

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1947)

Artikel: Über einen Satz aus der Theorie der Kristallklassen.
Autor: Bähler, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18051>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über einen Satz aus der Theorie der Kristallklassen

Von F. BÄBLER, Zürich

Die vorliegende Note enthält einen elementaren Beweis des folgenden Satzes: *Existiert eine beliebige reelle Matrix T , welche zwei orthogonale Matrizen A und B ineinander transformiert, so gibt es auch eine reelle orthogonale Matrix S , die dasselbe tut. S hängt nur von T ab.*

Der Satz spielt eine wesentliche Rolle bei der Einteilung der Kristallklassen. Eine jede solche Klasse kann nämlich durch eine Anzahl (n) orthogonaler Matrizen dargestellt werden. Sei A_1, A_2, \dots, A_n eine solche Klasse, B_1, B_2, \dots, B_n eine zweite ($A_\nu A'_\nu = B_\nu B'_\nu = E$, $\nu = 1, 2, \dots, n$). Ferner existiere eine reelle Matrix T , so daß $T^{-1}A_\nu T = B_\nu$ für alle ν gilt. Dann heißen die beiden Klassen äquivalent. Der obige Satz führt jetzt unmittelbar zum folgenden Theorem:

Sind zwei Kristallklassen reell äquivalent, so sind sie auch reell-orthogonal äquivalent. Mit andern Worten: Aus T reell und $T^{-1}A_\nu T = B_\nu$ folgt die Existenz von S reell, mit $SS' = E$ und $S'A_\nu S = B_\nu$ für alle ν .

Zum Beweis dieses Theorems benutzt man meistens ein bekanntes, von Frobenius stammendes Verfahren. Das folgende besteht in einer Vereinfachung dieses Verfahrens, indem von den dort verwendeten Mitteln nur der elementare Matrizenkalkül benutzt wird.

Der Kern des Beweises besteht im Nachweis der Tatsache, daß alle A_ν mit $TT' = P$ und mit einer Wurzel Q der Matrixgleichung $Q^2 = P$ vertauschbar sind. Die transformierende orthogonale Matrix ist dann $S = Q^{-1}T$.

Sei $A = (a_{ik})$ eine n -reihige quadratische Matrix, A' wie üblich ihr Spiegelbild an der Hauptdiagonale und $AA' = E$; B ebenfalls quadratisch mit gleicher Zeilenzahl und $BB' = E$; $T = (t_{ik})$ reell und quadratisch, so daß gilt $T^{-1}AT = B$. Daraus folgt

$$T^{-1}ATT'A'T^{-1'} = BB' = E .$$

Durch Multiplikation mit T von links, T' und A von rechts, in dieser Reihenfolge, gewinnt man daraus die Gleichung

$$ATT' = TT'A \quad \text{oder} \quad AP = PA . \quad (\text{I})$$

Die Matrix $TT' = P$ ist aber Matrix einer definit positiven quadratischen Form. In der Doppelsumme:

$$\sum_1^n \mu \left[\sum_1^n \nu t_{\nu\mu} x_\nu \right]^2 = \sum_1^n \mu \sum_{i,k=1}^n t_{i\mu} t_{k\mu} x_i x_k$$

ist nämlich der Faktor von $x_i x_k = \sum_1^n \mu t_{i\mu} t_{k\mu}$ für jedes Wertepaar i, k .

Das ist gerade das Element p_{ik} in der Matrix $TT' = P = (p_{ik})$. Nun sei O die reelle orthogonale Matrix, welche P auf Diagonalform transformiert

$$O'PO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Wegen der Definitheit gilt $\lambda_i > 0$ für alle i . Der Transformation mit O werden auch T, A, B unterworfen. Sei

$$O'TO = \bar{T}; \quad O'AO = \bar{A} = (\bar{a}_{ik}); \quad O'BO = \bar{B} .$$

Es ist $\bar{A}\bar{A}' = O'AOO'A'O = O'AA'O = E$, desgl. $\bar{B}\bar{B}' = E$, ferner

$$\bar{T}^{-1}\bar{A}\bar{T} = O'T^{-1}OO'A'O'TO = O'T^{-1}ATO = O'BO = \bar{B} .$$

Aus $\bar{T}^{-1}\bar{A}\bar{T}\bar{T}'\bar{A}'\bar{T}^{-1'} = \bar{B}\bar{B}' = E$ folgt wie oben für TT'

$$\bar{A}\bar{T}\bar{T}' = \bar{T}\bar{T}'\bar{A} . \quad (\text{I}')$$

Setzt man noch $\bar{T}\bar{T}' = O'PO = \bar{P}$, so kann man statt I' schreiben

$$\bar{A}\bar{P} = \bar{P}\bar{A} . \quad (\text{I}'')$$

Die Diagonalmatrix \bar{Q} mit den Elementen $\sqrt{\lambda_i}$ genügt der Gleichung

$$\bar{Q}^2 = \bar{P} .$$

\bar{Q}^{-1} ist die Diagonalmatrix mit den Elementen $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$. Es gilt

$$\bar{A} \bar{Q} = \bar{Q} \bar{A} \quad \text{und} \quad \bar{A} \bar{Q}^{-1} = \bar{Q}^{-1} \bar{A} . \quad (*)$$

Aus $\bar{P} \bar{A} = \bar{A} \bar{P}$ folgt nämlich $\lambda_i \bar{a}_{i\kappa} = \lambda_\kappa \bar{a}_{i\kappa}$. Gilt $\lambda_i = \lambda_\kappa$, so ist $\bar{a}_{i\kappa}$ nur den Einschränkungen unterworfen, welche aus der Orthogonalität folgen. $\lambda_i \neq \lambda_\kappa$ zieht $\bar{a}_{i\kappa} = 0$ nach sich. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, da ja mit $\lambda_i = \lambda_\kappa$ bzw. $\lambda_i \neq \lambda_\kappa$ auch $\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_\kappa}$ bzw. $\sqrt{\lambda_i} \neq \sqrt{\lambda_\kappa}$ gilt.

Nun bilde man $Q = O \bar{Q} O'$, also $Q^{-1} = O \bar{Q}^{-1} O'$ und $S = Q^{-1} T$, also $S' = T' \cdot Q^{-1}$. S ist reell.

Dann gilt

$$\begin{aligned} S S' &= Q^{-1} T T' Q^{-1} = O \bar{Q}^{-1} O' O \bar{T} O' O \bar{T}' O' O \bar{Q}^{-1} O' = \\ &= O \bar{Q}^{-1} \bar{T} \bar{T}' Q^{-1} O' = O \bar{Q}^{-1} \bar{Q}^2 \bar{Q}^{-1} O' = E . \end{aligned}$$

S ist orthogonal. Transformiert man A mit S , so erhält man

$$\begin{aligned} S^{-1} A S &= T^{-1} Q A Q^{-1} T = O \bar{T}^{-1} O' O \bar{Q} O' O \bar{A} O' O \bar{Q}^{-1} O' O \bar{T} O' = \\ &= O \bar{T}^{-1} \bar{Q} \bar{A} \bar{Q}^{-1} \bar{T} O' = O \bar{T}^{-1} \bar{A} \bar{T} O' \quad (\text{wegen } (*)) \\ &= O \bar{B} O' = B , \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(Eingegangen den 18. November 1946.)