

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 20 (1947)

**Artikel:** Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen.  
**Autor:** Kriszten, Adolf  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18066>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen

Von ADOLF KRISZTEN, Zürich

## Einleitung

Herr *Rud. Fueter* hat in einer Arbeit<sup>1)</sup> seine Methoden, die zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen führten, auf die Diracschen Differentialgleichungen mit verschwindender Ruhmasse  $m$  angewendet. Dies führte zur Aufstellung von analogen Integralsätzen (sie entsprechen dem 1. und 2. Cauchyschen Satz der klassischen Funktionentheorie). Der zweite Integralsatz hat die Form einer Integralgleichung; es tritt, außer dem Integral über den (zweidimensionalen) Schnitt der gegebenen Hyperfläche mit dem charakteristischen Kegel des Aufpunktes, noch ein solches erstreckt über die Wandung dieses Kegels auf.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die kräftefreien Diracschen Differentialgleichungen mit nicht-verschwindender Ruhmasse  $m$ . In entsprechender Weise, wie für den Fall  $m = 0$ , stellen wir die beiden Integralsätze auf, und, mit Hilfe der *Hadamardschen* „solution élémentaire“ und unter Verwendung der Methode der „partie finie“<sup>2)</sup> gelingt es, die Integralgleichung im zweiten Integralsatz zu vermeiden. Der Funktionswert im Aufpunkt läßt sich direkt durch die Funktionswerte auf einer geeignet gewählten Hyperfläche ausdrücken. Um die Berechnungen zu vereinfachen, werden wir nicht die Funktion selbst aus ihren Randwerten berechnen, sondern eine Hilfsfunktion (das  $e$ -Potential) aus der wir durch Differenzieren die Funktion sehr leicht erhalten.

Die folgende Arbeit gliedert sich in vier Kapitel, wovon die beiden ersten vorbereitenden Charakter haben. So stellen wir im ersten Kapitel die notwendigen Begriffe und Sätze über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung zusammen, ebenso im zweiten über Algebren mit einigen einfachen Bemerkungen zu den Diracschen Differentialgleichungen. Im dritten Kapitel wird die Funktionentheorie der Diracschen Gleichungen

---

<sup>1)</sup> *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, vol. 16, S. 19.

<sup>2)</sup> *J. Hadamard*, Le Problème de Cauchy et les Equations aux Dérivées partielles linéaires hyperboliques (Paris, Hermann 1932).

aufgestellt (erster und zweiter Integralsatz), und endlich wird im vierten Kapitel das Randwertproblem dieser Differentialgleichungen gelöst.

Herr Nef)<sup>3</sup> hat diese *Fuetersche* Methode verallgemeinert, und sie auf hyperbolische und ultrahyperbolische Differentialgleichungen angewendet. Bei der Aufstellung des 2. Integralsatzes ist er ebenfalls auf eine Integralgleichung gestoßen. Voraussichtlich werden die hier verwendeten Methoden, angewendet auf die *Nefschen* Funktionen, zu analogen Resultaten führen; mindestens im hyperbolischen Falle.

## I. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1. Wir betrachten homogene, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; die Gleichungen sollen von der folgenden Form sein:

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c \cdot u = 0 \quad .)^4$$

$c$  und  $b_k$  sind (reelle oder komplexe) Konstante;  $u$  ist eine (reelle oder komplexe) Funktion der *reellen* Variablen  $x_0, \dots, x_{n-1}$ <sup>5</sup>). Setzen wir zur Abkürzung  $z = (x_0, \dots, x_{n-1})$  und  $\zeta = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ , so sind die *charakteristischen Hyperkegel* von  $\mathfrak{F}$  die  $(n-1)$ -dimensionalen Kegel:

$$\overset{n}{\Gamma}(z, \zeta) = (x_0 - \xi_0)^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - \dots - (x_{n-1} - \xi_{n-1})^2 = 0 \quad .$$

$\mathfrak{F}(u)$  ist *normal-hyperbolisch*, d. h. es tritt nur eine der zweiten Ableitungen — hier diejenige nach  $x_0$  — mit positivem Vorzeichen auf; das bedeutet geometrisch, daß  $\overset{n}{\Gamma}$  den Raum in drei getrennt liegende Teile zerlegt: Zwei innere Teile  $\overset{n}{\Gamma} > 0$  ( $x_0 \geq 0$ ) und ein äußerer Teil  $\overset{n}{\Gamma} < 0$ .

Die Charakteristiken spielen eine ausgezeichnete Rolle in der *Hadamardschen* Theorie; wir wollen deshalb die Hyperflächen des Raumes der  $x_0, \dots, x_{n-1}$  bezüglich dieser charakteristischen Hyperkegel einteilen:

<sup>3</sup>) *W. Nef*, Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Comm. Math. Helv.*, vol. 17, S. 83.

<sup>4</sup>) Die Indizes senkrecht über den betreffenden Symbolen (hier in  $\overset{n}{\mathfrak{F}}$ ) geben die Dimension des betrachteten Raumes (Variablenzahl) an; die Indizes rechts unten (etwa  $x_i$ ) dienen zur Numerierung dieser einzelnen Variablen oder Funktionen.

<sup>5</sup>) Die betrachteten Funktionen werden nicht analytisch vorausgesetzt, doch sollen sie „genügend oft“ stetig differenzierbar sein; so werden wir von den Lösungsfunktionen der Diracschen Gleichungen zweimalige stetige Differenzierbarkeit verlangen. Auf die Frage der minimalen Bedingungen soll hier nicht eingegangen werden.

a) Eine Hyperebene heißt *räumlich orientiert*, wenn sie jeden dieser Hyperkegel in einer geschlossenen ( $n - 2$ -dimensionalen) Fläche schneidet (eventuell in einem Punkt).

b) Ein Hyperflächenstück heißt *räumlich orientiert*, wenn dies für alle ihre Tangentialhyperebenen gilt. (Die Hyperflächen sollen immer „genügend regulär“ sein, speziell also in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangentialebene besitzen.)

c) Im entgegengesetzten Falle heißen die Hyperebenen und Hyperflächenstücke *zeitlich orientiert*.

2. In der klassischen Potentialtheorie spielt der Greensche Satz eine große Rolle. Um das Analogon dieses Satzes zu erhalten, definiert man den zu  $\mathfrak{F}$  adjungierten Differentialoperator  $\mathfrak{G}$ :

$$\mathfrak{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{\partial v}{\partial x_k} + c \cdot v .$$

Es gilt folgende Identität

$$v \cdot \mathfrak{F}(u) - u \cdot \mathfrak{G}(v) = \frac{\partial P_0}{\partial x_0} + \dots + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x_{n-1}} ,$$

wobei

$$P_0 = \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} v - \frac{\partial v}{\partial x_0} u \right) + b_0 u v ,$$

$$P_k = - \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} v - \frac{\partial v}{\partial x_k} u \right) + b_k u v \quad (k = 1, \dots, n - 1) .$$

Sei  $\Sigma$  eine geschlossene, orientierbare Hyperfläche im Raume der  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ;  $\pi_k$  die Komponenten ihres inneren Einheitsnormalenvektors;  $H$  bedeute das ( $n$ -dimensionale) Innere von  $\Sigma$ , dann gilt der Greensche Satz

$$\int_H \dots \int (v \mathfrak{F}(u) - u \mathfrak{G}(v)) dr = - \int_\Sigma \dots \int (\pi_0 P_0 + \dots + \pi_{n-1} P_{n-1}) d\sigma .$$

$dr$  ist das  $n$ -dimensionale Volumenelement von  $H$ ;  $d\sigma$  das  $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächenelement von  $\Sigma$ .

