze algebraische Funktionen von den  $\zeta$ , die  $\zeta$  ganze rationale Funktionen von den  $\zeta^*$ . Das Punktepaar  $(\zeta, \zeta^*)$  ist allgemeines Paar einer algebraischen Korrespondenz zwischen  $M$  und  $M^*$ , wobei  $\zeta$  allgemeiner Punkt von  $M$  und  $\zeta^*$  allgemeiner Punkt von  $M^*$  ist. Durch relationstreue Spezialisierung  $(\zeta, \zeta^*) \rightarrow (z, z^*)$  erhält man aus dem allgemeinen Punktepaar alle Punktepaare der Korrespondenz. Die Frage der „Zerlegungstheorie“ ist nun : In wievielen verschiedenen Weisen kann eine gegebene relationstreue Spezialisierung  $\zeta \rightarrow z$  zu einer ebensolchen  $(\zeta, \zeta^*) \rightarrow (z, z^*)$  fortgesetzt werden?

Die Methode der algebraischen Geometrie gestattet es, dieselbe Frage gleich viel allgemeiner zu stellen. Die Voraussetzung, daß die  $\zeta^*$  ganze algebraische Funktionen von den  $\zeta$  und die  $\zeta$  ganze rationale Funktionen von den  $\zeta^*$  sind, die bei den Anwendungen nicht von vornherein erfüllt ist, kann fallengelassen werden.

Wir brauchen bloß vorauszusetzen :

- 1)  $M$  sei eine irreduzible, glatte  $g$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.
- 2)  $\mathfrak{R}$  sei eine irreduzible Korrespondenz zwischen  $M$  und  $N$ , in der einem allgemeinen Punkt  $\xi$  von  $M$  nur endlich viele konjugierte Punkte  $\eta_1, \dots, \eta_h$  von  $N$  entsprechen. (Die Zahl  $h$  ist natürlich gleich dem reduzierten Körpergrad von  $\Omega(\xi, \eta)$  über  $\Omega(\xi)$ , wo  $\eta$  einer von den konjugierten Punkten  $\eta_\nu$  ist.)
- 3) Einem speziellen Punkt  $p$  von  $M$  entsprechen in der Korrespondenz auch nur endlich viele Punkte  $q$  von  $N$ .

Unter diesen Voraussetzungen kann man die relationstreue Spezialisierung  $\xi \rightarrow p$  zu einer relationstreuen Spezialisierung  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_h) \rightarrow (p, q_1, \dots, q_h)$  fortsetzen, und die Punkte  $q_1, \dots, q_h$  sind nach § 1.9 bis auf die Reihenfolge eindeutig durch die Spezialisierung  $\xi \rightarrow p$  allein bestimmt. Die Multiplizität  $e_i$  eines Punktes  $q_i$  ist die Zahl, die angibt, wie oft  $q_i$  unter den  $q_1, \dots, q_h$  vorkommt. Konjugierte Punkte in bezug auf  $\Omega(p)$  haben natürlich dieselbe Multiplizität. Ist  $f_i$  die Anzahl der verschiedenen Konjugierten eines Punktes  $q_i$ , oder, was dasselbe ist, der reduzierte Körpergrad von  $\Omega(p, q_i)$  über  $\Omega(p)$ , so ist

$$h = \sum e_i f_i \quad (1)$$

die Gesamtzahl der Punkte  $q_i$ , jeder mit seiner Vielfachheit gezählt.

Nun machen wir die weiteren Voraussetzungen, die in den Anwendungen nachher auch erfüllt sind:

4)  $N$  sei glatt;

5) Den Punkten  $q_1, \dots, q_h$  entsprechen in der Korrespondenz nur endlich viele Punkte von  $M$ ;

6)  $\Omega(\eta_1)$  sei normal über  $\Omega(\xi)$ , d. h.  $\xi$  und  $\eta_1, \dots, \eta_h$  seien rationale Funktionen von  $\eta_1$ .

Dann können wir beweisen, daß in (1) alle  $e_i$  und  $f_i$  gleich sind, so daß wir statt (1) schreiben können

$$h = e f r, \quad (2)$$

wo  $r$  die Anzahl der Systeme konjugierter Punkte  $q_i$  ist.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß nach 6) die umgekehrte Korrespondenz  $\mathfrak{R}$  eine rationale Abbildung von  $N$  auf  $M$  ist. Wegen 4) und 5) folgt daraus, daß jedem der Punkte  $q_i$  nur ein Punkt von  $M$ , nämlich der Punkt  $p$  entspricht.

