

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1947)

**Artikel:** Hyperkomplexe Differentiale.  
**Autor:** Haefeli, Hans Georg  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18068>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Hyperkomplexe Differentiale

Von HANS GEORG HAEFELI, Rom

Herr *Rud. Fueter* und seine Schüler haben in mehreren Arbeiten die Theorie der hyperkomplexen Funktionen entwickelt. Dabei wurden zuerst der Körper der Quaternionen zugrunde gelegt, dann die Erweiterung in Cliffordsche Linear- und spezielle Produktsysteme behandelt und schließlich Argument und Funktionswert in verschiedenen Algebren betrachtet<sup>1)</sup>. Daher ist es wünschenswert, diese mannigfachen Möglichkeiten systematisch zu durchgehen. Dabei soll vor allem auf die jeweilige Regularitätsbedingung, die zuerst eine formale Übertragung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist, aber als Voraussetzung für die Gültigkeit der Integralsätze ihre wesentliche Bedeutung hat, geachtet werden. Diese kann auf eine invariante Form gebracht werden, womit die Invarianz der ihr genügenden Funktionen ersichtlich wird. Dabei zeigt sich, daß die Form des Differentials nicht nur die regulären Funktionen, sondern auch ihre Spezialisierung so weitgehend charakterisiert, daß sie geradezu definierend verwendet werden könnte. Das wird vor allem bei den Systemen von analytischen Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen, welche durch einen Integralsatz ausgezeichnet werden, und bei den Quaternionenfunktionen durchgeführt. Dabei soll die Schönheit der letztern, die die Symmetrien der Funktionen in Linear- und Produktsystemen in einer Divisionsalgebra vereinigen, zum Ausdruck kommen und das Natürliche der Begriffsbildungen hervorspringen.

## Einleitung

Bevor wir mit den eigentlichen Untersuchungen beginnen, soll kurz die Regularitätsbedingung im allgemeinen erläutert werden. Wir wollen am Beispiel der Potentialfunktionen in einem Linearsystem den Zusammenhang mit dem *äußern Differentialcalcul* aufzeigen. Dabei bietet aber gerade in diesem Fall die hyperkomplexe Schreibweise noch keine wesentliche Vereinfachung.

---

<sup>1)</sup> Siehe Seite 420.

Es sei ein Linearsystem  $\mathfrak{L}$  einer Cliffordschen Algebra  $\mathfrak{C}_n$ , wie das in I näher ausgeführt wird, gegeben.

$$\mathfrak{L} = [e_1 \dots e_n] \quad \text{mit} \quad e_h e_k = -e_k e_h \quad h \neq k \quad h, k = 1 \dots n$$

$$\text{und} \quad e_k e_k = +1 \quad k = 1 \dots n .$$

$n$  freie Variablen  $x_k$  im Körper der reellen Zahlen fassen wir zu einer hyperkomplexen Variablen  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  zusammen; ebenso bilden wir mit  $n$  Funktionen  $u_k(x_1 \dots x_n)$ , die in einem  $n$ -dimensionalen Gebiet  $H$  des euklidischen  $R^n$  zweimal partiell differenzierbar seien, eine hyper-

komplexe Funktion  $w = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ . In  $\mathfrak{L}$  definieren wir ferner einen Differentialoperator  $D = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} e_k$ , und verlangen für reguläre Funktionen :

$$D \cdot w = 0 . \quad (1)$$

Diese Regularitätsbedingung ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche man auch in eine einzige komplexe Bedingung  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (u + iv) = 0$  zusammenfassen kann. Interpretieren wir  $w$  als Vektorfunktion, so besagt (1) reell einfach :

$$\text{div } w = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot } w = 0 . \quad (1a)$$

Daraus folgt sofort die Existenz eines Potentials  $\Phi$ , so daß  $w = D\Phi$  wird, und  $\Delta\Phi = 0$ ; weiter folgt  $D \cdot \Delta\Phi = \Delta \cdot D\Phi = \Delta w = 0$ , und wegen der linearen Unabhängigkeit der  $e_k$  sofort  $\Delta u_k = 0$ . Dieses kann aber direkt aus der hyperkomplexen Form (1) geschlossen werden, denn es ist  $D \cdot D = \Delta$ . Die Komponentenfunktionen sind demnach harmonisch und durch die Existenz eines skalaren Potentials miteinander verbunden.

Daraus ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang mit dem äußern Differentialcalcul. Wir ersetzen  $e_k$  durch  $dx_k$  und fassen  $w$  als Pfaffsche Form 1. Grades auf.

$$w = \sum_{k=1}^n u_k dx_k .$$

Die Multiplikation der  $dx_k$  ist jetzt nur noch *schief*.

$$dx_h dx_k = -dx_k dx_h \quad \text{für} \quad h \neq k, \quad \text{aber} \quad dx_h dx_h = 1 . \quad h, k = 1 \dots n .$$

Damit wird

$$Dw = dw + \delta w, \quad \text{wobei} \quad \delta w = (dw^*)^* \text{ ist, } w^* \text{ die zu } w \text{ adjungierte}$$

Form bedeutet und  $d$  das äußere Differential bezeichnet. Der Differentialoperator erscheint also als Summe von  $d$  und  $\delta$  <sup>2)</sup>

$$D = d + \delta . \quad (2)$$

Ferner wird  $D \cdot Dw = d \cdot dw + d \cdot \delta w - \delta \cdot dw + \delta \cdot \delta w = d \cdot \delta w - \delta \cdot dw$ , da  $d \cdot dw = 0$  und  $\delta \cdot \delta w = 0$  werden; somit  $D \cdot D = d \cdot \delta - \delta \cdot d = \Delta$ . Die Regularitätsbedingung  $D \cdot w = 0$  zerfällt in  $dw = 0$  und  $\delta w = 0$ , was gerade die Gleichungen (1a) ergibt. Die Eleganz der hyperkomplexen Schreibweise besteht somit in der Zusammenfassung der Operatoren  $d$  und  $\delta$ ; dies ist in der angeführten Weise aber nur in affinen Räumen möglich.

Nun können natürlich eine Menge Integralformeln abgeleitet werden, welche alle auf den Integralsatz der Pfaffschen Formen zurückzuführen sind. Hier soll nur auf zwei besonders wichtige Fälle kurz eingegangen werden.

Es sei  $H$  ein  $n$ -dimensionales Gebiet im euklidischen  $R^n$ , das von einer zweiseitigen, sich nicht durchdringenden Hyperfläche  $R$  mit stetigem Normalenfeld  $n$  berandet wird, und  $dZ = n \cdot dr = \sum_{k=1}^n n_k e_k \cdot dr$  das Hyperflächendifferential, wo  $n$  die ins Innere gerichtete Einheitsnormale und  $dr$  das Hyperflächenelement bedeuten. Dann gilt:

$$\int_R (w n) dr = \int_H \operatorname{div} w dh \quad \text{und} \quad \int_R [w n] dr = \int_H \operatorname{rot} w dh .$$

In hyperkomplexer Schreibweise erhalten wir:

$$\int_R (w dZ + dZ w) = \int_H (w D + D w) dh \quad \text{und} \\ \int_R (w dZ - dZ w) = \int_H (w D - D w) dh .$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erfolgt:

$$\int_R w dZ = \int_H w D \cdot dh .$$

Ist nun  $w$  in  $H$  eine reguläre Funktion, gilt also  $Dw = 0$ , so gilt auch  $wD = 0$ . (Die Rotationsterme haben entgegengesetztes Vorzeichen.) Demnach wird für eine reguläre Funktion  $w$

$$\int_R w dZ = 0 .$$

Ist ferner auch  $v$  eine in  $H$  reguläre Funktion, so kann entsprechend bewiesen werden, daß auch

<sup>2)</sup> Pierre Bidal et Georges de Rham, Les formes différentielles harmoniques. Comm. Math. Helv., vol. 19, S. 9.

$$\int_R w dZ v = 0 \quad (3)$$

wird. Dies nennen wir den 1. Integralsatz; er kann als eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes aufgefaßt werden und wird in der Regel mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes hergeleitet. Aus (3) kann in unserm Fall nun  $w$  in jedem innern Punkt  $x$  von  $H$  durch ein Integral über  $R$  dargestellt werden. Wir umschließen den Aufpunkt  $x$  mit einer Hyperkugel  $K$  mit dem Rande  $R_K$  und wählen als Funktion  $v$  die mit Ausnahme  $\xi = x$  überall reguläre Funktion

$$v = [(\xi - x)^2]^{-\frac{n}{2}} (\xi - x) .$$

Dann kann im Gebiet  $H' = H - K$  der 1. Integralsatz angewendet werden.

$$\int_{R+R_K} w dZ [(\xi - x)^2]^{-\frac{n}{2}} (\xi - x) = 0 .$$

Durch bekannten Grenzübergang folgt daraus:

$$w(x) = \text{const.} \int_R w dZ [(\xi - x)^2]^{-\frac{n}{2}} (\xi - x) . \quad (4)$$

Dies bezeichnen wir im folgenden als 2. Integralsatz; er kann als Verallgemeinerung des Cauchyschen Residuensatzes betrachtet werden.

Aus dem Zusammenhang mit dem äußern Differentialcalcul ist ohne weiteres ersichtlich, warum man als Basisgrößen des hyperkomplexen Systems *Cliffordsche Einheiten* zu wählen hat. Ihre Multiplikation muß schief sein, und ihr Quadrat reell. Durch Bildung von Ableitungen können nun Pfaffsche Formen höheren Grades erzeugt werden, doch ist dann die bisherige hyperkomplexe Schreibweise keine große Erleichterung. Dafür aber läßt sie sich auf die Funktionentheorie von hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung übertragen. Dabei ist natürlich (4) neu zu formulieren<sup>3)</sup>. Weiter läßt sich die Theorie in Linearsystemen mit Haupteinheit, in Produktsystemen und Algebren entwickeln, wobei die Komponentenfunktionen von  $w$  nicht mehr immer als partielle Ableitungen eines skalaren Potentials auftreten und als Lösungen des die Regularität definierenden Systems linearer partieller

<sup>3)</sup> *Rud. Fueter* [10].

*W. Neß* [21].

Weitere Arbeiten werden bei den entsprechenden Abschnitten zitiert. Die Nummern beziehen sich auf die Zusammenstellung von Seite 420.

Differentialgleichungen 1. Ordnung uns interessieren. Da man zudem  $w$  in einem andern Linearsystem oder einer Algebra wählen kann, die nicht Cliffordsch zu sein brauchen, kann letzteres die mannigfachsten Formen besitzen. Das soll nun im folgenden näher ausgeführt werden.

## I. Funktionen in einem Linearsystem

Wir gehen von einer Cliffordschen Algebra  $\mathfrak{C}_n$  aus. Diese besteht aus den  $2^n$  Basiselementen

$$1, e_1, \dots, e_n, e_{12}, \dots, \dots, e_{12 \dots n}, \quad (5)$$

und ist durch die Relationen

$$e_h e_k = -e_k e_h \quad h, k = 1, \dots, n \quad h \neq k \quad (5a)$$

und 
$$e_k^2 = \kappa_k \cdot 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (5b)$$

vollständig bestimmt<sup>4)</sup>. Dabei ist 1 die Haupteinheit und  $\kappa_k = \pm 1$ . Die  $n$  Basisgrößen  $e_1, \dots, e_n$  bilden ein minimales Erzeugendensystem von  $\mathfrak{C}_n$ . Dies nennen wir ein Linearsystem  $\mathfrak{L}$  von  $\mathfrak{C}_n$

$$\mathfrak{L} = [e_1, \dots, e_n] . \quad (6)$$

Es sei jetzt  $a$  eine Größe aus  $\mathfrak{L}$  im Körper der reellen Zahlen, also von der Form

$$a = \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

mit reellen  $a_k$ . Wir definieren ferner

$$\tilde{a} = \sum_{k=1}^n \kappa_k a_k e_k .$$

Ferner seien auch  $b$  und  $c$  solche Größen aus  $\mathfrak{L}$ . Dann werden

$$N(a) = aa = \sum_{k=1}^n \kappa_k a_k^2, \quad 2n(a) = a\tilde{a} + \tilde{a}a = 2 \sum_{k=1}^n a_k^2,$$

$$S(ab) = ab + ba = 2 \sum_{k=1}^n \kappa_k a_k b_k, \quad s(ab) = a\tilde{b} + \tilde{b}a = 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

wegen (5a) reell, und es bleibt die multiplikative Verknüpfung

$$abc + cba = a \cdot S(bc) + c \cdot S(ab) - b \cdot S(ca)$$

im Linearsystem  $\mathfrak{L}$ . Daraus folgt als Spezialfall

$$aba = -a^2 b + a \cdot S(ab) .$$

<sup>4)</sup> Siehe auch *P. Boffhard* [14].