3. Um mit Hilfe dieser Formel die Lösungsfunktion  $u$  von  $\mathfrak{F}(u) = 0$  aus ihren Randwerten auf (einem geeignet gewählten)  $\Sigma$  zu berechnen, müssen wir die Hilfsfunktion  $v$  geeignet wählen:

a)  $v$  ist eine Funktion von zwei Punkten  $z = (x_0, \dots, x_{n-1})$  und  $\zeta = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ ;  $z$  spielt die Rolle des festen Aufpunktes.

b)  $v$  ist als Funktion des Punktes  $\zeta$  eine Lösung der adjungierten Differentialgleichung  $\mathfrak{G}^{(z)}(v) = 0$ . Der obere Index ( $\zeta$ ) bedeutet Differentiation nach den  $\xi_k$ .

c) Für  $z = \zeta$  wird  $v$  geeignet singular; nach einem Satz von *Le Roux* und *Delassus*<sup>6)</sup> ist  $v$  auf dem ganzen charakteristischen Hyperkegel  $\Gamma(z, \zeta) = 0$  des Punktes  $z$  singular.

Das Problem, eine derartige Funktion  $v(z, \zeta)$  zu finden, ist für eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sehr einfach zu lösen. Die gesuchte Funktion ist die „*solution élémentaire*“ der *Hadamardschen* Theorie.

Wir wollen zwei Spezialfälle der Gleichung  $\mathfrak{G}^n(v) = 0$  untersuchen:

$$a) \quad \mathfrak{G}^n(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2} = 0 ;$$

in diesem Fall ist:

$$v(z, \zeta) = \frac{1}{\left[\Gamma(z, \zeta)\right]^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{\left[\xi_0 - x_0\right]^2 - \left(\xi_1 - x_1\right)^2 - \dots - \left(\xi_{n-1} - x_{n-1}\right)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}$$

eine Lösung von  $\mathfrak{G}^{(z)}(v) = 0$ , mit der verlangten Singularität in  $z = \zeta$ .

Die entsprechende singuläre Lösung von  $\mathfrak{F}^n(u) = 0$  ist natürlich mit derjenigen von  $\mathfrak{G}^n$  identisch.

$$b) \quad \mathfrak{G}^n(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2} - K^2 v = 0 .$$

Wir suchen eine Lösung  $v(z, \zeta)$ , die nur von

$$\varrho = \sqrt{\Gamma(z, \zeta)} = \sqrt{(\xi_0 - x_0)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - \dots - (\xi_{n-1} - x_{n-1})^2}$$

abhängt; für  $v(\varrho)$  besteht die gewöhnliche *Besselsche* Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{d\varrho^2} + \frac{n-1}{\varrho} \frac{dv}{d\varrho} - K^2 v = 0 .$$

<sup>6)</sup> *Le Roux*, Thèse, Paris 1899; *Delassus*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 3. ser. vol. 13; oder im erwähnten Buch von *Hadamard*, S. 102.

Haben wir eine  $n$ -dimensionale Lösung  $v^n$  gefunden, so erhalten wir die  $(n + 2)$ -dimensionale Lösung  $v^{n+2}$  als

$$v^{n+2} = \frac{1}{\varrho} \frac{dv^n}{d\varrho}.$$

Es genügt also, die Fälle  $n = 1; 2$  zu betrachten. Uns interessieren nur die geraden Dimensionen. Für  $n = 2$ :

$$\frac{d^2 v}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv}{d\varrho} - K^2 v = 0,$$

existiert (im wesentlichen) eine reguläre und eine logarithmisch singuläre Lösung; die letztere ist die gesuchte Funktion

$$v^2 = J_0(\varrho K) \cdot \log \varrho + w \quad (w \text{ regulär}).$$

Es ist

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}, \text{ eine Bessel'sche Funktion.}$$

Die für uns wichtige Lösung  $v^4$  erhalten wir aus  $v^2$  durch eine einfache Brechnung<sup>7)</sup>:

$$v^4 = \frac{j\left(\frac{K^2}{4} \Gamma^4\right)}{\Gamma^4} + \frac{K^2}{4} j'\left(\frac{K^2}{4} \Gamma^4\right) \cdot \log \Gamma^4 + \text{reg. Funktion.}$$

Es bedeutet

$$j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}; \quad j'(x) = \frac{dj(x)}{dx};$$

man sieht sofort, daß  $j$  eng mit der Besselschen Funktion  $J_0$  zusammenhängt.

Diese Funktion  $v^4$  wird später noch eine Rolle spielen, da sie zur vierdimensionalen Gleichung

$$\mathfrak{G}(v) = \mathfrak{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} - K^2 v = 0$$

gehört. Ist  $K = 0$ , so kommen wir zum Falle a) zurück.

<sup>7)</sup> Hadamard, S. 150—151.

c) Außer der oben definierten Differentialgleichung  $\overset{4}{\mathfrak{Y}}(u) = 0$  wird die folgende Differentialgleichung  $\overset{5}{\mathfrak{Y}}(u) = 0$  und ihre Adjungierte wichtig sein :

$$\overset{5}{\mathfrak{Y}}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} - 2K \frac{\partial u}{\partial x_4} - K^2 u = 0 ,$$

$$\overset{5}{\mathfrak{G}}(\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2} + 2K \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} - K^2 \Phi = 0 .$$

Wir führen  $\overset{5}{\mathfrak{G}}$  auf die Form des Falles a) zurück durch die Substitution

$$\Phi = e^{Kx_4} v ;$$

für die Funktion  $v$  besteht folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_4^2} = 0 .$$

Setzen wir für  $v$  die schon berechnete „solution élémentaire“ der obigen Gleichung ein, so erhalten wir

$$\Phi = \frac{e^{K(\xi_4 - x_4)}}{[(\xi_0 - x_0)^2 - \dots - (\xi_4 - x_4)^2]^{3/2}} = \frac{e^{K(\xi_4 - x_4)}}{[\overset{5}{I}(z, \zeta)]^{3/2}} .$$

Hier sind die beiden singulären Lösungen von  $\overset{5}{\mathfrak{Y}}(u) = 0$  und  $\overset{5}{\mathfrak{G}}(\Phi) = 0$  nicht mehr identisch ; es wechselt  $K$  in  $-K$ . Dies wird behoben, wenn wir gleichzeitig  $z$  und  $\zeta$  vertauschen <sup>8)</sup>.

Betrachten wir diese konstruierten, singulären Lösungen, so sehen wir, daß (für  $n \geq 3$ ) die im Greenschen Satz auftretenden Integrale nicht existieren. Diese Schwierigkeit wird für ungerade Dimensionen durch Einführung der „partie finie“ überwunden.

4. „Partie finie“ <sup>9)</sup>.

a) Einfache Integrale : Wir gehen aus von dem Integral

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{b-x}} dx ;$$

<sup>8)</sup> Siehe *Hadamard*, S. 243—244.

<sup>9)</sup> *Hadamard*, S. 184—211.

um dieses nach  $b$  zu differenzieren, müssen wir eine andere Integrationsvariable einführen. Es gibt eine Möglichkeit, hier direkt zu differenzieren: Ist  $f(x)$  analytisch, so betrachten wir an Stelle des obigen Integrales das halbe Schleifenintegral, erstreckt von  $a$  um  $b$  zurück zu  $a$ . Ist  $f(x)$  nicht analytisch, so gehen wir folgendermaßen vor: Zwar existiert der Limes für  $x$  gegen  $b$  von

$$\int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{3/2}} dx \quad (1)$$

nicht; aber dafür der Limes von

$$\int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{3/2}} dx - 2 \frac{f(x)}{\sqrt{b-x}} .$$

Das ist im wesentlichen die Ableitung des Integrales, wenn wir auf die Singularität keine Rücksicht nehmen. Etwas allgemeiner existiert auch der folgende Limes  $x \rightarrow b$

$$\int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{3/2}} dx + \frac{H(x)}{\sqrt{b-x}} ;$$

$H(x)$  ist eine beliebige Funktion von  $x$ , die nur den beiden Bedingungen genügen muß:

- 1)  $H$  ist in  $x = b$  stetig und stetig differenzierbar.
- 2) Es gilt  $H(b) = -2f(b)$ .

Unter den obigen Bedingungen ist der Limes unabhängig von der Wahl der Funktion  $H(x)$ . Wir führen die folgende Schreibweise ein

$$\lim_{x \rightarrow b} \left\{ \int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{3/2}} dx + \frac{H(x)}{\sqrt{b-x}} \right\} = \int_a^b \frac{f(x)}{(b-x)^{3/2}} dx ,$$

und nennen diesen Limes „partie finie“ des Integrales (1). Kurz gesagt besteht diese Methode darin, gebrochen singuläre<sup>10)</sup> Glieder wegzustreichen.