Nunmehr betrachten wir die Korrespondenz zwischen den Punkten  $\eta_1$  einerseits und den Systemen  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_h)$  andererseits. Die Korrespondenz ist eine birationale Abbildung, deren Urmannigfaltigkeit  $N$  doppelpunktfrei ist, und dem Punkt  $q_1$  entsprechen nur endlich viele Systeme  $(p, q_1, \dots, q_h)$ , nämlich der einzige Punkt  $p$  und dazu endlich viele Möglichkeiten für  $q_1, \dots, q_h$ . Also entspricht dem Punkt  $q_1$  nur ein einziges System  $(p, q_1, \dots, q_h)$ , d. h. die relationstreue Spezialisierung  $\eta_1 \rightarrow q_1$  läßt sich nur in einer Weise zu  $\xi \rightarrow p, \eta_1 \rightarrow q_1, \dots, \eta_h \rightarrow q_h$  fortsetzen.

Wenn nun  $q_1$  die Vielfachheit  $e$  hat und wenn etwa  $\eta_1, \dots, \eta_e$  bei der Spezialisierung in  $q_1$  hineinrücken, so wollen wir zunächst beweisen, daß alle anderen  $q_i$  auch die Vielfachheit  $e$  haben. Es seien  $S_1, \dots, S_e$  die Substitutionen der Galoisschen Gruppe, die  $\eta_1$  in  $\eta_1, \dots, \eta_e$  überführen. Setzt man sie zusammen mit der relationstreuen Spezialisierung, die  $\eta_1, \dots, \eta_e$  in  $q_1$  überführt, so erhält man lauter relationstreue Spezialisierungen, die  $\eta_1$  in  $q_1$  überführen, also mit der gegebenen Spezialisierung  $\eta_1, \dots, \eta_h \rightarrow q_1, \dots, q_h$  übereinstimmen müssen.

Wir üben nun diese zusammengesetzte relationstreue Spezialisierung auf  $\eta_{e+1}$  aus. Die Substitutionen  $S_1, \dots, S_e$  mögen  $\eta_{e+1}$  in  $\eta_{e+1}, \dots, \eta_{2e}$  überführen. Die darauffolgende relationstreue Spezialisierung  $\eta_i \rightarrow q_i$

führt  $\eta_{e+1}, \dots, \eta_{2e}$  in  $q_{e+1}, \dots, q_{2e}$  über. Die resultierende Spezialisierung ist aber nach dem vorigen Absatz immer dieselbe; also müssen  $q_{e+1}, \dots, q_{2e}$  zusammenfallen. In dieser Weise fallen also je  $e$  von den Punkten  $q_1, \dots, q_n$  zusammen, d. h. jeder Punkt  $q_i$  hat mindestens dieselbe Vielfachheit wie  $q_1$ . Umgekehrt hat  $q_1$  auch mindestens dieselbe Vielfachheit wie  $q_i$ ; mithin haben die Punkte  $q_i$  alle dieselbe Vielfachheit  $e$ .

Wie leicht ersichtlich, bilden die Substitutionen  $S_j$  ( $j = 1, \dots, e$ ) mit der Eigenschaft, daß  $S_j \eta_1$  bei der relationstreuen Spezialisierung in  $q_1$  übergeht, eine Gruppe: die *Trägheitsgruppe* der Spezialisierung  $\eta_1 \rightarrow q_1$ . Dies nebenbei.

Nun mögen  $q_1 = \dots = q_e$ ,  $q_{e+1} = \dots = q_{2e}$ , usw. bis  $q_{fe}$  ein System von  $f$  konjugierten Punkten bilden. Es gibt dann zu jedem dieser Punkte  $q_k$  einen Körperisomorphismus, der  $q_k$  in  $q_1$  überführt, und dieser läßt sich zu einer isomorphen relationstreuen Spezialisierung des ganzen Punktsystems  $q_1, \dots, q_h$  fortsetzen, die die  $q_i$  irgendwie untereinander permutiert.