Wir wollen nun die hyperkomplexen Zahlen aus  $\mathfrak{Q}$  den Punkten eines affinen,  $n$ -dimensionalen Raumes  $R^n$  mit *doppelter Metrik* zuordnen. Dazu erweitern wir unser Linearsystem  $\mathfrak{Q}$  und ordnen den Zahlen  $\sum_{k=1}^{n+1} x_k e_k = x + x_{n+1} e_{n+1}$  die Punkte  $P(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$  des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes  $P^n$  zu. Dabei sei  $x$  in  $\mathfrak{Q}$ , und  $e_{n+1}$  genüge den Relationen

$$e_{n+1}^2 = \varepsilon, \quad \text{und} \quad e_{n+1} e_k = -e_k e_{n+1} \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, n.$$

In  $P^n$  führen wir im *Klein-Cayleyschen* Sinn eine Metrik ein, indem wir in einem projizierten Koordinatensystem die quadratische Hyperfläche

$$(x + x_{n+1} e_{n+1})^2 = \sum_{k=1}^n \kappa_k x_k^2 + \varepsilon x_{n+1}^2 = 0$$

als fundamental auszeichnen. Sind nicht alle  $\kappa_k$  positiv, was wir im folgenden annehmen, so erhalten wir eine hyperbolische Metrik. Den Punkten  $P_a(a_1 : \dots : a_{n+1})$  und  $P_b(b_1 : \dots : b_{n+1})$  wird die Entfernung  $E_N$  zugeordnet

$$E_N(P_a P_b) = \text{c. i. arc cos} \frac{S(ab) + 2\varepsilon a_{n+1} b_{n+1}}{2\sqrt{(a^2 + \varepsilon a_{n+1}^2)(b^2 + \varepsilon b_{n+1}^2)}}. \quad 5)$$

Nun lassen wir die Fundamentalhyperfläche einmal ausarten, indem wir  $\varepsilon \rightarrow \infty$  streben lassen. Dann wird  $x_{n+1} = 0$  zur unendlichfernen Hyperebene, in welcher die ausgeartete Fundamentalhyperfläche

$$x^2 = \sum_{k=1}^n \kappa_k x_k^2 = 0 \quad (7)$$

liegt. Für die Entfernung von  $P_a$  und  $P_b$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(P_a P_b) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} E_N = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \text{c. i. arc sin} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{4a^2 b^2 - \frac{S^2(ab)}{\varepsilon} + 4a^2 b_{n+1}^2 + 4b^2 a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} b_{n+1} S(ab)}}{2\sqrt{\left(\frac{a^2}{\varepsilon} + a_{n+1}^2\right)\left(\frac{b^2}{\varepsilon} + b_{n+1}^2\right)}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \text{i.} \sqrt{\frac{a^2}{a_{n+1}^2} + \frac{b^2}{b_{n+1}^2} - \frac{S(ab)}{a_{n+1} b_{n+1}}} = + \sqrt{\left(\frac{a}{a_{n+1}} - \frac{b}{b_{n+1}}\right)^2}, \end{aligned}$$

wenn wir die Maßkonstante  $c$  rein imaginär wählen und so gegen  $\infty$  streben

---

<sup>5)</sup> Entsprechende Ableitung wie bei *H. G. Haefeli* [16], wo die Formel für Quaternionen hergeleitet wird.

lassen, daß  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot i = +1$  wird. Damit wird der projektive Raum  $P^n$  zu einem affinen Raum  $R^n$  mit einmal ausgearteter nichteuklidischer Metrik. Seine Punkte sind den hyperkomplexen Zahlen aus  $\mathcal{Q}$  eindeutig zugeordnet, wenn wir deren Komponenten als affine Koordinaten auffassen. Den Basiselementen von  $\mathcal{Q}$  entsprechen die Einheitspunkte auf den Axen des affinen Koordinatensystems, in welches das projektive übergegangen ist. Die eingeführte Metrik bezeichnen wir als die „zum Linearsystem  $\mathcal{Q}$  gehörende“ Metrik. Für die Entfernung zweier Punkte  $P_a$  und  $P_b$  erhalten wir:

$$E(P_a P_b) = +\sqrt{(a-b)^2} = +\sqrt{N(a-b)} . \quad (8)$$

$E$  kann reell, null oder rein imaginär werden. Die Gesamtheit der Punkte  $P$ , die von einem festen Punkt  $P_a$  verschwindenden Abstand haben, liegt auf dem zu  $P_a$  gehörenden isotropen Kegel, den wir auch Nullkegel nennen. Dieser trennt den Bereich der Punkte mit reellem Abstand von  $P_a$  vom Bereich der Punkte, welche von  $P_a$  einen rein imaginären Abstand besitzen. Die Winkelmessung ist im  $R^n$  nicht ausgeartet und kann auf das Messen der nichteuklidischen Entfernung der zu den Richtungen gehörenden unendlichfernen Punkte zurückgeführt werden. Fassen wir  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  als Vektoren vom Ursprung nach den Punkten  $P_a$  und  $P_b$  auf, so beträgt ihr Winkel:

$$W(ab) = \arccos \frac{S(ab)}{2\sqrt{N(a)N(b)}} , \text{ wenn nicht zugleich } N(a) = 0 \text{ und } N(b) = 0 \text{ ist.} \quad (9)$$

Dabei haben wir  $c = \frac{i}{2}$  gewählt, um bei lauter positiven  $\kappa_k$  mit der euklidischen Winkelmessung übereinzustimmen. Der Winkel  $W(ab)$  <sup>6)</sup> wird reell zwischen 0 und  $2\pi$ , wenn die durch  $a$  und  $b$  aufgespannte Ebene  $E$  den Nullkegel nicht schneidet, rein imaginär zwischen 0 und  $\infty$ , wenn  $E$  den Nullkegel schneidet und  $a$  und  $b$  demselben Bereich angehören, und sonst komplex; berührt  $E$  den Nullkegel, so wird  $W(ab)$  unbestimmt, wie auch, wenn sowohl  $a$  wie  $b$  auf Erzeugenden des Nullkegels liegen, während er  $\infty$  wird, wenn nur eine der beiden Größen auf einer Erzeugenden liegt. Daraus folgt speziell, daß unser affines Koordinatensystem rechtwinklig ist. Gleichzeitig denken wir uns im  $R^n$  auch die gewöhnliche euklidische Metrik eingeführt. Die entsprechenden For-

---

<sup>6)</sup> Wenn keine Verwechslung möglich ist, soll fortan mit  $a$  sowohl die hyperkomplexe Zahl, wie der Punkt  $P_a$  oder der Vektor  $\vec{a}$  bezeichnet werden.

meln für Entfernung und Winkel können aus (8) und (9) übernommen werden, da für lauter positive  $\kappa_k$  die euklidische Metrik zu  $\mathcal{Q}$  gehört.

$$e(ab) = \sqrt{n(a-b)} \quad ; \quad w(ab) = \arccos \frac{s(ab)}{2\sqrt{n(a)n(b)}} . \quad (10)$$

Damit haben wir die Möglichkeit, dort, wo die nichteuklidische Metrik unbestimmt wird, euklidisch zu messen; zudem werden wir analytische Verhältnisse bald in der einen, bald in der andern Metrik einfacher deuten können. In diesem affinen  $R^n$  wollen wir nun die hyperkomplexen Funktionen erklären; in einem spätern Ausbau der Theorie müssen die Punkte der unendlichfernen Hyperebene identifiziert werden, doch brauchen wir hier bei den Untersuchungen über die Differentialform nicht näher darauf einzugehen <sup>7)</sup>.

In  $R^n$  sei ein zusammenhängender Bereich  $H$ , der auch mit  $R^n$  identisch sein kann, gegeben. Seinem allgemeinen Punkt  $P$  sei die hyperkomplexe Zahl

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

aus  $\mathcal{Q}$  zugeordnet.

In  $H$  seien  $n$  Funktionen  $u_k(x_1, \dots, x_n)$  erklärt, die wir zweimal nach  $x_k$  partiell differenzierbar voraussetzen, und in  $\mathcal{Q}$  zu einer hyperkomplexen Funktion

$$w = \sum_{h=1}^n u_h e_h$$

zusammenfassen. Wir verlangen ferner, daß die Funktionaldeterminante in  $H$  nicht identisch verschwinde

$$\left| \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right| \neq 0 \quad \text{in } H .$$

Wir erklären und bezeichnen die partielle Ableitung von  $w$  nach  $x_k$  wie folgt:

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = w^{(k)} = \sum_{h=1}^n u_h^{(k)} e_h = \sum_{h=1}^n \frac{\partial u_h}{\partial x_k} e_h .$$

In  $\mathcal{Q}$  definieren wir jetzt den Differentialoperator  $D$

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} e_k .$$

Nun bezeichnen wir diejenigen Funktionen, welche der Bedingung

$$Dw = 0 \quad (11)$$

---

<sup>7)</sup> Siehe *Rud. Fueter* [8].

genügen, als „reguläre“ Funktionen. (11) ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, wie einleitend gezeigt wurde, und mit

$$wD = 0 \quad (11a)$$

äquivalent. In  $\mathfrak{Q}$  sind somit die regulären Funktionen immer beidseitig regulär. (11) zerfällt reell in ein System von  $\frac{n^2 - n + 2}{2}$  linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die wir in vektorieller Schreibweise folgendermaßen zusammenfassen können:

$$\operatorname{div} \tilde{w} = 0 \quad (11b)$$

und 
$$\operatorname{rot} w = 0 \quad (11c)$$

Daraus folgt sofort die Existenz einer skalaren Größe  $\Psi$ , so daß  $w = D\Psi$  wird. Wegen (5a, 5b) wird  $D \cdot D = Q = \sum_{k=1}^n \kappa_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  ein reeller Differentialoperator. Daher wird  $\Psi$  ein Integral der Differentialgleichung

$$Qu = \sum_{k=1}^n \kappa_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \quad (12)$$

Da (12) vom hyperbolischen Typus ist, nennen wir  $\Psi$  ein skalares Potential im weitern Sinn. Weiter folgt  $Qw = D \cdot Dw = 0$  und damit wegen der linearen Unabhängigkeit der  $e_k$  sofort  $Qu_k = 0$ . Die Komponenten von  $w$  sind somit Integrale von (12) und als partielle Ableitungen eines ebensolchen untereinander verknüpft.

Umgekehrt kann jede lineare homogene partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch eine lineare Variablentransformation auf die Form

$$\sum_{k=1}^n \kappa_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \kappa_k = +1 & \text{für } k = 1, \dots, \nu, \quad \text{und} \\ \kappa_k = -1 & \text{für } k = \nu + 1, \dots, n \end{array} \quad (13)$$

gebracht werden. Da nun nach (5a)  $\kappa_k$  beliebig  $+1$  oder  $-1$  gewählt werden kann, gibt es zu jeder Differentialgleichung vom Typus (13) ein zugehörendes *Linearsystem*  $\mathfrak{Q}$  und im affinen  $R^n$  eine zu diesem *gehörende Metrik*. Jede reguläre Funktion  $w$  liefert  $n$  Lösungen von (13), und jede kann auf diese Weise erhalten werden<sup>8)</sup>. In diesem Sinn kann die Theorie der regulären Funktionen als *Funktionentheorie der Differentialgleichung* (13) aufgefaßt werden.

---

<sup>8)</sup> W. Nef [21].

Aus (11) ist nicht ohne weiteres ersichtlich, bei welchen Koordinatentransformationen eine reguläre Funktion regulär bleibt. Dies wird aber aus der Form des Differentials sofort hervorgehen. Ist eine Funktion  $w$  in jedem Punkt von  $H$  regulär, so nennen wir  $H$  einen Regularitätsbereich von  $w$ . Insbesondere bezeichnen wir einen Punkt  $P$  von  $H$  regulär, wenn die Funktionaldeterminante in  $P$  nicht verschwindet. Die durch  $w$  vermittelte Abbildung des Regularitätsbereiches  $H$  auf einen Bildbereich  $H'$  ist daher in regulären Punkten topologisch. Wir beschränken uns in den nachfolgenden Ausführungen immer auf reguläre Punkte.

Unter dem totalen Differential  $dw = \sum_{k=1}^n w^{(k)} dx_k$  <sup>9)</sup> verstehen wir den

Zuwachs von  $w$ , wenn sich  $x$  um  $dx = \sum_{k=1}^n dx_k e_k$  verändert. Ist  $w$  eine reguläre Funktion, so hat  $dw$  wegen (11) eine spezielle Form. Diese soll nun in einem regulären Punkt berechnet werden. Wir nehmen zur Vereinfachung der Darstellung an, daß der Ursprung 0 ein regulärer Punkt sei, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit geschehen kann, und schreiben:

$$dw = \sum_{h,k=1}^n A_h^k e_h dx_k, \quad \text{wobei} \quad A_h^k = u_h^{(k)}(0) \text{ bedeutet.}$$

Die Regularitätsbedingung besagt nun, daß die reelle Matrix  $(A_h^k)$  der infinitesimalen Abbildung symmetrisch ist.

$$A_h^k = A_k^h. \quad h, k = 1, \dots, n.$$

Daher existiert in 0 ein euklidisch rechtwinkliges Koordinatensystem, in welchem diese Matrix Diagonalform besitzt

$$(A_h^k) \rightarrow (B_h^k). \quad B_h^k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq h.$$

Auf jeder Axe dieses Koordinatensystems liege eine der hyperkomplexen Zahlen  ${}^\alpha m$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Diese seien so normiert, daß  $2\sigma_\alpha n({}^\alpha m) = B_\alpha^\alpha$  wird;  $\sigma_\alpha$  legt das Vorzeichen fest.