---

<sup>10)</sup> Eine Funktion heiÙe „gebrochen singulär“ in  $x = b$ , wenn sie sich für  $x \rightarrow b$  verhält wie

$$\frac{1}{(b-x)^{p+\frac{1}{2}}} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) .$$

Diese Definition soll auf das folgende Integral ausgedehnt werden

$$\lim_{x=b} \int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{p+1/2}} dx \quad (p = 1, 2, \dots)$$

*Definition:* Die partie finie des obigen Integrals ist, wenn  $f(x)$  in  $x = b$   $p$ -mal differenzierbar ist, gleich dem Limes der folgenden Summe

$$\lim_{x=b} \left\{ \int_a^x \frac{f(x)}{(b-x)^{p+1/2}} dx + \frac{H(x)}{(b-x)^{p-1/2}} \right\} = \int_a^b \frac{f(x)}{(b-x)^{p+1/2}} dx ;$$

es bedeutet  $H(x)$  eine beliebige Funktion, die die Bedingungen erfüllt :

- 1) Der betrachtete Limes existiert.
- 2)  $H$  ist in  $x = b$   $p$ -mal stetig differenzierbar.

Die, bis auf die obigen Bedingungen, beliebige Wahl der Funktion  $H(x)$  hat auf den Grenzwert keinen Einfluß, da die erste der beiden Bedingungen  $H(b), H'(b), \dots, H^{(p-1)}(b)$  festlegt.  $H(x)$  kann sich also (wegen 2) nur um eine Funktion ändern, die  $(b-x)^p$  als Faktor enthält; aber im Limes verschwinden alle diese Glieder.

*Differentiation nach  $b$ :* Es gilt<sup>11)</sup>

$$\frac{d}{db} \int_a^b \frac{f(x)}{(b-x)^{p+1/2}} dx = - \left( p + \frac{1}{2} \right) \int_a^b \frac{f(x)}{(b-x)^{p+3/2}} dx .$$

Das Glied, das wir durch differenzieren nach der obern Grenze  $b$  erhalten, fällt weg, da es gebrochen singulär ist; solche Glieder streichen wir aber weg.

Es sollen — als Beispiel — einige derartige Integrale betrachtet werden; Integrale, auf die wir bei den Berechnungen des zweiten Integralsatzes stoßen werden.

Es sei

$$I_n = \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{(u^2 - a)^{n+1/2}} \quad (\text{es wird } u_1 > \sqrt{a} \text{ vorausgesetzt) ;}$$

alle  $I_n$  können wir aus  $I_0$  herleiten

<sup>11)</sup> *Hadamard*, S. 194.

$$\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{(u^2 - a)^{3/2}} \right] = \frac{1}{2} I_1 ,$$

$$\frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left[ \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{(u^2 - a)^{5/2}} \right] = \frac{3}{4} I_2 \quad \text{u. s. w. }^{12)}$$

Es ist

$$I_0 = \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{u^2 - a}} = \log \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - a}}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2} \log a + \log (u_1 + \sqrt{u_1^2 - a}) .$$

Das ergibt

$$\frac{dI_0}{da} = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{u_1 + \sqrt{u_1^2 - a}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{u_1^2 - a}} = -\frac{1}{2a} - \frac{1}{2(u_1 \sqrt{u_1^2 - a} + u_1^2 - a)} ,$$

$$\frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{u_1 + 2\sqrt{u_1^2 - a}}{4\sqrt{u_1^2 - a} (u_1 \sqrt{u_1^2 - a} + u_1^2 - a)^2} .$$

Wir wollen nur die Integrale  $I_1$  und  $I_2$  berechnen ; dies genügt für unsere Zwecke

$$I_1 = \left[ \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{(u^2 - a)^{3/2}} \right] = 2 \frac{dI_0}{da} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{u_1 \sqrt{u_1^2 - a} + u_1^2 - a} ,$$

$$I_2 = \left[ \int_{\sqrt{a}}^{u_1} \frac{du}{(u^2 - a)^{5/2}} \right] = \frac{4}{3} \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{2}{a^2} - \frac{u_1 + 2\sqrt{u_1^2 - a}}{\sqrt{u_1^2 - a} (u_1 \sqrt{u_1^2 - a} + u_1^2 - a)^2} \right\} .$$

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$\left[ \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{e^{\lambda u}}{(a - u^2)^{3/2}} du \right] = -2 \frac{d}{da} \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{e^{\lambda u}}{\sqrt{a - u^2}} du ;$$

<sup>12)</sup> Hadamard, S. 206—207.

damit ist das Problem auf die Auswertung eines gewöhnlichen Integrals zurückgeführt, das wir durch Reihenentwicklung von  $e^{\lambda u}$  leicht berechnen können. Wir brauchen nur die geraden Potenzen zu betrachten, d. h. Integrale der Form

$$\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{u^{2n}}{\sqrt{a-u^2}} du = a^n \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = a^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3}{2^n n!} \pi .$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{e^{\lambda u}}{\sqrt{a-u^2}} du = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} a^n}{2^{2n} (n!)^2} = \pi j \left( \frac{\lambda^2}{4} a \right) ;$$

$j$  ist die in I, 3b definierte Funktion, wie der Vergleich der beiden Reihenentwicklungen sofort zeigt. Für das betrachtete Integral ergibt sich somit

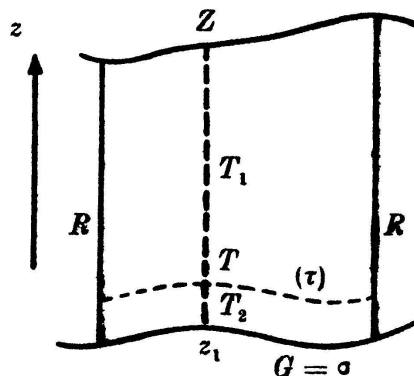
$$\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{e^{\lambda u}}{(a-u^2)^{3/2}} du = -\pi \frac{\lambda^2}{2} j' \left( \frac{\lambda^2}{4} a \right) .$$

b) Mehrfache Integrale : Wir führen die mehrfachen Integrale auf einfache, sukzessive Integrationen zurück. Es sei

$$\iiint_T \frac{f(x, y, z)}{G(x, y, z)^{p+1/2}} dx dy dz$$

ein gewisses, dreidimensionales Integral ; es soll nun die Fläche  $G = 0$  ein Teil der (oder die ganze) Begrenzung des Integrationsgebietes  $T$  sein. Wesentlich ist dabei vorausgesetzt, daß dieser Teil von  $G = 0$  keine singulären Punkte enthält ; d. h. es darf nicht vorkommen, daß gleichzeitig alle ersten partiellen Ableitungen von  $G$  in einem Punkt von  $G = 0$  verschwinden.

Wir wollen voraussetzen, daß  $\frac{\partial G}{\partial z}$  nirgends auf  $G = 0$  verschwindet und weiter, daß jede Parallele zur  $z$ -Axe  $G = 0$  in einem einzigen Punkt  $z = z_1$  schneidet ; und zwar unter einem *nicht-verschwindenden* Winkel.



In diesem Fall können wir schreiben  $G = G_1(z - z_1)$ . Vorläufig sei auch noch vorausgesetzt, daß die an die Fläche  $G = 0$  anstoßenden Teile  $R$  der Randfläche von  $T$  einen Zylinder parallel der  $z$ -Axe bilden. Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned} \left| \int \int \int_T \frac{f}{G^{p+1/2}} dx dy dz \right| &= \int \int dx dy \left| \int_{z_1}^z \frac{f}{G^{p+1/2}} dz \right| \\ &= \int \int dx dy \left| \int_{z_1}^z \frac{f}{G_1^{p+1/2} (z - z_1)^{p+1/2}} dz \right|. \end{aligned}$$

Damit dieser Grenzwert existiert, müssen wir weiter voraussetzen, daß  $G$   $p$ -mal stetig nach  $x$ ,  $y$  und  $z$  partiell differenzierbar ist; in der Umgebung von  $G = 0$ . Ebenso für  $f(x, y, z)$ .