Übt man nun nacheinander aus: zuerst die Substitution  $S_k$  der Galoischen Gruppe, die  $\eta_1$  in  $\eta_k$  überführt, dann die relationstreue Spezialisierung  $(\eta_1, \dots, \eta_h) \rightarrow (q_1, \dots, q_h)$ , die  $\eta_k$  in  $q_k$  überführt, schließlich die eben konstruierte Permutation  $P_k$ , die  $q_k$  in  $q_1$  überführt, so erhält man eine relationstreue Spezialisierung, die  $\eta_1$  in  $q_1$  überführt, also mit der gegebenen  $(\eta_1, \dots, \eta_h) \rightarrow (q_1, \dots, q_h)$  identisch sein muß.

Die Substitutionen  $S_k$  ( $k = 1, \dots, ef$ ) mögen  $\eta_{ef+1}$  in  $\eta_{ef+k}$  überführen. Übt man danach die Spezialisierung  $\eta_{ef+k} \rightarrow q_{ef+k}$  und die Permutation  $P_k$  aus, so muß schließlich  $q_{ef+1}$  herauskommen:

$$P_k q_{ef+k} = q_{ef+1} .$$

Die Punkte  $q_{ef+1}, \dots, q_{ef+ef}$  gehen also alle durch Isomorphismen  $P_k^{-1}$  aus dem einen Punkt  $q_{ef+1}$  hervor, d. h. sie sind zu  $q_{ef+1}$  konjugiert. Es gibt somit mindestens ebenso viele zu  $q_{ef+1}$  konjugierte Punkte als zu  $q_1$  konjugierte. Selbstverständlich gilt auch das Umgekehrte, also gibt es zu jedem Punkt  $q_i$  gleich viele konjugierte Punkte wie zu  $q_1$ , d. h. alle  $f_i$  sind untereinander gleich.

Nebenbei bemerkt, bilden die  $S_k$  wieder eine Gruppe: die *Zerlegungsgruppe* der Spezialisierung  $\eta_1 \rightarrow q_1$ . Erweitert man den Grundkörper  $\Omega$  durch Adjunktion von  $q_1$ , so wird  $f = 1$ , d. h. alle Punkte  $q_i$  sind rational durch  $q_1$  ausdrückbar. Der Körper  $\Omega(p, q_1)$  ist also normal über  $\Omega(p)$  und mit den Körpern  $\Omega(p, q_i)$  identisch. Seine Galois'sche Gruppe ist die Faktorgruppe der Zerlegungs- nach der Trägheitsgruppe.



Wie man sieht, ist die Voraussetzung, daß die  $\eta$  ganz algebraisch von den  $\xi$  abhängen, bei allen diesen Beweisen nicht nötig, was die Anwendung, wie wir sehen werden, sehr vereinfacht. An die Stelle der von Hasse, Krull und Lorenzen gemachten Voraussetzung der ganzen Abgeschlossenheit der Ringe  $\Omega[\xi_1, \dots, \xi_n]$  und  $\Omega[\eta_1, \dots, \eta_n]$  tritt allerdings die etwas schärfere, daß die algebraischen Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  glatt sein sollen.

Auf Grund der hier entwickelten Begriffe können wir nun die Hasseschen Sätze I, II, III so formulieren :

18.1. Sind  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{A}$  zwei feste Gruppen von  $g$  Punkten auf  $\Gamma$ , ist  $\mu$  ein Multiplikator,  $\mathfrak{Y}$  eine allgemeine Punktgruppe und  $\mathfrak{X}$  durch

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{D}} \sim^\mu \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}} \quad (3)$$

definiert, so bleibt diese Äquivalenz bei jeder relationstreuen Spezialisierung  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$  erhalten :

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} \sim^\mu \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}} \quad (4)$$

18.2. Jede relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  läßt sich zu  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$  fortsetzen, wobei nach 18.1 wieder (4) gilt.

18.3. Jede relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Q}$  läßt sich zu  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$  fortsetzen. Ist dabei  $\mathfrak{P}$  regulär, so ist  $\mathfrak{P}$  durch (4) eindeutig bestimmt.

*Beweis.* 18.1 folgt unmittelbar aus § 17. Sodann sind 18.2 und 18.3 nach 1.4 selbstverständlich.