Wegen (11b) muß ferner die nichteuklidische Spur der Abbildungsmatrix verschwinden.

Wir erhalten somit für das Differential einer regulären Funktion:

<sup>9)</sup> Eine Verwechslung mit dem äußern Differential ist nicht zu befürchten, da von letzterm nur in der Einleitung gesprochen wird.

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} {}^{\alpha}m s({}^{\alpha}m dx) \quad (14)$$

mit der Nebenbedingung  $\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} N({}^{\alpha}m) = 0$  .

Da  $s({}^{\alpha}m dx) = {}^{\alpha}m d\tilde{x} + d\tilde{x} {}^{\alpha}m$  ist, so erhalten wir bei Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} {}^{\alpha}m d\tilde{x} {}^{\alpha}m \quad (15)$$

Die Transformation  $x' = \tilde{x}$  bedeutet Spiegelung an der Koordinatenhyperebene  $E_{\nu}$ , die von den ersten  $\nu$  Koordinatenachsen aufgespannt wird.

Die Transformation  $x' = a x a$  bedeutet nichteuklidische Spiegelung und Streckung an der Geraden  $\lambda a$ ;  $\lambda$  reeller Parameter.

Aus diesen beiden Transformationen setzt sich  $dw$  zusammen, und es gilt :

**1. Satz.** *Die durch eine reguläre Funktion vermittelte Abbildung der Umgebung eines regulären Punktes setzt sich aus  $n$  Streckspiegelungen, denen eine Spiegelung an der Koordinatenhyperebene  $E_{\nu}$  vorangegangen ist, an  $n$  orthogonalen Richtungen zusammen; dabei verschwindet die Summe der nichteuklidisch gemessenen Streckenverhältnisse.*

Um nun die Koordinatentransformation zu finden, denen gegenüber die Regularitätsbedingung invariant bleibt, brauchen wir nur diejenigen Transformationen zu suchen, welche die Form (15) des Differentials nicht zerstören. Dabei zeigt sich, daß wir  $w$  als Funktion von  $\tilde{x}$  aufzufassen haben. Wir transformieren :

$$\tilde{x} = a \tilde{x}' a + b ; \quad w = a w' a + c . \quad (16)$$

Dann folgt sofort  $dw' = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} {}^{\alpha}m' dx' {}^{\alpha}m'$  mit  ${}^{\alpha}m' = \frac{1}{a^2} (a {}^{\alpha}m a)$ . Die  ${}^{\alpha}m'$  gehen aus den  ${}^{\alpha}m$  durch nichteuklidische Spiegelungen hervor und bilden deshalb kein orthogonales System mehr. Sie liegen daher nicht mehr auf den zu der infinitesimalen Abbildung gehörenden Eigenvektoren. Hingegen ist  $w'$  wegen  $\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} N({}^{\alpha}m') = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} N({}^{\alpha}m) = 0$  immer noch regulär. Die Orthogonalität der Spiegelachsen ist somit für die Regularität nicht wesentlich, und besagt nur, daß die Form (15) auf Hauptachsen bezogen ist. Die Transformation (16) kann nun beliebig oft ausgeführt werden. Wird dabei noch normiert, so erhält man gerade die

nichteuklidisch orthogonalen Koordinatentransformationen. Andere Transformationen lassen (11b) nicht invariant, und es gilt:

**2. Satz.** Wird auf die reguläre Funktion  $w$  und die gespiegelte Variable  $\tilde{x}$  dieselbe nichteuklidisch orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, so ist die Funktion  $w'(\tilde{x}')$  im transformierten Bereich wieder regulär.

Aus der Regularitätsbedingung ist ohne weiteres ersichtlich, daß die regulären Funktionen einen reellen Modul bilden, aber keinen Ring; auch dürfen weder  $\tilde{x}$  noch  $w$  einzeln transformiert werden.

Um die geometrische Bedeutung der metrischen Bedingung der Streckverhältnisse zu finden, ersetzen wir die *orthogonalen* Spiegelachsen durch *supplementäre*. Wir wollen aber bei der Umformung des Differential (15) voraussetzen, daß die Matrix  $(B_h^k)$  lauter positive Eigenwerte besitzt, daß also alle  $\sigma_\alpha = +1$  sind; das ist nur im hyperbolischen Fall mit der Nebenbedingung von (14) verträglich. Wir betrachten den Beitrag zweier Glieder der Differentialform (14) und suchen zwei neue Richtungen, so daß identisch gilt:

$$B \equiv {}^1m s({}^1m dx) + {}^2m s({}^2m dx) \equiv {}^1a s({}^1a dx) + {}^2a s({}^2a dx) . \quad (17)$$

Beschreibt  $dx$  eine euklidische Hyperkugel, so beschreibt  $B$  eine Ellipse  $E_1$  mit den Hauptachsen  $2n({}^1m)$  und  $2n({}^2m)$ .  ${}^1a$  und  ${}^2a$  müssen daher in der von  ${}^1m$  und  ${}^2m$  aufgespannten Ebene liegen

$${}^1a = r_{11} {}^1m + r_{12} {}^2m ,$$

$${}^2a = r_{21} {}^1m + r_{22} {}^2m .$$

Notwendig und hinreichend für die Identität (17) ist nun die Orthogonalität der Matrix  $(r_{ik})$ . Wir können somit die Richtung von  ${}^1a$  beliebig wählen; dann ist die Länge von  ${}^1a$  und Richtung und Länge von  ${}^2a$  bestimmt. Wir nennen  ${}^1a$  und  ${}^2a$  zwei in bezug auf die Ellipse  $E_1$  *supplementäre* Richtungen, da der von ihnen eingeschlossene Winkel zu demjenigen der beiden  $x$ -Richtungen, deren Bilder  ${}^1a$  und  ${}^2a$  sind, supplementär ist. Seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Winkel, welche  ${}^1a$  und  ${}^2a$  mit der Hauptachse  ${}^1m$  bilden, so gilt:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{n({}^2m)}{n({}^1m)} .$$

Somit sind zwei in bezug auf eine Ellipse  $E_1$  supplementäre Richtungen immer *konjugierte* Richtungen in bezug auf eine Ellipse  $E_2$ , deren Hauptachsenrichtungen mit denen von  $E_1$  zusammenfallen, und deren Axenlängen die Quadratwurzeln der Axenlängen von  $E_1$  sind. Zwei supple-

mentäre Richtungen bestimmen daher eine Ellipse eindeutig. Nun wählen wir  ${}^1a$  so, daß  $N({}^1a) = 0$  wird.  ${}^1a$  liegt dann auf einer der beiden Schnittgeraden der Ellipsenebene mit dem Nullkegel. Dieser ist der zum Punkt 0 gehörige charakteristische Kegel der Differentialgleichung (13). Wir bezeichnen dieses  ${}^1a$  mit  ${}^1n$ . Dann wird

$${}^1n s ({}^1n dx) = {}^1n d\tilde{x} {}^1n$$

eine reguläre Abbildung vom Range 1

$$\sum_{h=1}^n {}^1n [s(n dx)]^{(h)} e_h = 2{}^1n \cdot {}^1n = 0 .$$

Jetzt verfahren wir mit  ${}^2as({}^2adx) + {}^3ms({}^3mdx)$  genau gleich, usw., bis nur noch eine einzige Richtung  ${}^na$  übrigbleibt, die nicht auf dem Nullkegel liegt. Dann hat  $dw$  die Form :

$$dw = \sum_{\alpha=1}^{n-1} {}^\alpha n d\tilde{x} {}^\alpha n + {}^n a s ({}^n a dx) .$$

Da die  $n - 1$  ersten Glieder regulär sind, muß das letzte für sich auch regulär sein ; dann muß aber  ${}^n a \cdot {}^n a = 0$  sein, d. h.  ${}^n a$  auch auf dem Nullkegel liegen. Damit ist gezeigt :

**3. Satz.** *Bildet die Funktion  $w$  eine infinitesimale Hyperkugel um den Punkt  $P$  so auf ein Hyperellipsoid ab, daß dasselbe  $n$  supplementäre Richtungen auf dem charakteristischen Kegel besitzt, so ist die Funktion  $w$  im Punkte  $P$  regulär.*

Das Differential hat damit die Form

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n {}^\alpha n d\tilde{x} {}^\alpha n , \quad (18)$$

wo aber die Komponenten  ${}^\alpha n_x$  nicht immer reell sein werden. Entsprechend könnte man im Fall negativer Eigenwerte, der ja durch Spiegelung aus obigem hervorgeht, verfahren ; die supplementären Richtungen würden dann *konforme* Richtungen, doch müßten gewisse Fälle, bei denen die letztern unbestimmt werden, ausgeschlossen werden. Mit diesen Ausnahmen kann Satz 3 auf den elliptischen Fall  $\nu = n$  übertragen werden, wo natürlich der Nullkegel selber imaginär wird.

Da die einzelnen Beiträge der Differentialform (15) wohl vom Range  $n$ , aber nicht regulär sind, diejenigen der Form (18) regulär, aber vom Range 1 sind, soll abschließend kurz auf die einfachsten regulären Abbildungen vom Range  $n$  eingegangen werden. Diese werden lineare Funktionen von  $x$  sein.

$$a \tilde{x} a = - a^2 \tilde{x} + a s (a x) . \quad (19)$$

$$\sum_{h=1}^n [a \tilde{x} a]^{(h)} e_h = (2 - n)a^2 \quad \text{regulär für } n = 2 .$$

$$ba \tilde{x} ab = a^2 b^2 \tilde{x} - a^2 b s(bx) - b^2 a s(ax) + bS(ab)s(ax) . \quad (20)$$

$a$  und  $b$  sollen nichteuklidisch senkrecht sein, also  $S(ab) = 0$ . Dann wird

$$\sum_{h=1}^n [ba \tilde{x} ab]^{(h)} e_h = a^2 b^2 (n - 4) \quad \text{regulär für } n = 4 .$$

$$cba \tilde{x} abc \quad \text{mit } S(ab) = S(bc) = S(ca) = 0 .$$

$$\sum_{h=1}^n [cba \tilde{x} abc]^{(h)} e_h = (6 - n)a^2 b^2 c^2 \quad \text{regulär für } n = 6 .$$

So erhält man für alle geraden Dimensionen lineare reguläre Abbildungen, die als Produkte von nichteuklidischen Spiegelungen konform sind.

**4. Satz.** *Zu jeder geraden Dimension  $n = 2m$  gibt es in der zur Differentialgleichung gehörenden Metrik konforme reguläre Abbildungen; diese werden durch  $m$ -fache Streckspiegelungen an  $m$  senkrechten Richtungen erhalten.*

Durch Kombination erhält man lineare reguläre Abbildungen zu jeder Dimension  $n$ , z. B.:

$$a \{ (n - 4)b^2 \tilde{x} + (n - 2)b \tilde{x} b \} a .$$

Im Falle  $n = 4$  kann  $dw$  immer durch regulärkonforme Bestandteile dargestellt werden, da wegen  $S(a \tilde{b}) = s(ab)$  nichteuklidische Orthogonalität immer auf euklidische zurückgeführt werden kann. Dieser Fall interessiert uns wegen der spätern Spezialisierung auf Quaternionen. Man erhält nach einfacher Rechnung:

$$dw = {}^1k {}^1\tilde{m} (\sigma_2 {}^2m d\tilde{x} {}^2m + \sigma_3 {}^3m d\tilde{x} {}^3m + \sigma_4 {}^4m d\tilde{x} {}^4m) {}^1\tilde{m}$$

$$+ {}^2k {}^1\tilde{m} {}^3m d\tilde{x} {}^3m {}^1\tilde{m} + {}^3k {}^1m {}^2\tilde{m} d\tilde{x} {}^2\tilde{m} {}^1m + {}^4k {}^2\tilde{m} {}^3m d\tilde{x} {}^3m {}^2\tilde{m} \quad (21)$$

wobei die Konstanten

$${}^1k = \frac{-1}{N({}^1m)} ; \quad {}^2k = \frac{-\sigma_1}{N({}^3m)} ; \quad {}^3k = \frac{-\sigma_1}{N({}^2m)} ; \quad {}^4k = \frac{N({}^1m) \sigma_1}{N({}^2m) N({}^3m)}$$

bedeuten.

Man kann nun für die Funktion  $w$  nur einseitige Regularität, etwa Linksregularität  $D \cdot w = 0$ , verlangen.  $D$  muß wie bisher im Linear-

system  $\mathfrak{L}$  liegen, aus dem auch  $x$  stammt.  $w$  selber kann hingegen in einem beliebigen hyperkomplexen Linearsystem  $\mathfrak{L}'$  oder einer Algebra liegen, die nicht Cliffordsch zu sein brauchen.  $\mathfrak{L}'$  muß bei Linksmultiplikation mit Größen aus  $\mathfrak{L}$  invariant bleiben und für diese Multiplikation muß das assoziative Gesetz gelten.

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k ; \quad w = \sum_{k=1}^n u_k e'_k .$$

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}' , \quad \text{d. h.} \quad \sum_{h=1}^n a_h e_h \cdot \sum_{j=1}^n b_j e'_j = \sum_{k=1}^n c_k e'_k .$$

$w$  ist dann immer noch eine Lösung der Differentialgleichung  $Q \cdot w = 0$ .