Eine andere Definition, die zu demselben Resultat führt, ist die folgende: Die Umgebung  $T_2$  von  $G = 0$  werde vom Integrationsgebiet  $T$  durch eine Fläche ( $\tau$ )

$$G = \gamma(x, y, z, \varepsilon)$$

abgetrennt (siehe Fig.).  $\gamma$ , mitsamt den partiellen Ableitungen bis zur  $p$ -ten Ordnung, muß dabei gleichmäßig mit  $\varepsilon$  gegen Null konvergieren; also die Fläche ( $\tau$ ) gegen die Fläche  $G = 0$ . Das verbleibende Stück  $T_1$  von  $T$  enthält keine singulären Punkte des Integranden mehr; somit existiert das Integral über  $T_1$ , nicht aber dessen Limes für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Doch läßt sich die Konvergenz erreichen, indem wir einen Ausdruck der Form

$$\frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1/2}} = \frac{H_0 + H_1 \varepsilon + \dots + H_{p-1} \varepsilon^{p-1}}{\varepsilon^{p-1/2}} \quad (H_i \text{ Ortsfunktionen})$$

addieren.

Dadurch sind die Funktionen  $H_1, \dots, H_{p-1}$  vollständig bestimmt. Diese neue Definition enthält die erste gegebene Definition<sup>13)</sup> und ist unabhängig von der Wahl der Koordinatenachsen relativ zur Fläche  $G = 0$ .

Wir wollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Fläche  $G = 0$  aufschreiben:

1)  $G = 0$  ist regulär; jede Koordinate — als Funktion der anderen — hat stetige partielle Ableitungen bis zur  $p$ -ten Ordnung.

<sup>13)</sup> Hadamard, S. 197.

2) Jeder an  $G = 0$  anstoßende Teil  $R$  der Begrenzung hat dieselben Eigenschaften.

3)  $G = 0$  und die anstoßenden Teile der Begrenzung berühren sich in keinem Punkte der Schnittkurve.

Besitzt  $G = 0$  einen singulären Punkt  $z$ , so müssen wir diesen durch ein kleines Flächenstück  $\Sigma$  ausschneiden. Dabei muß der Radiusvektor mitsamt seinen  $p$ -ersten Ableitungen nach den Parametern der Fläche im Limes  $\Sigma$  gegen  $z$  verschwinden. Der Limes (wenn er existiert) ist unter diesen Voraussetzungen unabhängig von der speziell gewählten Fläche  $\Sigma$ .

*Differentiation nach einem Parameter*: Tritt der Parameter in  $\sigma$  auf, so können wir das Glied, das wir in der Ableitung dadurch erhalten, wegstreichen; wir dürfen dies ja auch bei den einfachen Integralen tun, und auf diese haben wir die mehrfache Integrale zurückgeführt.

Wir betrachten eine Integralformel (etwa die Greensche Formel) der Art

$$\iint_S = \iiint_T .$$

Der Integrand unter dem Doppelintegral (eventuell auch im dreifachen Integral) sei von der Form

$$\frac{f(x, y, z)}{G^{p+\frac{1}{2}}} .$$

Setzt sich  $S$  zusammen aus einer Fläche  $R$  und einem regulären Teil der Fläche  $G = 0$  (siehe Figur), so wollen wir  $G = 0$  durch die Fläche  $(\tau)$ :  $G = \gamma(x, y, z, \varepsilon)$  ausschneiden; die Berandung bestehe nun aus  $R_1$  und  $(\tau)$ , das Innere sei  $T_1$ . Es ist:

$$\iint_{R_1} + \iint_{(\tau)} = \iiint_{T_1} .$$

Die Integrale über  $R_1$  und  $T_1$  unterscheiden sich also nur um eine Größe, die in  $\varepsilon$  (für  $\varepsilon = 0$ , d. h.  $(\tau) = G$ ) *gebrochen singular* wird. Lassen wir  $(\tau)$  gegen  $G$  konvergieren ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), so geht die ursprüngliche Integralformel in die folgende über:

$$\overline{\iint_R} = \overline{\iiint_T} ,$$

in welcher das Integral über  $G = 0$  nicht mehr auftritt<sup>14)</sup>.

---

<sup>14)</sup> Hadamard, S. 204—205.

### 5. *Principe de descente.*

Es sei gegeben eine Lösungsfunktion  $u$  der Gleichung

$$\mathfrak{F}^n(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c \cdot u = 0 ;$$

dann ist  $u$  — formal — auch Lösung von

$$\mathfrak{F}^{n+1}(u) = \mathfrak{F}^n(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 .$$

Dabei definieren wir:  $u(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv u(x_0, \dots, x_{n-1})$ ; also ist  $u$  auf allen Parallelen zur  $x_n$ -Axe konstant.

Umgekehrt liefern uns die Lösungen der Gleichung  $\mathfrak{F}^{n+1}(u) = 0$ , für die  $\frac{\partial u}{\partial x_n} \equiv 0$  gilt, genau alle Lösungen von  $\mathfrak{F}^n(u) = 0$ .

## II. Algebren; die Diracschen Gleichungen

1. Wir führen die Cliffordschen Zahlen  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  ein. Ihre Multiplikationstafel ist definiert durch:

$$\begin{aligned} c_0 c_k &= c_k c_0 = c_k ; & c_k^2 &= c_0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) ; \\ c_k c_i &= -c_i c_k & & (k, i = 1, 2, 3, 4; i \neq k). \end{aligned}$$

Wir definieren die *konjugierten* Größen  $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4$  als:

$$\bar{c}_0 = c_0, \quad \bar{c}_1 = -c_1, \quad \bar{c}_2 = -c_2, \quad \bar{c}_3 = -c_3, \quad \bar{c}_4 = -c_4 .$$

Diese Cliffordschen Zahlen bilden ein Linearsystem  $\mathfrak{Q}_c$  einer Algebra  $\mathfrak{C}$ , mit den Basiselementen  $c_0, \dots, c_4, c_1 c_2, \dots, c_3 c_4, c_1 c_2 c_3, \dots, c_2 c_3 c_4, c_1 c_2 c_3 c_4$ .

Es sei  $a = a_0 c_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4$  eine Größe aus  $\mathfrak{Q}_c$  mit reellen oder komplexen  $a_k$ , dann ist die *Norm* von  $a$

$$n(a) = a \bar{a} = \bar{a} a = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 .$$

Man verifiziert leicht, daß die Matrizen

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; c_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung dieser Cliffordschen Zahlen bilden. Damit ist automatisch bewiesen, daß die Algebra  $\mathfrak{C}$  assoziativ ist.

Wir wollen einen einfachen Hilfssatz über die Größen aus  $\mathfrak{L}_c$  beweisen.

**Lemma:** Es seien

$$a = \sum_{k=0}^4 a_k c_k; \quad b = \sum_{k=1}^4 b_k c_k \quad (a_k, b_k \text{ beliebig komplex}),$$

dann folgt aus der Gleichung

$$ab = 0 \quad \text{auch die Gleichung} \quad ba = 0.$$

$$\text{Beweis: } ab = c_0 \sum_{k=0}^4 a_k b_k + \sum_{i < k} c_i c_k (a_i b_k - a_k b_i) + \sum_{k=1}^4 c_k (a_0 b_k + a_k b_0),$$

$$ba = c_0 \sum_{k=0}^4 a_k b_k + \sum_{i < k} c_i c_k (b_i a_k - b_k a_i) + \sum_{k=1}^4 c_k (b_0 a_k + b_k a_0).$$

Da die auftretenden hyperkomplexen Größen linear unabhängig sind, müssen nach Voraussetzung alle Koeffizienten des ersten Ausdrucks, also auch der zweite Ausdruck  $ba$ , verschwinden.