Daß die Hassesche Formulierung dieser Sätze erheblich komplizierter ist, liegt daran, daß Hasse die Paare  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$  nicht direkt durch relationstreue Spezialisierung definiert, sondern von  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  zuerst auf den „darin steckenden Punkt“  $\mathfrak{X}^* \rightarrow \mathfrak{P}^*$  und von da aus erst auf den davon „induzierten Punkt“  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Q}$  übergeht. Sein Ansatz zwingt ihn dazu, da  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  nicht von einer gemeinsamen Transzendenzbasis abhängig sind und somit die Krull-Lorenzensche Zerlegungstheorie der „Punkte“ nicht ohne weiteres auf  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  anwendbar ist. Aus diesem Grunde wird ein  $\mathfrak{X}^*$  zwischengeschoben, das von derselben Transzendenzbasis ganz abhängig ist wie  $\mathfrak{X}$ , und von welchem  $\mathfrak{Y}$  seinerseits rational abhängt. In unserem Aufbau ist das nicht nötig.

Wir wollen zum Schluß noch kurz zeigen, daß unsere Sätze 18.1 bis 3 tatsächlich dasselbe leisten wie die entsprechenden Sätze von Hasse, indem wir dieselben Folgerungen daraus ziehen. Der Multiplikator  $\mu$  sei *regulär*, d. h. die durch (3) definierte Punktgruppe  $\mathfrak{X}$  habe ebenso wie die allgemeine Punktgruppe  $\mathfrak{Y}$  den Transzendenzgrad  $g$ . Dann ist  $\mathfrak{X}$  auch regulär, also durch (3) eindeutig bestimmt. Da  $\mathfrak{X}$  rational von  $\mathfrak{Y}$  abhängt und beide denselben Transzendenzgrad haben, so hängt  $\mathfrak{Y}$  umgekehrt algebraisch von  $\mathfrak{X}$  ab, und bei gegebenem allgemeinem  $\mathfrak{X}$  gibt es nur endlich viele Lösungen  $\mathfrak{Y}$  von (3). Das kann man auch so formulieren: Die Gleichung

$$X = \mu Y \quad (5)$$

hat, wenn  $X$  eine allgemeine Nullklasse ist, nur endlich viele Lösungen. Die Anzahl dieser Lösungen ist der reduzierte Körpergrad  $n = n(\mu)$  von  $\Omega(\mathfrak{Y})$  über  $\Omega(\mathfrak{X})$ . Ist  $\Omega(\mathfrak{Y})$  separabel über  $\Omega(\mathfrak{X})$ , so ist der reduzierte Körpergrad  $n(\mu)$  gleich dem Körpergrad  $N(\mu)$ .

Die Lösungen von (5) gehen aus einer einzigen Lösung  $Y$  durch Multiplikation mit den Lösungen der Gleichung

$$1 = \mu D \quad (6)$$

hervor. Also hat diese Gleichung ebenfalls genau  $n(\mu)$  Lösungen.

Nach 18.2 ist die Gleichung

$$A = \mu B \quad (7)$$

bei gegebener Nullklasse  $A = \left\{ \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}} \right\}$  stets lösbar. Da ihre Lösungen aus einer einzigen durch Multiplikation mit den Lösungen von (6) hervorgehen, so hat die Gleichung (7) stets genau  $n(\mu)$  Lösungen  $B_1, \dots, B_n$ .

Wählt man nun bei gegebenem  $A$  und  $\mathfrak{Q}$  den Divisor  $\mathfrak{A}$  so, daß die Klassen  $B_1 \mathfrak{A}, \dots, B_n \mathfrak{A}$  alle regulär sind, so sind die Repräsentanten  $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n$  dieser Klassen eindeutig bestimmt, und die Gleichung (4) hat nur endlich viele Lösungen  $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n$ . Die Voraussetzungen unserer „Zerlegungstheorie“ sind dann anwendbar: die relationstreue Spezialisierung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{P}$  ist eindeutig zu  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_n) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n)$  fortsetzbar, die  $\mathfrak{Q}$  zerfallen in  $r$  Klassen zu je  $f$  konjugierter  $\mathfrak{Q}_i$  mit der Vielfachheit  $e$ . Nach 18.2 kommt aber jede von den  $n$  verschiedenen Lösungen der Gleichung (4) unter diesen  $\mathfrak{Q}_i$  vor. Also muß die Vielfachheit  $e = 1$  sein.

Damit sind alle Ergebnisse von Hasse § 7, 3—4 neu hergeleitet, und zwar sehr viel einfacher als bei Hasse.

(Eingegangen den 22. Oktober 1946.)