Insbesondere gelten der 1. und 2. Integralsatz, wenn man bei letzterem als Greensche Funktion eine reguläre Funktion aus  $\mathfrak{L}$  wählt. Für das Differential folgt dann aus (15):

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n \alpha_m \tilde{dx}^{\alpha_m} \alpha_p \quad \text{mit} \quad \alpha_m \text{ aus } \mathfrak{L} \text{ und } \alpha_p \text{ aus } \mathfrak{L}' . \quad (22)$$

Invarianz und geometrische Eigenschaften richten sich dann nach  $\mathfrak{L}'$ . Das der hyperkomplexen Regularitätsbedingung entsprechende reelle Differentialgleichungssystem kann nun die mannigfachste Gestalt annehmen. Herr *Rud. Fueter* hat auf diese Weise die *Diracschen* Gleichungen bei fehlender Ruhmasse als Regularitätsbedingungen einer Klasse von hyperkomplexen Funktionen dargestellt<sup>10)</sup>. Die Komponenten der regulären Funktionen sind Lösungen der Wellengleichung und durch die Existenz eines hyperkomplexen Potentials miteinander verknüpft<sup>11)</sup>.

Hier stellt sich nun die Aufgabe, alle linearen Differentialgleichungssysteme zu finden, die  $Q \cdot w = 0$  zur Folge haben, oder alle hyperkomplexen Linearsystem  $\mathfrak{L}'$ , für die  $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'$  gilt. Wie weit  $\mathfrak{L}$  selber durch  $Q$  bestimmt ist, soll diese Arbeit zeigen.

## II. Funktionen in einem Linearsystem mit Haupteinheit

Oft erscheint es zweckmäßig ein System  $\mathfrak{L}_1$  von Cliffordschen Basis-elementen zu betrachten, unter welchen die Haupteinheit  $e_0 = 1$  selbst auch auftritt

$$\mathfrak{L}_1 = [e_0 = 1, e_1, \dots, e_{n-1}] . \quad (23)$$

<sup>10)</sup> *Rud. Fueter* [10].

<sup>11)</sup> *A. Kriszten* [17].

Für die Basisgrößen gelten jetzt die Relationen :

$$e_0 e_k = e_k e_0, \quad e_h e_k = -e_k e_h \quad h, k = 1, \dots, n-1, \quad h \neq k \quad (24a)$$

und

$$e_0^2 = 1, \quad e_k^2 = -\kappa_k \cdot 1 \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (24b)$$

Dabei haben die  $\kappa_k$  dieselbe Bedeutung wie bei (13).

Die Basisgrößen von  $\mathfrak{Q}_1$  bilden jetzt ein Erzeugendensystem einer Cliffordschen Algebra  $\mathfrak{C}_{n-1}$  der Ordnung  $2^{n-1}$ . Wegen der Haupteinheit ist dieses nicht mehr minimal. Wir nennen daher  $\mathfrak{Q}_1$  zum Unterschied von  $\mathfrak{Q}$  ein Linearsystem mit Haupteinheit.

Durch die Auszeichnung von  $e_0 = 1$  ist die Multiplikation (24a) nicht mehr schief. Um die Unsymmetrie künstlich wegzuschaffen, definieren wir die konjugierten Einheiten :

$$\bar{e}_0 = e_0; \quad \bar{e}_k = -e_k \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

Unabhängig davon gilt aber immer noch :

$$\tilde{e}_k = \kappa_k e_k. \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Die beiden Operationen sind miteinander vertauschbar :

$$\tilde{\bar{e}}_k = \bar{\tilde{e}}_k = \kappa_k e_k$$

Es sei jetzt  $a$  eine Größe aus  $\mathfrak{Q}_1$  im Körper der reellen Zahlen.

$$a = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k \quad \text{mit reellen } a_k. \text{ Dann wird}$$

$$\bar{a} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \bar{e}_k \quad \text{und es gilt :}$$

$$\tilde{\bar{a}} = \bar{\tilde{a}} \quad \text{und} \quad \tilde{\bar{a}} = \bar{\tilde{a}} = a.$$

Damit können wir die multiplikativen Verknüpfungen und metrischen Formeln von I übertragen

$$N(a) = \bar{a}a = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k a_k^2, \quad 2n(a) = \bar{a}\bar{a} + a\tilde{a} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2,$$

$$S(ab) = \bar{a}\bar{b} + b\bar{a} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k a_k b_k; \quad s(ab) = \tilde{\bar{a}}\bar{b} + b\tilde{\bar{a}} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k.$$

$$E(ab) = \sqrt{N(a-b)}, \quad W(ab) = \arccos \frac{S(ab)}{2\sqrt{n(a)n(b)}},$$

$$e(ab) = \sqrt{n(a-b)}, \quad w(ab) = \arccos \frac{s(ab)}{2\sqrt{n(a)n(b)}}.$$

Mit  $a, b$  und  $c$  liegen wiederum  $a\bar{b}c + c\bar{b}a$  und  $a\bar{b}a$  in  $\mathfrak{Q}_1$  und haben dieselbe Bedeutung wie in I.

Nun betrachten wir die hyperkomplexen Funktionen in  $\mathfrak{Q}_1$

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k, \quad w = \sum_{k=0}^{n-1} u_k e_k.$$

Über die  $u_k(x_0, \dots, x_{n-1})$  seien dieselben Voraussetzungen gemacht, wie in I. Entsprechend definieren wir den Differentialoperator

$$D = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_h} e_h.$$

Wegen (24b) wird dann

$$D \cdot \bar{D} = Q = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

zum selben Differentialoperator 2. Ordnung wie in I.

Jetzt haben wir zwei Möglichkeiten, reguläre Funktionen zu definieren, deren Komponenten wieder Integrale der Differentialgleichung (13)  $Qu = 0$  sind. Die entsprechenden Regularitätsbedingungen lauten:

$$\bar{D} \cdot w = 0. \quad (26a)$$

$$D \cdot w = 0. \quad (26b)$$

Reell erhalten wir im ersten Fall dieselben Bedingungen wie in I

$$\operatorname{div} \tilde{w} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} w = 0.$$

Im zweiten Fall erhalten wir dagegen:

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \bar{w} = 0.$$

Daraus folgt für beide Fälle die Existenz eines skalaren Potentials im weitern Sinn  $\Psi$ , das ein Integral der Differentialgleichung (13) ist. Die Funktion  $w$  ist dann im ersten Fall

$$w = D\Psi,$$

während sie im zweiten Fall

$$w = \bar{D}\Psi$$

wird.

Damit ist die Beziehung zu den regulären Funktionen in  $\mathfrak{Q}$  sofort ersichtlich, wenn man die neuen Indizes sinngemäß mit den vorherigen vergleicht.

**5. Satz.** *Ist  $w$  in  $\mathfrak{Q}$  eine reguläre Funktion, so sind  $w$  nach (26 a) und  $\bar{w}$  nach (26 b) in  $\mathfrak{Q}_1$  wiederum regulär.*

Natürlich sind die Funktionen in  $\mathfrak{Q}_1$  in beiden Fällen immer noch beidseitig regulär, und es gelten die Integralsätze wie in  $\mathfrak{Q}$ . Wegen der spätern Spezialisierung auf Quaternionen und der Übereinstimmung mit den Regularitätsbedingungen in den bisher erschienenen Arbeiten wollen wir eine reguläre Funktion nach (26 b) durch eine der beiden äquivalenten Gleichungen

$$Dw = 0 \quad \text{oder} \quad wD = 0$$

definieren, obwohl die Regularität nach (26 a) formal schöner wäre. Die durch  $w$  vermittelten Abbildungen gehen aus denen von I durch zusätzliche Spiegelung an der reellen Axe hervor. Deshalb erfährt die Form des Differentials einer regulären Funktion gewisse Veränderungen. Die Darstellung (15) lautet jetzt:

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} \bar{\alpha} \bar{m} \tilde{d}x \alpha \bar{m} \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} \alpha m \alpha \bar{m} = 0 . \quad (27)$$

In der Tat ist  $\bar{m} \tilde{d}x \bar{m} = -\bar{m} m \tilde{d}x + \bar{m} s(m dx)$  zu  $m \tilde{d}x m$  aus  $\mathfrak{Q}$  konjugiert. Den Streckspiegelungen von (15) folgt noch eine Spiegelung an der reellen Axe. Satz 2 über die zulässigen Koordinatentransformationen gilt unverändert. Da mit  $n$  auch  $\bar{n}$  ein Nullteiler ist, gilt der Form (18) entsprechend:

$$dw = \sum_{\alpha=1}^n \alpha \bar{n} \tilde{d}x \alpha \bar{n} \quad \text{mit} \quad \alpha n \alpha \bar{n} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \dots, n . \quad (28)$$

Ganz entsprechend findet man wieder konformreguläre Abbildungen in geraddimensionalen  $R^n$ . Diese entstehen durch dieselben Spiegelungen wie in I, nur daß sich abwechslungsweise noch eine Spiegelung an der reellen Axe einschaltet

$$\begin{array}{ll} \bar{a} \tilde{x} \bar{a} & \text{regulär für } n = 2 , \\ \bar{b} a \tilde{x} a \bar{b} & \text{regulär für } n = 4 , \\ \bar{c} b \bar{a} \tilde{x} \bar{a} b \bar{c} & \text{regulär für } n = 6 , \quad \text{usw.} \end{array}$$

Durch Kombination erhält man für beliebige Dimensionen reguläre lineare Abbildungen

$$\bar{b} \{ (n - 4) \bar{a} a \tilde{x} + (n - 2) a \tilde{x} a \} \bar{b} .$$

Diese sind aber jetzt notwendigerweise Funktionen von  $\tilde{x}$  und  $\bar{\tilde{x}}$ . Für  $n = 4$  und  $n = 2$  kann das Differential wieder aus regulär-konformen Abbildungen zusammengesetzt werden

$$dw = {}^1k {}^1\bar{m} \left( \sigma_2 {}^2m \bar{d}\tilde{x} {}^2m + \sigma_3 {}^3m \bar{d}\tilde{x} {}^3m + \sigma_4 {}^4m \bar{d}\tilde{x} {}^4m \right) {}^1\bar{m} \\ + {}^2k {}^1\bar{m} {}^3m \bar{d}\tilde{x} {}^3m {}^1\bar{m} + {}^3k {}^1\bar{m} {}^2m \bar{d}\tilde{x} {}^2m {}^1\bar{m} + {}^4k {}^2\bar{m} {}^3m \bar{d}\tilde{x} {}^3m {}^2\bar{m} , \quad (29)$$

wobei die Konstanten  $k$  dieselben sind wie bei (21). Die Einführung einer Haupteinheit empfiehlt sich besonders bei einfachen hyperbolischen Differentialgleichungen  $\nu = 1$  und bei elliptischen Differentialgleichungen  $\nu = n$ .

A. Ist  $\nu = 1$ , so wird  $\tilde{a} = \bar{a}$ , und damit  $n(a) = aa + \bar{a}\bar{a}$  und  $s(ab) = ab + \bar{b}\bar{a}$ . Die Darstellungen (27) und (28) bleiben unverändert; erst bei (29) zeigt sich, wie sehr das hyperkomplexe System der Differentialgleichung angepaßt ist:

$$dw = {}^1k {}^1m (\sigma_2 {}^2m dx {}^2m + \sigma_3 {}^3m dx {}^3m + \sigma_4 {}^4m dx {}^4m) {}^1m \\ + {}^2k {}^1m {}^3m dx {}^3m {}^1m + {}^3k {}^2m {}^1m dx {}^1m {}^2m + {}^4k {}^2m {}^3m dx {}^3m {}^2m ,$$

wo die  $k$  wiederum dieselben sind wie bei (21).

B. Haben wir eine elliptische Differentialgleichung, so tritt  $\tilde{a}$  überhaupt nicht mehr auf. Zur Differentialgleichung gehört jetzt die euklidische Metrik, und wir können konforme und antikonforme Abbildungen unterscheiden:

$\bar{a} x \bar{a}$	regulär für $n = 2$ ,	konforme Abbildung
$\bar{b} a \bar{x} a \bar{b}$	regulär für $n = 4$ ,	antikonforme Abbildung
$\bar{c} b \bar{a} x \bar{a} b c$	regulär für $n = 6$ ,	konforme Abbildung usw.

In ungeraden Dimensionen setzen sich die linearen Abbildungen immer aus konformen und antikonformen zusammen. Im Unterschied zu (20) gilt jetzt aber:

**6. Satz.** Die durch eine reguläre Funktion vermittelte infinitesimale Abbildung ist in Räumen  $R^n$  von gerader Dimension bei  $n = 4m + 2$  eine Summe von konformen, bei  $n = 4m$  eine Summe von antikonformen regulären Abbildungen.