Mit Hilfe des Linearsystems  $\mathfrak{L}_c$  können wir die Punkte des reellen fünf-dimensionalen Raumes  $R$  darstellen als

$$z = \sum_{k=0}^4 x_k c_k \quad (x_k \text{ reelle Zahlen}).$$

Ebenso durch die Größen  $c_0, \dots, c_3$  diejenigen des reellen  $R$ :

$$z = \sum_{k=0}^3 x_k c_k \quad (x_k \text{ reelle Zahlen}).$$

2. Außer  $L_c$  führen wir ein zweites Linearsystem  $\mathfrak{Q}_e$  der hyperkomplexen Größen  $e_0, e_1, e_2, e_3$  ein<sup>15)</sup>. Wir definieren die  $e_k$  durch die Matrixdarstellung:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Größen  $c_i$  aus  $\mathfrak{Q}_c$  und die Größen  $e_k$  aus  $\mathfrak{Q}_e$  können nun nach den Regeln der Matrizenmultiplikation miteinander verknüpft werden; uns interessieren nur die Größen der Form  $c_i e_k$ . Alle diese Größen liegen wieder in  $\mathfrak{Q}_e$ ; wenn wir nämlich eine Spaltenmatrix  $(e_k)$  von links mit einer beliebigen Matrix  $(c_i)$  multiplizieren, so erhalten wir wieder eine Spaltenmatrix. Es ist somit  $\mathfrak{Q}_e$ , bezüglich der Multiplikation von links, unter  $\mathfrak{Q}_c$ , und damit unter  $\mathfrak{C}$  invariant.

### 3. Die Diracschen Differentialgleichungen:

Wir betrachten 4 (reelle oder komplexe) Funktionen  $u_h$  der 4 reellen Variablen  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :

$$u_h(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (h = 0, 1, 2, 3)$$

und fassen diese mit Hilfe von  $L_e$  zu einer  $e$ -Funktion der hyperkomplexen Variablen

$$z^4 = \sum_{k=0}^3 x_k c_k$$

zusammen:

$$w(z^4) = \sum_{h=0}^3 u_h e_h .$$

**Definition:** Die  $e$ -Funktion  $w = f(z^4)$  heißt in einem Punkt  $z^4$  des vierdimensionalen Raumes  $\mathring{R}$  linksregulär, wenn

$$\sum_{h=0}^3 c_h \cdot w^{(h)} + K \cdot c_4 \cdot w = 0$$

ist. Dabei bedeutet

$$w^{(h)} = \sum_{k=0}^3 e_k \frac{\partial u_k}{\partial x_h} ;$$

und  $K$  ist eine reelle oder komplexe Zahl<sup>16)</sup>.

<sup>15)</sup> Siehe die Zürcher Dissertation: P. Bosshard, Die Cliffordschen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie. Zürich 1940.

<sup>16)</sup>  $\mathfrak{Q}_c$  und  $\mathfrak{Q}_e$  sind Algebren über dem Körper der komplexen Zahlen.

$w = f(z)$  heißt in einem (vierdimensionalen) Gebiet  $H$  des  $R$  linksregulär, wenn dies für jeden Punkt  $z$  aus  $H$  gilt.

Setzen wir in diesen Regularitätsbedingungen für die Konstante

$$K = i \cdot \frac{m \cdot c}{h} ,$$

so erhalten wir die *Diracschen Differentialgleichungen*<sup>17)</sup>. Somit sehen wir, daß die linksregulären  $e$ -Funktionen — immer für diesen Wert von  $K$  — mit den Lösungsfunktionen der Diracschen Differentialgleichungen identisch sind.

Diese Regularitätsbedingung soll folgendermaßen abgekürzt werden: Es sei

$$\overset{4}{D} = \sum_{k=0}^3 c_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c_4 K ,$$

dann läßt sich die Bedingung der Linksregularität schreiben:

$$\overset{4}{D} w = 0 .$$

Weiter setzen wir entsprechend

$$\bar{\overset{4}{D}} = \sum_{k=0}^3 \bar{c}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \bar{c}_4 K ,$$

es ist also

$$n(\overset{4}{D}) = \overset{4}{D} \bar{\overset{4}{D}} = \overset{4}{\mathfrak{F}} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - K^2 ,$$

da  $K$  als konstant vorausgesetzt wurde. Dabei haben wir ohne weiteres die Haupteinheit  $c_0$  mit 1 identifiziert. Wegen des Assoziativgesetzes in  $L_c$  und  $L_e$  (Matrizenmultiplikation) folgt für die linksregulären  $e$ -Funktionen:

$$\bar{\overset{4}{D}} (\overset{4}{D} w) = (\bar{\overset{4}{D}} \overset{4}{D}) w = \overset{4}{\mathfrak{F}}(w) = \sum_{h=0}^3 e_h \overset{4}{\mathfrak{F}}(u_h) = 0 ,$$

d. h. jede Komponente  $u_h$  einer linksregulären  $e$ -Funktion ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\overset{4}{\mathfrak{F}}(u) = 0 .$$

---

<sup>17)</sup> Siehe die zitierte Dissertation S. 42.

4. Diese linksregulären  $e$ -Funktionen sind somit eng verknüpft mit dem Differentialoperator  $\overset{4}{\mathfrak{F}}$ .  $\overset{4}{\mathfrak{F}}$  ist ein partieller Differentialoperator *gerader* Dimension. Nach den Ausführungen von Kapitel I wird es ratsam sein, zur nächsthöheren, *ungeraden* Variabelnzahl überzugehen; wir betrachten also folgende formale Verallgemeinerung des Differentialoperators  $\overset{4}{D}$ : Es sei

$$\overset{5}{D} = \sum_{k=0}^4 c_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c_4 K ,$$

$x_4$  ist eine *reelle* Hilfsvariable. Da dies nur eine formale Verallgemeinerung sein soll, treffen wir die Abmachung, daß die von uns betrachteten  $e$ -Funktionen trotzdem immer nur Funktionen der ersten vier Variablen  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sein sollen; d. h. wir setzen für alle Komponenten  $u_n$  der  $e$ -Funktionen

$$u_n(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv u(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

identisch in  $x_4$ . Somit läßt sich die Bedingung der Linksregularität auch schreiben als

$$\overset{5}{D}w = 0, \quad \text{da ja immer } w^{(4)} \equiv 0 \text{ gilt.}$$

Wissen wir umgekehrt von einer  $e$ -Funktion, daß  $\overset{5}{D}w = 0$  und  $w^{(4)} = 0$ , so gilt auch  $\overset{4}{D}w = 0$ ; also ist  $w$  linksregulär.

Wir führen hier ebenfalls den *konjugierten* Operator  $\overset{5}{\bar{D}}$  ein

$$\overset{5}{\bar{D}} = \sum_{k=0}^4 \bar{c}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \bar{c}_4 K .$$

Mit Hilfe von  $\overset{5}{\bar{D}}$  bilden wir

$$n(\overset{5}{D}) = \overset{5}{D} \overset{5}{\bar{D}} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - 2K \frac{\partial}{\partial x_4} - K^2 = \overset{5}{\mathfrak{F}} .$$

Somit sind die Komponenten der linksregulären  $e$ -Funktionen Lösungen der (ungrad-dimensionalen) partiellen Differentialgleichung

$$\overset{5}{\mathfrak{F}}(u) = 0 .$$

### III. Integralsätze

#### 1. Adjungiert-reguläre $c$ -Funktionen:

Unter einer  $c$ -Funktion  $V$  der hyperkomplexen Variablen

$$z = \sum_{k=0}^4 x_k c_k$$

verstehen wir die Zusammenfassung von fünf (reellen oder komplexen) Funktionen  $V_h$  ( $h = 0, 1, 2, 3, 4$ ) der fünf *reellen* Variablen  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  in der Form

$$V = F(z) = \sum_{h=0}^4 V_h c_h .$$

Wir definieren den zu

$$D = \sum_{k=0}^4 c_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c_4 K$$

adjungierten Operator

$$\overset{5}{E} = \sum_{k=0}^4 c_k \frac{\partial}{\partial x_k} - c_4 K ;$$

ebenso

$$\bar{\overset{5}{E}} = \sum_{k=0}^4 \bar{c}_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \bar{c}_4 K .$$

Daraus folgt

$$n(\overset{5}{E}) = \overset{5}{E} \bar{\overset{5}{E}} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + 2K \frac{\partial}{\partial x_4} - K^2 ,$$

also

$$n(\overset{5}{E}) = \overset{5}{G} , \quad 18)$$

d. h. gleich dem adjungierten Operator (im Sinne der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung) von  $\overset{5}{G} = n(D)$ .

**Definition:** Die  $c$ -Funktion  $V = F(z)$  heißt *adjungiert-linksregulär* im Punkte  $\overset{5}{z}$ , wenn

$$\overset{5}{E} V = 0 ;$$

entsprechend *adjungiert-rechtsregulär*, wenn

$$V \bar{\overset{5}{E}} = 0 .$$

<sup>18)</sup> Immer nach der in Kapitel I eingeführten Bezeichnung.

Dabei treffen wir die folgende Abmachung. Steht der Operator ( $\overset{5}{E}$ ) hinter der Funktion ( $V$ ), auf die er angewendet werden soll, so werden wir dies durch eine eckige Klammer andeuten :

$$\left[ V \overset{5}{E} \right] \equiv \sum_{h=0}^4 V^{(h)} c_h - V c_4 K .$$

Weiter bedeute etwa:

$$\begin{aligned} \left[ V \overset{5}{E} w \right] &= \left[ V \overset{5}{E} \right] w + V \left[ \overset{5}{E} w \right] = \\ &= \left\{ \sum_{h=0}^4 V^{(h)} c_h - V c_4 K \right\} w + V \left\{ \sum_{h=0}^4 c_h w^{(h)} - c_4 K w \right\} ; \end{aligned}$$

$V$  ist eine  $c$ -Funktion,  $w$  eine  $c$ - (oder  $e$ -) Funktion.

**Hilfssatz :** Die adjungiert-linksregulären  $c$ -Funktionen  $V$  sind auch adjungiert-rechtsregulär ; jede, in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet des  $\overset{5}{R}$ , adjungiert-reguläre  $c$ -Funktion  $V$  besitzt ein skalares Potential  $\Phi$ , d. h. es existiert eine (reelle oder komplexe) Funktion  $\Phi$  derart, daß

$$V = \overset{5}{E} \Phi \quad \text{und} \quad \overset{5}{G}(\Phi) = 0 .$$

Umgekehrt erhalten wir so aus jeder Lösung  $\Phi$  von  $\overset{5}{G}(\Phi) = 0$  eine adjungiert-reguläre  $c$ -Funktion  $V$ .

*Beweis :* Der erste Teil des Satzes folgt sofort aus dem **Lemma** von II, 1, angewendet auf  $a = \overset{5}{E}$  und  $b = V$ . Die Existenz von  $\Phi$  sehen wir leicht ein, wenn wir die Regularitätsbedingungen ausschreiben :

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_3} - \frac{\partial V_4}{\partial x_4} + K V_4 = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_0} = 0 , \quad \frac{\partial V_0}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_0} = 0 , \quad \frac{\partial V_0}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_0} = 0 , \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0 ,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 0 , \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0 , \quad \frac{\partial V_4}{\partial x_0} + \frac{\partial V_0}{\partial x_4} - K V_4 = 0 ,$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_4} + K V_4 = 0 , \quad \frac{\partial V_4}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_4} + K V_4 = 0 , \quad \frac{\partial V_4}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_4} + K V_4 = 0 .$$

Diese Gleichungen — mit Ausnahme von (1) — sind die Integrationsbedingungen für die Existenz einer Funktion  $\Phi$ , für die bei gegebenen  $V_h$  gelten soll

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = V_0, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = V_1, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = V_2, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = V_3, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + K\Phi = V_4.$$

Wegen der Gleichung (1) muß  $\Phi$  eine Lösung von  $\mathfrak{G}(\Phi) = 0$  sein; die Umkehrung ist bei Verwendung der Operatorschreibweise selbstverständlich, da

$$\overset{5}{E} \bar{\overset{5}{E}} = \overset{5}{\mathfrak{G}}.$$

## 2. Der erste Integralsatz:

Wir betrachten gleichzeitig eine  $c$ -Funktion  $V(z) = \sum_{h=0}^4 V_h c_h$  und eine  $e$ -Funktion<sup>19)</sup>  $w(z) = \sum_{h=0}^3 u_h e_h$ ; sind beide Funktionen in einem fünf-dimensionalen Gebiet  $\overset{5}{H}$  und auf dessen Randhyperfläche  $\overset{5}{\Sigma}$  stetig und stetig differenzierbar, so können wir schreiben

$$\int_{\overset{5}{H}} (Vc_h w)^{(h)} dr = - \int_{\overset{5}{\Sigma}} Vc_h \pi_h w d\overset{5}{\sigma},$$

wobei  $\pi_h$  die  $x_h$ -Komponente des inneren Normalenvektors (Länge = 1) von  $\overset{5}{\Sigma}$ ,  $dr$  das Volumenelement von  $\overset{5}{H}$  und  $d\overset{5}{\sigma}$  das Hyperflächenelement von  $\overset{5}{\Sigma}$  ist. (Die Indizes „5“ beziehen sich nie auf die Dimension des Gebildes, sondern immer auf diejenige des betrachteten Raumes). Wir setzen  $d\overset{5}{Z} = \sum_{h=0}^4 c_h \pi_h d\overset{5}{\sigma}$ ; durch Summieren über  $h$  von 0 bis 4 erhalten wir

$$\int_{\overset{5}{H}} \sum_{h=0}^4 (Vc_h w)^{(h)} dr = - \int_{\overset{5}{\Sigma}} V d\overset{5}{Z} w.$$

Nach unserer Operatorschreibweise ist

$$\sum_{h=0}^4 c_h \frac{\partial}{\partial x_h} = \frac{1}{2} (\overset{5}{D} + \overset{5}{E}),$$

also

$$\sum_{h=0}^4 (Vc_h w)^{(h)} = \frac{1}{2} \left[ V(\overset{5}{D} + \overset{5}{E}) w \right] = \frac{1}{2} V \left[ (\overset{5}{D} + \overset{5}{E}) w \right] + \frac{1}{2} \left[ V(\overset{5}{D} + \overset{5}{E}) \right] w.$$

---

<sup>19)</sup> Zur Definition im  $\overset{5}{R}$  siehe II, 4.

Andererseits ist

$$\overset{5}{D} = \frac{1}{2}(\overset{5}{D} + \overset{5}{E}) + Kc_4 ,$$

$$\overset{5}{E} = \frac{1}{2}(\overset{5}{D} + \overset{5}{E}) - Kc_4 .$$

Indem wir  $VKc_4w$  addieren und subtrahieren, erhalten wir

$$\sum_{h=0}^4 (Vc_h w)^{(h)} = V \left[ \overset{5}{D} w \right] + \left[ V \overset{5}{E} \right] w ;$$

den umgeformten Integranden setzen wir wieder ein

$$\int_{\overset{5}{H}} \left\{ V \left[ \overset{5}{D} w \right] + \left[ V \overset{5}{E} \right] w \right\} dr = - \int_{\overset{5}{\Sigma}} V d\overset{5}{Z} w .$$

**1. Hauptsatz:** Die  $c$ -Funktion  $V$  sei in einem Gebiete  $\overset{5}{H}$  und auf seinem (genügend regulären) Rande  $\overset{5}{\Sigma}$  adjungiert-regulär; entsprechend sei die  $e$ -Funktion  $w$  dort linksregulär. Dann gilt

$$\int_{\overset{5}{\Sigma}} V d\overset{5}{Z} w = 0 .$$

Dabei bedeutet  $d\overset{5}{Z} = \sum_{h=0}^4 \pi_h c_h d\overset{5}{\sigma}$ ;  $d\overset{5}{\sigma}$  ist das (vierdimensionale) Hyperflächenelement von  $\overset{5}{\Sigma}$  und  $\pi_h$  die  $x_h$ -Komponente der inneren Einheitsnormalen von  $\overset{5}{\Sigma}$ .