### III. Funktionen in einem Produktsystem

Eine wesentlich neue hyperkomplexe Funktionsklasse wird uns über einem Produktsystem  $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}'$  definiert, wo  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{Q}'$  Linearsysteme einer Cliffordschen Algebra mit  $m$  und  $m'$  Basiselementen bedeuten. In  $\mathfrak{P}$  sollen freie Variable, Funktion und Differentialoperator liegen, und es sollen wieder reguläre Funktionen durch eine entsprechende Bedingung ausgezeichnet werden. Über  $\mathfrak{P}$  können wir die Funktionen nun so spezialisieren, daß sie als Funktionen von  $m'$  hyperkomplexen Variablen in  $\mathfrak{Q}$  oder von  $m$  hyperkomplexen Variablen in  $\mathfrak{Q}'$  regulär werden. Dadurch erhält man Systeme von hyperkomplexen Funktionen von beliebig vielen hyperkomplexen Variablen. Natürlich dürfen wir für  $\mathfrak{Q}$  oder  $\mathfrak{Q}'$  oder auch für beide ein Linearsystem  $\mathfrak{Q}_1$  mit Haupteinheit setzen, oder sogar eine Subalgebra. In letzterem Fall erhalten wir in der Regel ein höheres Produktsystem<sup>12)</sup>. Wählt man für  $\mathfrak{Q}$  speziell die Algebra der komplexen Zahlen, so muß unter den zu einem solchen Produktsystem gehörenden regulären Funktionen ein System von analytischen Funktionen von mehreren komplexen Variablen enthalten sein. Solche reguläre Funktionen nennt man *analytisch-regulär*. Herr Rud. Fueter hat zum erstenmal diese sinngemäße Zusammenfassung analytischer Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen zu einer hyperkomplexen Funktion durchgeführt<sup>13)</sup>. Dieser interessanteste Fall, der alle Merkmale des allgemeinen besitzt, soll hier als Vertreter der Produktsysteme näher untersucht werden. Dabei werden die *analytisch-regulären* Funktionen als die einzige Funktionsklasse charakterisiert, für die auch der 2. Integralsatz unverändert gilt.

Es sei eine Cliffordsche Algebra  $\mathfrak{C}_n$

$$e_0 = 1, \quad e_1, \dots, e_n, \quad e_{12}, \dots, \dots, e_{12 \dots n}$$

gegeben, aus der wir die Linearsysteme

$$\mathfrak{Q}_1 = [1, e_n] \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}'_1 = [1, e_1, \dots, e_{n-1}]$$

<sup>12)</sup> Siehe Hilfssatz, S. 411.

<sup>13)</sup> Rud. Fueter [9].

Hier und in den darauf fußenden Arbeiten wird das zugrunde gelegte hyperkomplexe Basissystem auch Linearsystem genannt.

herausgreifen. Wir identifizieren  $e_n = i$  mit der imaginären Einheit der komplexen Zahlen. Es sollen die folgenden Relationen gelten :

$$e_h e_k = -e_k e_h, \quad h \neq k. \quad h, k = 1, \dots, n.$$

$$e_0^2 = 1; \quad e_k^2 = -1;$$

Nun definieren wir das Produktsystem  $\mathfrak{B}$  :

$$\mathfrak{B} = [1, i][1, e_1, \dots, e_{n-1}] = [\mathfrak{L}'_1, i\mathfrak{L}'_1] =$$

$$[1, e_1, \dots, e_{n-1}, i, ie_1, \dots, ie_{n-1}].$$

Als hyperkomplexe Variable erhalten wir in  $\mathfrak{B}$  die Größe

$$z = x + iy = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + iy_k) e_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k e_k,$$

wo  $x_k$  und  $y_k$  reelle Variablen sind.  $x$  und  $y$  sind Zahlen aus  $\mathfrak{L}'_1$ . Verstehen wir unter den konjugierten Einheiten wie bisher

$$\bar{e}_0 = e_0 = 1; \quad \bar{i} = -i; \quad \bar{e}_k = -e_k; \quad k = 1, \dots, n-1,$$

so erhalten wir für die konjugierte hyperkomplexe Variable :

$$\bar{z} = \bar{x} - iy = \bar{x} - \bar{y}i.$$

In  $\mathfrak{B}$  ist nun die Multiplikation auch bei Ausschluß der Haupteinheit nicht mehr durchwegs schief

$$e_h \cdot ie_k = ie_k \cdot e_h, \quad h \neq k, \quad h, k = 1, \dots, n-1. \quad (30)$$

Daher wird jetzt die Norm  $z \cdot \bar{z}$  in der Regel nicht mehr reell.

$$n(z) = z \cdot \bar{z} = (x + iy)(\bar{x} - iy) = x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y} + i(y \cdot \bar{x} - \bar{x} \cdot y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_k^2 + y_k^2) + 2i \sum_{\substack{h, k=1 \\ (h \neq k)}}^{n-1} x_h y_k e_h e_k$$

Nun fassen wir  $2n$  reelle Funktionen  $u_k(x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1})$  und  $v_k(x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1})$ , die in einem  $2n$ -dimensionalen Bereich stetig und stetig partiell differenzierbar sein sollen, zu einer hyperkomplexen Funktion  $w$  zusammen

$$w = u + vi = \sum_{k=0}^{n-1} e_k (u_k + iv_k).$$

$w$  wird im Produktsystem  $\mathfrak{B}' = [1, e_1, \dots, e_{n-1}][1, i]$  definiert, damit beim Spezialisieren auf analytisch-reguläre Funktion die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die üblichen Vorzeichen haben. In  $\mathfrak{B}$  wäre  $w = u + i\bar{v}$ .

Zur Definition regulärer Funktionen verwenden wir den Differentialoperator

$$D = E + iF = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) e_k ,$$

und nennen eine Funktion  $w$  rechts- oder linksregulär, je nachdem

$$wD = 0 \quad \text{oder} \quad Dw = 0 \quad (31)$$

wird.

Dabei verstehen wir unter

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \sum_{k=0}^{n-1} e_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + i \frac{\partial v_k}{\partial x_n} \right) .$$

Wegen (30) sind jetzt links- und rechtsreguläre Funktionen wesentlich verschieden. Wir beschränken uns in der Darstellung meistens auf rechtsreguläre Funktionen.

Die Regularitätsbedingungen zerfallen in  $\mathfrak{L}'_1$  in die beiden Gleichungen :

$$\begin{aligned} uE - vF &= 0 , \\ \bar{v}E + \bar{u}F &= 0 . \end{aligned} \quad (32)$$

Sie sind daher lineare Kombinationen der Regularitätsbedingungen von II. Da die Norm nicht mehr reell ist, genügen die regulären Funktionen im allgemeinen nicht mehr einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Regularität hat immer noch die Gültigkeit des 1. Integralsatzes zur Folge :

$$\int_{\bar{R}} w dZ v = \int_{\bar{H}} w Dv \cdot dh = 0, \quad \text{wenn} \quad \begin{aligned} wD &= 0, & w &\text{ rechtsregulär ,} \\ Dv &= 0, & v &\text{ linksregulär.} \end{aligned} \quad (33)$$

$R$ ,  $H$  und  $dZ$  sind bei (3) erklärt. Hingegen kann der 2. Integralsatz ohne weitere Einschränkungen nicht mehr aufgestellt werden, da die entsprechende Greensche Funktion in  $P$  nicht regulär ist.

Da die euklidische Metrik zu den beiden Linearsystemen gehört, aus denen  $\mathfrak{B}$  zusammengesetzt ist, so werden wir den Zahlen aus  $\mathfrak{B}$  die Punkte des euklidischen  $R^{2n}$  zuordnen. Die metrischen Formeln von II gelten weiterhin, wenn man Norm  $n$  und Spur  $s$  durch  $n'$  und  $s'$  ersetzt, die wie folgt definiert sind :

$$\begin{aligned} n'(a + ib) &= P \left\{ (a + ib)(\bar{a} - ib) \right\} = P \left\{ a\bar{a} + b\bar{b} + i(b\bar{a} - \bar{a}b) \right\} \\ &= a\bar{a} + b\bar{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'(a + ib, c + id) &= P \left\{ (a + ib)(\bar{c} - id) + (c + id)(\bar{a} - ib) \right\} \\ &= a\bar{c} + c\bar{a} + \bar{b}d + \bar{d}b. \end{aligned}$$

Dabei sind  $a, b, c$  und  $d$  Größen aus  $\mathcal{Q}'_1$ , und  $P$  vor einem Ausdruck soll die in diesem enthaltenen Bestandteile aus dem Produktsystem  $\mathfrak{P}$  bezeichnen.

Aus (32) folgt, daß wir die  $n$ -Funktionen  $u_k$  beliebig wählen können, während wir für die  $n$ -Funktionen  $v_k$  folgendes reelles Gleichungssystem erhalten :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \bar{u} - \operatorname{div}_y \bar{v} &= 0, \\ \operatorname{rot}_x \bar{u} - \operatorname{rot}_y \bar{v} &= 0, \\ \operatorname{div}_y u + \operatorname{div}_x v &= 0, \\ \operatorname{rot}_y u + \operatorname{rot}_x v &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Dabei deutet der Index an den Differentialoperatoren die Variablen an, nach denen zu differenzieren ist. Wegen (34) setzt sich nun das Differential einer regulären Funktion folgendermaßen zusammen :

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{k,h=0}^{n-1} \left\{ (A_{hk} dx_h - B_{hk} dy_h) e_k + \right. \\ &\quad \left. + [(B_{hk} + C_{hk}) dx_h + (A_{hk} + D_{hk}) dy_h] e_k i \right\}. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten  $(A_{hk})$  und  $(B_{hk})$  reelle Matrizen, die keinen Bedingungen genügen müssen, während  $(C_{hk})$  und  $(D_{hk})$  reelle Matrizen sind, die zu den nach (26 a) bzw. (26 b) regulären Abbildungen in  $\mathcal{Q}'_1$  gehören. Fassen wir zu hyperkomplexen Größen zusammen und spalten die beiden in  $\mathcal{Q}'_1$  regulären Funktionen ab, für welche wir die schon gefundene Differentialform einsetzen, so erhalten wir :

**7. Satz.** *Eine hyperkomplexe Funktion  $w$  aus dem Produktsystem  $\mathfrak{P} = [1, i] \cdot [\mathcal{Q}'_1]$  ist rechtsregulär, wenn ihr Differential in jedem regulären Punkte folgende Form hat :*

$$dw = \sum_{h=0}^{n-1} ({}^h a + {}^h b i) (dx_h + i dy_h) + \left( \sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^{\alpha p} d\bar{x}^{\alpha p} + \sum_{\beta=1}^n \sigma_\beta^{\beta q} d\bar{y}^{\beta q} \right) i.$$

Dabei bedeuten  ${}^h a$ ,  ${}^h b$  beliebige Größen aus  $\mathfrak{L}'_1$ , während  $\alpha p$  und  $\beta q$  ebenfalls aus  $\mathfrak{L}'_1$  den Bedingungen

$$\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} \alpha p \alpha \bar{q} = \sum_{\beta=1}^n \sigma_{\beta} \beta q \beta \bar{q} = 0$$

genügen müssen;  $\sigma_{\alpha}$  und  $\sigma_{\beta}$  sind die Vorzeichen der Eigenwerte von  $(C_{hk})$  und  $(D_{hk})$ .

Daraus folgt sofort die Invarianz der regulären Funktionen gegenüber orthogonalen Transformationen aus  $\mathfrak{L}_1$  oder  $\mathfrak{L}'_1$  und deren Produkte, wenn auf  $\bar{x}$ ,  $y$  und  $w$  gleichzeitig dieselbe Transformation ausgeführt wird.

Nun wollen wir diejenigen Funktionen aufsuchen, für die auch der 2. Integralsatz in der Form (4) gilt. Diesen müssen wir in  $\mathfrak{B}$  jetzt folgendermaßen schreiben:

$$w(z) = \text{const.} \int_{\bar{R}} w(\zeta) P \left\{ dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} . \quad (35)$$

$\zeta = \xi + i\eta$  variere im Innern und auf dem Rande  $R$  eines endlichen, abgeschlossenen Regularitätsbereiches  $H$ ; für  $R$  gelten dieselben Voraussetzungen wie bei (3). Um die Gültigkeit des 2. Integralsatzes zu beurteilen, versuchen wir diesen aus dem ersten abzuleiten. Wir umschließen den Aufpunkt  $z$  mit einer Hyperkugel  $K$  mit der Oberfläche  $R_K$  und verlangen für den verkleinerten Regularitätsbereich  $H' = H - K$ :

$$\int_{R+R_K} w P \left\{ dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} = \int_{H'} w P \left\{ Dn' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} dh = 0 . \quad (36)$$

Gilt (36), so folgt aus

$$\int_{\bar{R}} w P \left\{ dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} + \int_{R_K} w P \left\{ dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} = 0$$

nach Grenzübergang  $R_K \rightarrow 0$  sofort (35), da wir auf  $R_K$  für  $dZ = \text{const.} (\zeta - z)$  setzen dürfen, und damit  $P \left\{ dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\}$  reell wird. Damit sich eine hyperkomplexe Funktion  $w$  nach dem 2. Integralsatz berechnen läßt, muß demnach in  $H'$

$$w P \left\{ Dn' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} \right\} = 0$$

werden, da (36) für beliebige Hyperflächen  $R$  gelten muß.