*Beweis:* Es ist  $\overset{5}{D} w = V \overset{5}{E} = 0$ , nach der obigen Formel ist der Satz bewiesen.

3. Der zweite Integralsatz:

Im **Hilfssatz** (III, 1) haben wir bewiesen, daß jede adjungiert reguläre  $c$ -Funktion ein skalares Potential, d. h. eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$V = \overset{5}{E} \Phi \quad \text{mit} \quad \overset{5}{G}(\Phi) = 0 .$$

Um aus dem ersten Integralsatz den zweiten zu erhalten, müssen wir für  $V$  eine geeignete Funktion einsetzen. Wir stellen uns das einfachere Problem, das zugehörige  $\Phi$  zu suchen; es liegt nahe, als  $\Phi$  die „solution

élémentaire“ von  $\mathfrak{G}^5(\Phi) = 0$  zu wählen. Diese wurde im Kapitel I, 3b berechnet :

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{e^{K(\xi_4 - x_4)}}{\left[ \overset{5}{I}(z, \zeta) \right]^{3/2}} = \frac{e^{K(\xi_4 - x_4)}}{\left[ (\xi_0 - x_0)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - \dots - (\xi_4 - x_4)^2 \right]^{3/2}} .$$

Daraus erhalten wir die Funktion  $V$  als

$$V = \overline{E}^{(5)} \Phi .$$

Wir wollen  $V$  nicht explizit berechnen ; wir werden sehen, daß dies nicht nötig ist.

$V$  wird auf  $\overset{5}{I}$  gebrochen singular ; somit wählen wir folgendes fünfdimensionales Integrationsgebiet für den ersten Integralsatz : Wir gehen aus von einer räumlich orientierten Hyperfläche  $\overset{4}{\Sigma}$  (also einer dreidimensionalen Fläche im  $\overset{4}{R}$ ) ;  $\overset{4}{\Sigma}$  sei genügend regulär. Wir betrachten alle Punkte  $\overset{4}{z}$ , deren charakteristischer Hyperkegel  $\overset{4}{I}(\overset{4}{z}, \overset{4}{\zeta})$  (d. h. dessen einer Ast, es sei derjenige mit  $\xi_0 > x_0$ ) mit  $\overset{4}{\Sigma}$ , oder einem Teil von  $\overset{4}{\Sigma}$ , eine geschlossene Hyperfläche im  $\overset{4}{R}$  bildet. Den Bereich dieser Punkte  $\overset{4}{z}$  nennen wir  $\overset{4}{B}$ . Durch jeden Punkt von  $\overset{4}{\Sigma}$  legen wir eine Gerade parallel zur  $x_4$ -Axe, d. h. wir erweitern den  $\overset{4}{R}$  durch die zu ihm senkrechte Richtung  $x_4$  zu einem  $\overset{5}{R}$ . Auf diese Art erhalten wir eine Hyperfläche  $\overset{5}{\Sigma}$ , die natürlich ebenfalls regulär<sup>20)</sup> und räumlich orientiert ist. Entsprechend gehen wir zu dem charakteristischen Hyperkegel  $\overset{5}{I}(\overset{4}{z}, \overset{5}{\zeta})$  der Punkte  $\overset{4}{z}$  über ; der Aufpunkt  $\overset{4}{z}$  soll also im  $\overset{4}{R}$  verbleiben :

$$\overset{5}{I}(\overset{4}{z}, \overset{5}{\zeta}) = (\xi_0 - x_0)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2 - (\xi_3 - x_3)^2 - \xi_4^2 = 0 .$$

Es ist klar, daß die obige Eigenschaft der Punkte  $\overset{4}{z}$  in  $\overset{4}{B}$  bezüglich  $\overset{5}{\Sigma}$  und  $\overset{5}{I}$  erhalten bleibt.

---

<sup>20)</sup> Bedingungen I, 4 b,  $p = 2$ .

Wir können jetzt die vierdimensionale, geschlossene Hyperfläche im  $\overset{5}{R}$  definieren, die wir zur Aufstellung des ersten Integralsatzes verwenden wollen: Die Hyperfläche setzt sich zusammen aus demjenigen Teil des charakteristischen Hyperkegels von  $\overset{4}{z}$  aus  $\overset{4}{B}$ :  $\overset{5}{\Gamma}(\overset{4}{z}, \overset{5}{\zeta}) = 0$  (d. h. dessen Ast  $\xi_0 > x_0$ ), der mit einem Teil von  $\overset{5}{\Sigma}$  eine geschlossene Hyperfläche bildet, und aus diesem Teil von  $\overset{5}{\Sigma}$ . Der singuläre Punkt  $\overset{4}{z}$  auf  $\overset{5}{\Gamma}$  muß durch eine benachbarte, reguläre Hyperfläche  $(\tau)$  ausgeschnitten werden. Weiter setzen wir voraus, daß die  $e$ -Funktion  $w(\zeta)$  in  $\overset{4}{B}$  und auf  $\overset{4}{\Sigma}$  linksregulär ist; nach der üblichen Verallgemeinerung also auch im fünfdimensionalen Innern der durch  $\overset{5}{\Gamma}$  und  $\overset{5}{\Sigma}$  gebildeten, geschlossenen Hyperfläche, ebenso auf diesen beiden Hyperflächen im  $\overset{5}{R}$ .

Das gewöhnliche Integral über diese Berandung, mit  $V = \overset{5}{E} \Phi$  als Integranden, existiert nicht; hingegen seine „partie finie“:

$$\left[ \int_{\overset{5}{\Sigma} + \overset{5}{\Gamma} + (\tau)} V \cdot d\overset{5}{Z} \cdot w = 0 \right].$$

Das Integral über die Wandung des charakteristischen Hyperkegels  $\overset{5}{\Gamma}$  fällt nun automatisch weg, da der Integrand gebrochen singulär ist<sup>21)</sup>. Damit erhalten wir:

$$\left[ \int_{(\tau)} V \cdot d\overset{5}{Z} \cdot w = - \left[ \int_{\overset{5}{\Sigma}} V \cdot d\overset{5}{Z} \cdot w \right] \right].$$

Unser Ziel ist es,  $(\tau)$  gegen  $\overset{4}{z}$  konvergieren zu lassen; es ist klar, daß der Limes der linken Seite existiert und eindeutig — also unabhängig von dem speziell gewählten  $(\tau)$ <sup>22)</sup> — ist. Der Einfachheit halber wählen wir deshalb als  $(\tau)$  denjenigen Teil einer Hyperkugel (im  $\overset{5}{R}$ ) um  $\overset{4}{z}$ , der innerhalb des betrachteten Astes von  $\overset{5}{\Gamma}$  liegt. Wir dürfen den Radius nicht zu groß wählen, damit  $(\tau)$  mit  $\overset{5}{\Sigma}$  keine Punkte gemein hat<sup>23)</sup>.

<sup>21)</sup> Beweis: Siehe I, 4b.

<sup>22)</sup> Bedingungen für die Hyperfläche  $(\tau)$ : I, 4b.

<sup>23)</sup> Berechnung für allgemeines  $(\tau)$ : Hadamard, S. 220—227.