Wegen

$$Dn'(\zeta-z)^{-n}(\overline{\zeta-z}) = -2n \cdot n'(\zeta-z)^{-n-1}i\{(\eta-y)(\overline{\xi-x}) - (\overline{\xi-x})(\eta-y)\}$$

wird  $P\{Dn'(\zeta-z)^{-n}(\overline{\zeta-z})\} = 0$ . Also muß der Operator auf  $w$  angewandt identisch in allen Komponenten von  $(\zeta-z)$  verschwinden. Wir erhalten somit als Bedingung der Existenz des 2. Integralsatzes folgendes System von Differentialgleichungen:

$$wP\{De_k\} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (37)$$

Da für  $k=0$  sofort  $wD=0$  folgt, so sind alle Funktionen, für die der 2. Integralsatz gültig ist, in der Klasse der rechtsregulären Funktionen enthalten. Differenzieren wir (37) nach  $x_k$  und  $y_k$  und summieren entsprechend, so erhalten wir:

$$wP\{D \cdot \overline{D}\} = 0.$$

Da aber  $P\{D \cdot \overline{D}\} = D \cdot \overline{D} = \Delta$ , gleich dem reellen Laplaceschen Operator ist, folgt sofort

$$\Delta w = 0.$$

Da die  $e_k$  und  $ie_k$  linear unabhängig sind, werden damit alle  $u_k$  und  $v_k$  Potentialfunktionen.

Um die verschärfte Regularitätsbedingung (37) mit der allgemeinen Regularitätsbedingung (31) zu vergleichen, zerlegen wir (37) in  $\Omega'_1$ :

$$u \cdot E - v \cdot F = 0 \quad \text{und} \quad (u + vi) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\partial}{\partial x_k} e_k + i \frac{\partial}{\partial y_k} e_k \right) = 0$$

$$\overline{v} \cdot \overline{E} + \overline{u} \cdot \overline{F} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Summieren wir die letzten  $n-1$  Gleichungen, so folgt

$$(u + vi) \left\{ E + iF + (n-2) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial y_0} \right) \right\} = 0.$$

Wegen (31) ist damit für  $n > 2$ :

$$(u + vi) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial y_0} \right) = 0.$$

Daraus folgt aber unmittelbar:

$$(u + vi) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

In  $\Omega'_1$  zerfallen diese  $n$  hyperkomplexen Gleichungen in

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0 ; \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0 \quad . \quad k = 0, \dots, n-1 \quad .$$

Somit zerfallen sie reell in :

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_k} - \frac{\partial v_h}{\partial y_k} = 0 ; \quad \frac{\partial u_h}{\partial y_k} + \frac{\partial v_h}{\partial x_k} = 0 \quad . \quad h, k = 0, \dots, n-1 \quad . \quad (38)$$

Dies sind gerade die *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen für die  $n$  komplexen Variablen  $z_k = x_k + i y_k$ . Die  $n$  komplexen Funktionen  $(u_k + i v_k)$  sind also analytische Funktionen der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z_k$ ; in diesem Fall nennen wir die hyperkomplexe Funktion  $w = u + vi$  eine *analytisch-rechtsreguläre* Funktion. Damit gilt :

**8. Satz.** *Damit für die rechtsreguläre Funktion  $w = u + vi$  aus dem Produktsystem  $\mathfrak{P} = [1, i][1, e_1, \dots, e_{n-1}]$  mit  $n > 2$  der 2. Integralsatz in der Form (35) gilt, muß  $w$  eine analytisch-rechtsreguläre Funktion sein.*

Man könnte sich nun fragen, ob die rechtsregulären Funktionen  $w$ , für welche noch zusätzlich  $\Delta w = 0$  gilt, nicht schon analytisch-rechtsregulär sind. Da zeigt sich sofort, daß nur eine der Gleichungen (31) nach (38) zerfallen muß, damit  $\Delta w = 0$  wird. Wir erhalten somit unter den rechtsregulären Funktionen zwei *Funktionsklassen*, deren Komponentenfunktionen harmonisch sind. Ihre Regularitätsbedingungen sind :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial y_k} = 0 \\ \bar{v} E + \bar{u} F = 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} u E - v F = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_k} + \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0 \end{array} ,$$

wo beidemal  $k = 0, \dots, n-1$  läuft.

Natürlich sind diese Funktionen noch nicht analytisch-rechtsregulär, und der 2. Integralsatz gilt für sie in der vorliegenden Form nicht, obwohl sich die einzelnen Komponentenfunktionen durch ein Randintegral berechnen lassen. Da ihre Regularitätsbedingungen aber gegenüber Transpositionen  $T_k$  von  $u_0, v_0, x_0, y_0$  mit  $u_k, v_k, x_k, y_k$  bzw. mit  $-u_k, -v_k, x_k, y_k$  invariant bleiben, so können ihre komplexen Komponentenfunktionen nach dem 2. Integralsatz in einer etwas spezielleren Form berechnet werden.

Es läßt sich nämlich  $u_0 + iv_0$  bei jeder rechtsregulären Funktion  $w$  durch ein Randintegral darstellen<sup>14)</sup>

$$u_0 + iv_0 = \text{const. } K \int_R w(\zeta) dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} .$$

Dabei bedeutet  $K$  vor dem Integral, daß nur komplexe Beiträge berücksichtigt werden. Wegen den zulässigen Transpositionen ist

$$w'(z) = {}^k w({}^k z)$$

eine neue, aber wiederum rechtsreguläre Funktion ; dabei soll  ${}^k z = T_k z$  und  ${}^k w = T_k w$  bezeichnen. Dann gilt :

$$u'_0(z) + iv'_0(z) = u_k({}^k z) + iv_k({}^k z) = \text{const. } K \int_R {}^k w({}^k \zeta) dZ n' (\zeta - z)^{-n} \overline{(\zeta - z)} .$$

Üben wir auf  ${}^k z$  nochmals die Transposition  $T_k$  aus, so erhalten wir :

$$u_k(z) + iv_k(z) = \text{const. } K \int_R {}^k w({}^k \zeta) dZ n' (\zeta - {}^k z)^{-n} \overline{(\zeta - {}^k z)} .$$

Nach Linksmultiplikation mit  $e_k$  und Summation über  $k$  erhält man somit eine Integraldarstellung für die Funktion  $w(z)$  :

$$w(z) = \text{const. } \sum_{k=0}^{n-1} e_k K \int_R {}^k w({}^k \zeta) dZ n' (\zeta - {}^k z)^{-n} \overline{(\zeta - {}^k z)} .$$

Diese Integralformel kann als eine Erweiterung des 2. Integralsatzes aufgefaßt werden ; hingegen muß bei jedem Summationsglied die Green'sche Funktion wie auch die Wertverteilung auf  $R$  geändert werden, und es muß  $R$  ganz im Innern des Bereiches liegen, für den die Transpositionen  $T_k$  zulässig sind, und natürlich im gemeinsamen Regularitätsgebiet der  $n$  Funktionen  ${}^k w$ .

Das Differential einer analytisch-rechtsregulären Funktion  $w$  ergibt sich aus (34) sofort, da die Matrizen  $(C_{hk})$  und  $(D_{hk})$  wegen (38) einzeln verschwinden.

**9. Satz.** *Ist  $w$  eine analytisch-rechtsreguläre Funktion, so hat ihr Differential  $dw$  in jedem regulären Punkt folgende Form :*

$$dw = \sum_{h=0}^{n-1} ({}^h a + {}^h b i) (dx_h + i dy_h)$$

${}^h a, {}^h b$  beliebige Größen aus  $\mathfrak{L}'_1$ .

<sup>14)</sup> *M. Schaad* [23], S. 34. Am Schlusse des § 10 führt Fräulein Schaad Beispiele zu diesen beiden Funktionsklassen auf; für diese gilt der weiter unten stehende verallgemeinerte 2. Integralsatz.

Aus diesem Satz ist nun auch gut ersichtlich, wie das allgemeine Differential einer rechtsregulären Funktion aus dem Differential einer *analytisch-rechtsregulären* Funktion und zweien nach (26a, 26b) regulären Differentialen in den Teilräumen  $x$  und  $y$  zusammengesetzt ist.

Für den Fall  $n = 2$  erhalten wir außer der gewöhnlichen Regularitätsbedingung keine weiteren Einschränkungen für die Gültigkeit des 2. Integralsatzes. Aus (37) folgt in diesem Fall:

$$wP \{De_1\} = wDe_1 = 0, \quad (39)$$

also wiederum  $wD = 0$ .

Der 2. Integralsatz gilt also in einem Produktsystem mit 4 Einheiten, sobald die Funktionen regulär sind. Das hat seinen Grund darin, daß die Produktsysteme  $\mathfrak{P} = [1, i][1, e]$  mit  $e^2 = \pm 1$  die gleichen Symmetrieeigenschaften haben wie die Linearsysteme  $\mathfrak{L}_1$

$$i \cdot e = -e \cdot i; \quad i \cdot ie = -ie \cdot i; \quad e \cdot ie = -ie \cdot e. \quad (40)$$

Ihre Auszeichnung ist aber noch größer, da sie mit den Algebren über dem Linearsystem  $\mathfrak{L} = [i, e]$  übereinstimmen, also selber Algebren sind. Zugleich sind sie auch die einzigen Algebren mit den Symmetrieeigenschaften (40).

#### IV. Funktionen in einer Cliffordschen Algebra

Wir wollen zuerst diejenigen *Cliffordschen* Algebren finden, in welchen wir die Ergebnisse von II übertragen können. Dazu genügt, daß ihre Basiseinheiten<sup>15)</sup> sich ausschließlich der Haupteinheit schief multiplizieren:

$$i_h i_k = -i_k i_h, \quad h \neq k, \quad h, k = 1, \dots, 2^n - 1.$$

Dann und nur dann werden Norm  $n$  und Spur  $s$  reell, und es können die metrischen Formeln von II übernommen werden.

Solche Algebren sind nun die zuletzt betrachteten Produktsysteme der Ordnung 4, welche durch ein minimales Erzeugendensystem mit zwei hyperkomplexen Einheiten bestimmt sind

$$\mathfrak{L} = [i_1, i_2] \quad \text{mit} \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1, \quad i_1^2 = \pm 1, \quad i_2^2 = \pm 1.$$

Die von  $\mathfrak{L}$  erzeugten Algebren  $\mathfrak{C}_2$  sind:

$$\mathfrak{C}_2 = [1, i_1, i_2, i_3] \quad \text{mit} \quad i_3 = i_{12} = i_1 \cdot i_2.$$

$\mathfrak{C}_2$  ist daher auch ein Produktsystem

$$\mathfrak{C}_2 = [1, i_1][1, i_2] ,$$

und es gelten die Relationen :

$$\begin{aligned} i_1 i_2 &= -i_2 i_1 ; & i_2 i_3 &= -i_3 i_2 ; & i_3 i_1 &= -i_1 i_3 ; \\ i_1^2 &= \pm 1 ; & i_2^2 &= \pm 1 ; & i_3^2 &= -i_1^2 i_2^2 . \end{aligned} \quad (41)$$

Wir haben folgende 4 Fälle zu unterscheiden :

A.  $i_1^2 = i_2^2 = -1$ . Dann wird auch  $i_3^2 = -1$ .

Wir erhalten die Algebra der Quaternionen

$$a = \sum_{k=0}^3 a_k i_k ; \quad \bar{a} = \sum_{k=0}^3 a_k \bar{i}_k ; \quad \bar{1} = 1 ; \quad \bar{i}_k = -i_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$n(a) = a \bar{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

Die zugehörige Metrik ist wegen der positiv definiten Norm euklidisch.

B.  $i_1^2 = +1$  ;  $i_2^2 = -1$  . Dann wird  $i_3^2 = +1$  und

$$n(a) = a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 .$$

C.  $i_1^2 = -1$  ;  $i_2^2 = +1$  . Dann wird  $i_3^2 = +1$  und

$$n(a) = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 .$$

D.  $i_1^2 = i_2^2 = +1$  . Dann wird  $i_3^2 = -1$  und

$$n(a) = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 .$$

Die drei Algebren der Fälle *B*, *C* und *D* sind isomorph. Wegen ihrer indefiniten Norm gehören sie zu einer einmal ausgearbeiteten hyperbolischen Metrik. Wir unterscheiden die drei Algebren wegen ihrer Isomorphie nicht mehr, und nennen ihre hyperkomplexen Zahlen Pseudoquaternionen, da sich ihre Basiseinheiten mit Ausnahme der Haupteinheit wie bei den Quaternionen schief multiplizieren. Nun gilt :

**Hilfssatz.** *Die Algebren der komplexen Zahlen, der Quaternionen und der Pseudoquaternionen sind die einzigen Cliffordschen Algebren mit reellen Normen und Spuren.*

---

<sup>15)</sup> Da nur Quaternionen und Pseudoquaternionen in Betracht kommen, bezeichnen wir die hyperkomplexen Basiseinheiten von jetzt an mit  $i_k$ , um Verwechslungen mit den bisher behandelten Systemen zu vermeiden.

Beweis :  $\mathbb{C}_n$  sei eine Cliffordsche Algebra der Ordnung  $2^n$  mit  $n > 2$ . Diese besitzt ein minimales Erzeugendensystem  $\mathfrak{L} = [e_1, \dots, e_n]$ . In  $\mathfrak{L}$  gelte  $e_h e_k = -e_k e_h$ ; ansonst ist schon in  $\mathfrak{L}$  keine reelle Spur möglich. Dann ist aber bereits im Produktsystem  $[1, e_1] \cdot \mathfrak{L}$ , das natürlich in  $C_n$  liegt, die Norm nicht mehr reell, da  $e_h \cdot e_1 e_k = e_1 e_k \cdot e_h$ ,  $h \neq k$ ,  $h, k = 2, \dots, n$  ist.

Man könnte nun trotzdem hyperkomplexe Funktionen in einer allgemeinen Cliffordschen Algebra betrachten. Diese ist dann als ein höheres Produktsystem zu betrachten. Für solche Funktionen gilt natürlich ohne zusätzliche Bedingungen nur der 1. Integralsatz. Vor allem aber sind ihre Komponentenfunktionen nicht mehr Integrale einer reellen linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung. Zudem können die Quadrate der Basiseinheiten nur im minimalen Erzeugendensystem frei gewählt werden, da die andern mit diesen bestimmt sind.

Überdies aber geht die formale Eleganz verloren, welche doch wesentlich zur Berechtigung der hyperkomplexen Schreibweise beiträgt. Es ist deshalb vernünftig, Funktionen von mehr als 4 Variablen in einem Linearsystem zusammenzufassen, auch wenn es gerade eine Cliffordsche Algebra passender Dimension gibt.

Im folgenden sollen nun die Funktionen in den Algebren der Quaternionen und Pseudoquaternionen betrachtet werden. Es sei :

$$x = \sum_{k=0}^3 x_k i_k ; \quad w = \sum_{k=0}^3 u_k i_k ; \quad D = \sum_{h=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_h} i_h .$$

Wir übernehmen die Regularitätsbedingungen von II und verlangen für reguläre Funktionen :

$$Dw = 0 \quad \text{und} \quad wD = 0 . \quad (41)$$

Reell zerfällt (41) in zweimal 4 Bedingungen

$$\begin{aligned} u_0^{(0)} + (i_1)^2 u_1^{(1)} + (i_2)^2 u_2^{(2)} + (i_3)^2 u_3^{(3)} &= 0 , \\ u_0^{(1)} + u_1^{(0)} \pm (i_2)^2 u_3^{(2)} \mp (i_2)^2 u_2^{(3)} &= 0 , \\ u_0^{(2)} + u_2^{(0)} \mp (i_1)^2 u_3^{(1)} \pm (i_1)^2 u_1^{(3)} &= 0 , \\ u_0^{(3)} + u_3^{(0)} \mp u_2^{(1)} \pm u_1^{(2)} &= 0 . \end{aligned} \quad (41 \text{ a})$$

Dabei gilt das obere Zeichen für rechtsreguläre Funktionen  $wD = 0$ , das untere für linksreguläre  $Dw = 0$ . Für beidseitigreguläre Funktionen zerfällt (41 a) in

$$\operatorname{div} \widetilde{w} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \overline{w} = 0 .$$

Wir erhalten genau die Regularitätsbedingungen (26 b), und können den Übergang vom Linearsystem zur Algebra ohne weiteres verfolgen. Nach (29) ist das Differential einer regulären Funktion eine Summe von regulären Ausdrücken der Form  $i\bar{m} k\tilde{m} d\tilde{x} k\tilde{m} i\bar{m}$  mit  $i\bar{m} k\tilde{m} + k\tilde{m} i\bar{m} = 0$ . In unsern Algebren wird  $i\bar{m} k\tilde{m} = p$  eine hyperkomplexe Zahl, und die Nebenbedingung besagt, daß der Realteil  $p_0 = 0$  verschwindet. Also ist  $p d\tilde{x} p$  mit  $p_0 = 0$  eine reguläre Form. Multiplikation mit einer hyperkomplexen Zahl mit verschwindendem Realteil bedeutet Drehung um  $90^\circ$ .

$$W(a, ap) = \arccos \frac{p + \bar{p}}{2\sqrt{p \cdot \bar{p}}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \text{ für } p_0 = 0 \text{ und } p\bar{p} \neq 0.$$

Die beiden Spiegelungen von (29) werden durch zwei Rotationen mit dem Drehwinkel  $90^\circ$  ersetzt; neue Spiegelaxe wird jetzt  $\tilde{p}$ . Wir erhalten somit nach einfacher Zusammenfassung als Differential einer regulären Funktion:

$$dw = a' d\tilde{x} i_1 + b' d\tilde{x} i_2 + c' d\tilde{x} i_3 \text{ mit } a'_0 = b'_0 = c'_0 = 0. \quad (42)$$

Natürlich ist dieses  $w$  immer noch links- und rechtsregulär und seine Komponenten sind die partiellen Ableitungen eines skalaren Integrals der Differentialgleichung 2. Ordnung  $Qu = 0$

$$w = \bar{D}\Psi; \quad Q\Psi = 0; \quad Q = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} i_k \bar{i}_k.$$

In den Algebren können wir aber auf beidseitige Regularität verzichten. Wir beschränken uns hier auf rechtsreguläre Funktionen, da die Resultate mit Symmetrieüberlegungen sofort auf linksreguläre übertragen werden können. Im folgenden gelte jetzt nur noch:

$$wD = 0.$$

Daraus folgt sofort  $wD\bar{D} = Qw = 0$ , und wegen der linearen Unabhängigkeit der Einheiten wiederum:

$$Qu_k = 0 \quad k = 0, \dots, 3.$$

Das Differential einer rechtsregulären Funktion geht entsprechend (22) durch Linksmultiplikation mit einem beliebigen Faktor aus (42) hervor.

**10. Satz.** *Das Differential einer rechtsregulären Quaternionen- oder Pseudoquaternionenfunktion hat in einem regulären Punkt die Form  $dw = a d\tilde{x} i_1 + b d\tilde{x} i_2 + c d\tilde{x} i_3$  und umgekehrt; ist insbesondere  $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ , so ist die Funktion im betreffenden Punkt auch linksregulär.*

Man kann diese Differentialform geradezu als neue Formulierung der Regularitätsbedingung auffassen. Die infinitesimale Abbildung setzt sich aus drei regulären in der zugehörigen Metrik konformen Abbildungen zusammen.

Umgekehrt geht jedes Differential einer rechtsregulären Funktion aus dem Differential einer beidseitig regulären Funktion hervor. Sind  $a, b, c$  beliebige Zahlen unserer Algebren, so ist  $d = a\bar{b}c - c\bar{b}a$  eine Zahl, deren Vektor auf denen von  $a, b, c$  senkrecht steht; somit haben  $\bar{d}a, \bar{d}b, \bar{d}c$  verschwindenden Realteil. Daraus folgt:

**11. Satz.** *Das Differential einer rechtsregulären Funktion  $w$  geht immer durch Linksmultiplikation mit einer hyperkomplexen Ortsfunktion  $K$  aus dem Differential einer beidseitig-regulären Funktion  $w^*$  hervor. Für einen regulären Punkt gilt:  $dw = Kdw^*$  mit*

$$K = (\bar{a}b\bar{c} - \bar{c}b\bar{a})^{-1}$$

Natürlich müssen im Falle der Pseudoquaternionen gewisse Einschränkungen gemacht werden, da Nullteiler auftreten könnten und  $K$  dann unbestimmt würde. Wenn wir nun nach dem Zusammenhang der rechtsregulären Funktionen selber mit den beidseitig regulären Funktionen fragen, so haben wir einen Spezialfall von (22) vor uns; die rechtsregulären Funktionen besitzen daher in der Regel an Stelle eines skalaren ein hyperkomplexes Potential. Das soll nur noch für Quaternionenfunktionen ausgeführt werden. Die Beschränkung auf Quaternionenfunktionen drängt sich besonders auch deshalb auf, da man nur bei diesen auf analytische reguläre Funktionen spezialisieren, und das Differential der Umkehrfunktion betrachten kann. Funktionen in Pseudoquaternionen haben somit gegenüber solchen in Linearsystemen trotz allgemeineren Regularitätsbedingungen wenig Vorteile. Die Körpereigenschaft der Quaternionen, die bisher nicht zur Geltung kam und zur Gültigkeit der Integralsätze in keiner Beziehung steht, gestattet erst, die Vorteile einer Algebra richtig auszunützen.

## V. Quaternionenfunktionen

Die Quaternionenalgebra erscheint in diesem Zusammenhang als interessanteste Spezialisierung; sie besitzt die Symmetrieeigenschaften eines Linearsystemes  $\mathfrak{Q}_1$ , ist ein Produktsystem und eine Algebra. Daher vereinigen die Quaternionenfunktionen alle Eigenschaften von II, III und IV.

Beidseitig reguläre Quaternionenfunktionen bezeichnen wir mit  $w$ . Für sie gilt :

$$Dw = 0 \quad \text{und} \quad wD = 0 .$$

Die einseitig regulären Quaternionenfunktionen bezeichnen wir mit  $W$ . Hier beschränken wir uns auf rechtsseitig reguläre

$$WD = 0 .$$

Aus der Regularitätsbedingung folgt sofort :

$$\Delta w = 0 \quad \text{und} \quad \Delta W = 0 .$$

Somit sind sowohl die Komponentenfunktionen von  $w$  wie von  $W$  selber Potentialfunktionen

$$\Delta u_k = 0 \quad \text{und} \quad \Delta U_k = 0 \quad k = 0, \dots, 3 .$$

Die  $u_k$  sind durch die Bedingung verknüpft, daß sie die partiellen Ableitungen eines skalaren Potentials sein müssen

$$w = \bar{D}\Phi \quad \text{mit} \quad \Delta\Phi = 0 .$$

Nun soll als erstes untersucht werden, wie die  $U_k$  verknüpft sind. Aus dem 2. Integralsatz

$$W(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_R f(\xi) dZ \Delta_\xi (\xi - x)^{-1}$$

$$\text{folgt wegen } \Delta_\xi (\xi - x)^{-1} = \Delta_x (\xi - x)^{-1}$$

$$W = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \int_R f(\xi) dZ (\xi - x)^{-1} \right\} \Delta_x , \text{ wo der } \Delta\text{-Operator jetzt auf den}$$

Aufpunkt  $x$  angewandt wird. Somit ergibt sich :

$$W = V\bar{D} \quad \text{mit} \quad V = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \int_R f(\xi) dZ (\xi - x)^{-1} \right\} D \quad \text{und} \quad \Delta V = 0 .$$

Umgekehrt ist  $W = V\bar{D}$  immer rechtsregulär, wenn  $\Delta V = 0$  ist.  $WD = V\bar{D}D = \Delta V = 0$ . Somit gilt :

**12. Satz.** *Eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion  $W$  besitzt immer ein Quaternionenpotential, das eine bedingungsfreie Lösung der Potentialgleichung ist.*

Bezeichnen wir die Komponenten von  $V$  mit  $V_k$ , so folgt:

$$W = \sum_{k=0}^3 V_k i_k \cdot \bar{D} = \sum_{k=0}^3 i_k \cdot V_k \bar{D} .$$

Nun ist aber  ${}^k w = V_k \bar{D}$  eine beidseitig reguläre Quaternionenfunktion, da aus  $\Delta V = 0$  sofort  $\Delta V_k = 0$  folgt. Somit kann  $W$  aus beidseitig regulären Funktionen dargestellt werden.

**13. Satz.** *Jede rechtseitig reguläre Quaternionenfunktion läßt sich aus vier beidseitig regulären zusammensetzen*

$$W = {}^0 w + i_1 {}^1 w + i_2 {}^2 w + i_3 {}^3 w .$$

Gleichzeitig ist damit auch eine koordinateninvariante Form der Regularitätsbedingung (41) gewonnen

$$\operatorname{div} {}^k \bar{w} = 0 ; \quad \operatorname{rot} {}^k \bar{w} = 0 ; \quad k = 0, \dots, 3 .$$

Nun stellt sich sofort die Frage, was man bei der schwächern einseitigen Regularitätsbedingung gewonnen hat.

Die rechtsregulären Funktionen bilden über den Quaternionen einen Modul. Sind  ${}^1 W \dots {}^n W$  rechtsreguläre Funktionen, so ist auch  $W = \sum_{\alpha=1}^n \alpha a {}^\alpha W$  mit konstanten Quaternionen  $\alpha a$  eine rechtsreguläre Funktion.

Insbesondere ist  $W' = aW + b$ ,  $a$  und  $b$  konstante Quaternionen, wieder eine reguläre Funktion. Nach einer regulären Abbildung kann eine Cliffordsche Linksschraubung<sup>16)</sup> und eine gewöhnliche Parallelverschiebung ausgeführt werden, ohne daß die Regularität verlorenght. Um zu sehen, welche Transformationen im Argumentenraum mit der Regularitätsbedingung verträglich sind, hat man das transformierte Differential zu betrachten.

Nach Satz 11 hat eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion die Differentialform:

$$dW = A d\bar{X} i_1 + B d\bar{X} i_2 + C d\bar{X} i_3 . \quad (43)$$

Üben wir nun die Transformation  $\bar{X} = a \bar{X}' + b$  aus, so wird  $d\bar{X} = a d\bar{X}'$  und  $dW(X') = A' d\bar{X}' i_1 + B' d\bar{X}' i_2 + C' d\bar{X}' i_3$ .

$W(X')$  ist also wieder eine reguläre Funktion. Dabei ist natürlich der Regularitätsbereich jeweils entsprechend zu transformieren. Hingegen ist eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion bei einer linear gebrochenen

<sup>16)</sup> H. G. Haefeli [13].

Transformation  $\bar{X} = (c\bar{X}' + d)^{-1}$  erst nach Hinzufügen eines Regularitätsfaktors wieder rechtsregulär. Es wird nämlich:

$$d\bar{X} = - \frac{(X'\bar{c} + \bar{d})cd\bar{X}'(X'\bar{c} + \bar{d})}{n^2(c\bar{X}' + d)}$$

Da nun aber  $n(X'\bar{c} + \bar{d})^{-1}(X'\bar{c} + \bar{d})^{-1}$  mit Ausnahme  $X' = -\frac{\bar{d} \cdot c}{(n)c}$  eine beidseitig reguläre Funktion ist, so wird

$$W' = W[(\bar{X}'\bar{c} + \bar{d})^{-1}]n(X'\bar{c} + \bar{d})^{-1}(X'\bar{c} + \bar{d})^{-1}$$

im transformierten Bereich wieder eine reguläre Funktion, weil

$$(X'\bar{c} + \bar{d})i_k(X'\bar{c} + \bar{d})^{-1}$$

verschwindenden Realteil hat.

Die rechtsregulären Quaternionenfunktionen gestatten somit außer den orthogonalen Koordinatentransformationen, wobei  $\bar{X}$  und  $W$  gleich transformiert werden müssen, noch ganz lineare linksseitige Transformationen des Funktionswertraumes oder des an der reellen Axe gespiegelten Argumentenraumes in sich. Somit erhalten wir:

**14. Satz.** *Die rechtsregulären Quaternionenfunktionen  $W(\bar{X})$  bilden einen Quaternionenmodul, in welchem die ganz linearen linksseitigen Transformationen einen Automorphismus erzeugen.*

Da man die Algebra der Quaternionen auch als Produktsystem auffassen kann, müssen wir durch Spezialisieren von den rechtsregulären Quaternionenfunktionen zu den analytisch-rechtsregulären Quaternionenfunktionen gelangen, welche Verbindungen zweier analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen sind. Wir identifizieren etwa  $i_1 = i$  und schreiben:

$$X = {}^1Z + {}^2Z i_2 = (X_0 + i_1 X_1) + (X_2 + i_1 X_3) i_2,$$

$$W = {}^1W + i_2 {}^2W = (U_0 + i_1 U_1) + i_2(U_2 + i_1 U_3),$$

wo wiederum wie bei III wegen der Vorzeichen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Funktion

$$W = U_0 + U_1 i_1 + U_2 i_2 - U_3 i_3$$

eine analytisch-reguläre Funktion werden soll. Dazu müssen  ${}^1W({}^1Z, {}^2Z)$  und  ${}^2W({}^1Z, {}^2Z)$  analytische Funktionen werden. Dann zerfällt die Regularitätsbedingung (41):

$$W^{(0)} + W^{(1)}i_1 = 0 \quad \text{und} \quad W^{(2)} + W^{(3)}i_1 = 0. \quad (44)$$

Dieser Zerfall hat nichts mit dem Zerfall bei *beidseitig regulären* Funktionen zu tun, wo nach Rotationsthermen aufgespalten wird. Nun fragen wir, wie das Differential einer analytisch-rechtsregulären Funktion ausgezeichnet ist. Darauf antwortet folgender Satz :

**15. Satz.** *Damit  $W$  eine rechtsreguläre analytische Funktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß das Differential folgende Form hat :*

$$dW = B d\bar{X} i_2 + C d\bar{X} i_3 .$$

Zum Beweis haben wir nur zu zeigen, daß (44) erfüllt ist. Es ist :

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= B i_2 + C i_3 ; & W^{(1)} &= - B i_3 + C i_2 , \\ W^{(2)} &= B - C i_1 ; & W^{(3)} &= B i_1 + C . \end{aligned}$$

Somit folgt sofort :

$$\begin{aligned} W^{(0)} + W^{(1)} i_1 &= B i_2 + C i_3 - B i_2 - C i_3 = 0 , \\ W^{(2)} + W^{(3)} i_1 &= B - C i_1 - B + C i_1 = 0 . \end{aligned}$$

Ist umgekehrt  $W$  rechtsregulär, so folgt aus (43) allgemein :

$$W^{(0)} = A i_1 + B i_2 + C i_3 ; \quad W^{(1)} = A - B i_3 + C i_2 .$$

Soll nun  $W$  analytisch rechtsregulär sein, so muß

$$W^{(0)} + W^{(1)} i_1 = A i_1 + B i_2 + C i_3 + A i_1 - B i_2 - C i_3 = 2A i_1 = 0$$

werden. Das ist nur möglich, wenn  $A = 0$  ist.

Natürlich kann das Differential auch auf die Form von Satz 9 gebracht werden.

$$dW = (B i_2 + C i_3)(dX_0 + dX_1 i_1) + (B - C i_1)(dX_2 + dX_3 i_1) .$$

Man hätte natürlich anstatt  $i_1$  auch  $i_2$  oder  $i_3$  mit der komplexen Einheit  $i$  identifizieren können ; dann wäre in der Differentialform (43)  $B$  bzw.  $C$  Null zu setzen.

Nun soll noch kurz untersucht werden, wie sich in einem regulären Punkte die inverse Funktion  $X(W)$  verhält, wenn  $W$  eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion ist. Dazu lösen wir die Differentialform nach  $dX$  auf ; dabei hat man sich in  $A(X)$ ,  $B(X)$ ,  $C(X)$   $X$  durch  $X(W)$  ersetzt zu denken. Man erhält :

$$dX = \frac{1}{K} \left\{ d\bar{W} (C\bar{B}A - A\bar{B}C) + i_1 d\bar{W} (A\bar{A}A + B\bar{A}B + C\bar{A}C) \right. \\ \left. + i_2 d\bar{W} (A\bar{B}A + B\bar{B}B + C\bar{B}C) + i_3 d\bar{W} (A\bar{C}A + B\bar{C}B + C\bar{C}C) \right\}$$

mit reellem  $K = \bar{A} (A\bar{A}A + B\bar{A}B + C\bar{A}C) + \bar{B} (A\bar{B}A + B\bar{B}B + C\bar{B}C) + \bar{C} (A\bar{C}A + B\bar{C}B + C\bar{C}C)$ .

$K$  ist im wesentlichen die Funktionaldeterminante und daher in einem regulären Punkt von Null verschieden. Damit die Umkehrfunktion  $X(W)$  linksregulär wird, muß  $C\bar{B}A - A\bar{B}C = 0$  werden; d. h.  $A$ ,  $B$  und  $C$  müssen *linear abhängig* sein. Ist die ursprüngliche Funktion zudem noch linksregulär, so ist auch die Umkehrfunktion beidseitig regulär. Es ist nämlich  $A\bar{A}A + B\bar{A}B + C\bar{A}C = A \{n(A) - n(B) - n(C)\} + Bs(\bar{A}B) + Cs(\bar{A}C)$ , und hat daher mit  $A_0 = B_0 = C_0 = 0$  selber verschwindenden Realteil. Insbesondere sind die Umkehrfunktionen der *analytisch-rechtsregulären* Funktionen *analytisch-linksreguläre* Funktionen; spezielle lineare Abhängigkeit  $A = 0$ . Damit ist bewiesen:

**16. Satz.** *Die Umkehrfunktion  $X(W)$  einer rechtsregulären Quaternionenfunktion  $W(X)$  ist in jedem regulären Punkt eine linksreguläre Quaternionenfunktion, wenn in der Differentialform  $dW$  die Komponenten  $A$ ,  $B$  und  $C$  linear abhängig sind.*

Nun soll noch gezeigt werden, welche Bedingung die Komponenten der Differentialform erfüllen müssen, damit die durch eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion geleistete Abbildung im betrachteten Punkte konform wird. Da gilt der Satz:

**17. Satz.** *Eine rechtsreguläre Quaternionenfunktion bildet die Umgebung eines regulären Punktes konform ab, wenn die Komponenten  $A$ ,  $B$  und  $C$  ihrer Differentialform proportional sind.*

Es sei  $B = \mu A$  und  $C = \nu A$ ;  $\mu$ ,  $\nu$  reelle Konstanten. Dann wird  $dW = Ad\bar{X}i_1 + \mu Ad\bar{X}i_2 + \nu Ad\bar{X}i_3 = Ad\bar{X}(i_1 + \mu i_2 + \nu i_3)$ . Dies ist in der Tat eine konforme und natürlich immer noch reguläre Abbildung.

Damit haben wir gesehen, wie die regulären Quaternionenfunktionen mit allen ihren Spezialfällen durch ihre Differentiale vollständig charakterisiert werden. Deren Form kann somit als Definition der jeweiligen Spezialisierung verwendet werden, obwohl doch diese ursprünglich durch

ein System von Differentialgleichungen festgelegt wurde. Bemerken wir noch, daß das Differential einer beliebigen Quaternionenfunktion immer auf die Form

$$dW = Dd\bar{X} + Ad\bar{X}i_1 + Bd\bar{X}i_2 + Cd\bar{X}i_3$$

gebracht werden kann, so erhalten wir abschließend :

**18. Klassifikationssatz.** *Das Differential einer beliebigen Quaternionenfunktion  $W(\bar{X})$  hat die Form :*

$$dW = Ad\bar{X}i_1 + Bd\bar{X}i_2 + Cd\bar{X}i_3 + Dd\bar{X} .$$

*Ist: a)  $D = 0$ , so ist  $W(X)$  rechtsregulär.*

*b)  $D = 0$ , und  $A_0 = B_0 = C_0 = 0$ , so ist  $W(X)$  beidseitig regulär.*

*c)  $D = C = 0$ , so ist  $W(X)$  analytisch-rechtsregulär.*

*d)  $D = 0$  und  $A\bar{B}C = C\bar{B}A$ , so ist  $X(\bar{W})$  linksregulär.*

*e)  $D = 0$  und  $A = \mu B = \nu C$ , so ist die infinitesimale Abbildung konform.*

Natürlich können mehrere Unterfälle zugleich vorkommen. Damit sind die Differentiale der Quaternionenfunktionen in regulären Punkten erschöpfend behandelt, und es muß nun deren Verhalten an Stellen, wo die Funktionaldeterminante verschwindet, untersucht werden.

### Publikationen von Herrn Rud. Fueter und seinen Schülern über hyperkomplexe Funktionen.

- [1] *Rud. Fueter*: Über automorphe Funktionen der Picardschen Gruppe I. *Comm. Math. Helv.* Bd. 3, p. 42.
- [2] —, Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 4, p. 9.
- [3] Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 7, p. 307.
- [4] —, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 8, p. 371.
- [5] —, Die Singularitäten der eindeutigregulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 9, p. 320.

- [6] Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 10, p. 306.
- [7] —, Über einen Hartogschen Satz. *Comm. Math. Helv.* Bd. 12, p. 75.
- [8] —, Vorlesungen über reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Math. Institut Universität Zürich*, 1940.
- [9] —, Über einen Hartogschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von  $n$  komplexen Variablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 14, p. 394.
- [10] —, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 16, p. 19.
- [11] — Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Monatsh. Math. u. Phys.* Bd. 43, p. 1936.
- [12] —, Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *C. R. Congrès int. Math. Oslo 1937*, t. I, p. 75.
- [13] —, Über vierfachperiodische Funktionen. *Monatsh. Math. u. Phys.* Bd. 48, u. *Phys.* Bd. 48, p. 161.
- [14] *P. Bosphard*: Die Cliffordschen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie. *Dissertation Zürich* 1940.
- [15] *M. Eichler*: Allgemeine Integration einiger partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch Quaternionenfunktionen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 12, p. 212.
- [16] *H. G. Haefeli*: Quaternionengeometrie und das Abbildungsproblem der regulären Quaternionenfunktionen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 17, p. 135.
- [17] *A. Kriszten*: Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 20, p. 333.
- [18] *W. Nef*: Über die singulären Gebilde der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 15, p. 144.
- [19] —, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 16, p. 215.
- [20] —, Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 16, p. 284.
- [21] —, Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Comm. Math. Helv.* Bd. 17, p. 83.
- [22] *Frl. M. L. Sarasin*: Über linear gebrochene Quaternionensubstitutionen und die Abbildungen des Hyperraumes. *Dissertation Zürich*, 1930.
- [23] *Frl. M. Schaad*: Über eine Klasse von rechtsregulären Funktionen mit  $2n$  reellen Variablen. *Dissertation Zürich*, 1944.
- [24] *B. Schuler*, Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.* Bd. 10, p. 327.
- [25] *A. Staub*: Integralsätze hyperkomplexer, regulärer Funktionen von  $2n$  reellen Variablen. *Dissertation Zürich*, 1946.

(Eingegangen den 24. April 1947.)