Wir führen auf diesem Hyperkugelteil geeignete Koordinaten ein :

$$\begin{aligned} \xi_0 - x_0 &= r \cdot \cos t_1 & 0 \leq t_1 \leq \frac{\pi}{4} \\ \xi_1 - x_1 &= r \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2 & -\frac{\pi}{2} \leq t_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ \xi_2 - x_2 &= r \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 \cdot \sin t_3 & -\frac{\pi}{2} \leq t_3 \leq \frac{\pi}{2} \\ \xi_3 - x_3 &= r \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 \cdot \cos t_3 \cdot \sin t_4 & \\ \xi_4 - x_4 &= r \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2 \cdot \cos t_3 \cdot \cos t_4 & 0 \leq t_4 \leq 2\pi \end{aligned}$$

Das Hyperflächenelement von  $(\tau)$  ist :

$$d\sigma = r^4 \cdot \sin^3 t_1 \cdot \cos^2 t_2 \cdot \cos t_3 \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot dt_3 \cdot dt_4 .$$

Da die  $\pi_k$  die Komponenten der inneren Normalen der betrachteten Hyperfläche sind (also auf  $(\tau)$  von  $z$  weggerichtet), gilt :

$$\sum_{k=0}^4 \pi_k c_k = \frac{\zeta^5 - z^4}{r} ,$$

Somit :

$$dZ^5 = (\zeta^5 - z^4) \cdot r^3 \cdot \sin^3 t_1 \cdot \cos^2 t_2 \cdot \cos t_3 \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot dt_3 \cdot dt_4 .$$

Betrachten wir weiter die Funktion

$$V = \bar{E}^{(5)}(\zeta) \Phi ; \Phi = \frac{e^{K \xi_4}}{\left\{ \bar{I}^{(5)}(z, \zeta) \right\}^{3/2}} ,$$

ohne diesen Ausdruck vollständig zu berechnen, sehen wir, daß er sich zusammensetzt aus Gliedern proportional  $r^{-4}$  und solchen proportional  $r^{-3}$ . Im Grenzwert  $r \rightarrow 0$  geben nur die Glieder proportional  $r^{-4}$  einen Beitrag, da  $dZ^5$  proportional  $r^4$  ist. Diese Glieder sind

$$- 3 \cdot e^{K \xi_4} \frac{\zeta^5 - z^4}{\left\{ \bar{I}^{(5)}(z, \zeta) \right\}^{5/2}} .$$

Damit nimmt der Integrand die folgende Form an

$$- 3 \frac{r^2 2 (\xi_0 - x_0) [(\xi_1 - x_1) c_1 + (\xi_2 - x_2) c_2 + (\xi_3 - x_3) c_3 + \xi_4 c_4]}{r^2 \cdot (\cos 2t_1)^{5/2}} \cdot \sin^3 t_1 \cdot \cos^2 t_2 \cdot \cos t_3 \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot dt_3 \cdot dt_4 \cdot e^{K \xi_4} \cdot w(\zeta^5) .$$

Auf ( $\zeta$ ) gilt „im Wesentlichen“

$$3 \cdot e^{K \xi_4} \cdot w(\zeta^5) = 3 \cdot w(z^4) .$$

„Im Wesentlichen“ bedeutet, die vernachlässigten Größen und deren Ableitungen nach den  $t_1, \dots, t_4$  bis zur zweiten Ordnung verschwinden gleichzeitig mit  $r$ . Somit hat diese Vernachlässigung für das Integral über ( $\tau$ ) im Limes keinen Einfluß. Machen wir diese Vernachlässigung, so sehen wir, daß die Integration nach  $t_2, t_3$  und  $t_4$  sämtliche Glieder, die im obigen Integranden auftreten, zum Verschwinden bringt, mit Ausnahme des ersten  $r^2$  im Zähler; wir erhalten

$$- 6 \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t_1}{(\cos 2t_1)^{5/2}} dt_1 \cdot w(z^4) .$$

Es sei  $u = \sqrt{2} \cos t_1$ , dann ist der Integrand

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{u^2 - 2}{(u^2 - 1)^{5/2}} \cdot du .$$

Eingesetzt in das Integral:

$$\begin{aligned} &= \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(u^2 - 1)^{3/2}} - \frac{1}{(u^2 - 1)^{5/2}} \right\} du w(z^4) \\ &= \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}} \left\{ I_1(a=1, u_1 = \sqrt{2}) - I_2(a=1, u_1 = \sqrt{2}) \right\} w(z^4) . \end{aligned}$$

Bedeutung von  $I_1$  und  $I_2$ : Siehe I, 4a. Der Ausdruck in der Klammer hat den Wert  $-\frac{\sqrt{2} \cdot 4}{3}$ . Somit erhalten wir als endgültiges Resultat für den Limes  $r = 0$ :  $- 4\pi^2 w(z^4)$ , und damit die Formel

$$w(z^4) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\frac{5}{\Sigma}} \left[ \overset{5}{E}(\zeta) \Phi \right] dZ w(\zeta^5) .$$

3. Damit ist das Problem, die  $e$ -Funktion  $w(z^4)$  aus ihren Randwerten auf  $\Sigma^4$  zu berechnen, gelöst. Es tritt aber eine Hilfsvariable  $\xi_4$  auf, die nichts mit der betrachteten Funktion  $w$  zu tun hat; diese Variable  $\xi_4$  soll noch weggeschafft werden. Berechnen wir  $V$  explizit, so erhalten wir sehr komplizierte Ausdrücke und Rechnungen, wir schlagen deshalb einen andern Weg ein.

$$\text{Es gilt} \quad \overline{E}(\zeta) \Phi = - \overline{D}(z) \Phi ,$$

wie man sofort aus der Form von  $\Phi$  ableitet.  $\Phi$  ist die einzige von  $z^4$  abhängige Größe unter dem Integralzeichen, d. h.

$$\left[ \overline{D}(z) \Phi \right] dZ^5 w(\zeta^5) = - \left[ \overline{D}(z) \Phi dZ^5 w(\zeta^5) \right]^{24} .$$

Weiter können wir schreiben

$$\int_{\Sigma^5} \left[ \overline{D}(z) \Phi dZ^5 w(\zeta^5) \right] = \overline{D}(z) \int_{\Sigma^5} \Phi(z, \zeta^5) dZ^5 w(\zeta^4) .$$

Es tritt nur noch  $\Phi$  unter dem Integralzeichen auf, somit erübrigt es sich, die Funktion  $V$  zu berechnen.

Führen wir die  $e$ -Funktion

$$p(z^4) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Sigma^5} \Phi(z, \zeta^5) dZ^5 w(\zeta^5)$$

ein, so läßt sich die gegebene linksreguläre  $e$ -Funktion  $w(z^4)$  darstellen als

$$w(z^4) = \overline{D}^4 p(z^4) . \quad 25)$$

<sup>24)</sup> Genauer müssen wir hier statt  $z^4$  die entsprechenden Punkte  $z^5$  betrachten, die Ableitung bilden und dann wieder  $z^4$  statt  $z^5$  setzen.

<sup>25)</sup> Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, kann man so vorgehen: Wir wählen auch als Aufpunkt einen Punkt  $z^5$ ; geometrisch ist aber vollkommen klar, daß die so erhaltenen  $e$ -Funktionen  $p(z^5)$  und  $w(z^5)$  nicht von  $x_4$  abhängen, also ist

$$\overline{D}^5 p(z^5) = \overline{D}^4 p(z^4) .$$

Da die Funktion  $p(z^4)$  für die linksregulären  $e$ -Funktionen eine ähnliche Rolle spielt wie das skalare Potential  $\Phi$  für die regulären  $c$ -Funktionen, wollen wir  $p(z^4)$   $e$ -Potential der linksregulären  $e$ -Funktionen  $w(z^4)$  nennen. Es genügt jetzt  $p(z^4)$  zu berechnen, um  $w(z^4)$  durch seine Randwerte auf  $\Sigma^4$  darzustellen.

Unser Ziel ist es, nach der Hilfsvariablen  $\xi_4$  zu integrieren. Betrachten wir den Integranden, so sehen wir, daß einzig  $\Phi$  von  $\xi_4$  abhängt: Bei  $w(\zeta^5)$  ist die  $\xi_4$ -Unabhängigkeit klar; wegen der speziellen Wahl von  $\Sigma^5$  (Zylinder parallel zur  $x_4$ -Axe) gilt

$$dZ^5 = d\xi_4 dZ^4 ;$$

denn es ist  $\pi_4 = 0$ , und  $dZ^5$  also unabhängig von  $\xi_4$ . Es ist nun nicht ohne weiteres möglich, nach  $\xi_4$  zu integrieren, da die Parallelen zur  $x_4$ -Axe  $\Gamma^5$  nicht überall unter einem nicht-verschwindenden Winkel schneiden (I, 3b). Wir teilen deshalb  $\Sigma^5$  in der folgenden Weise in zwei Teilgebiete  $\Sigma'^5$  und  $\Sigma''^5$ :

Im  $R^4$  betrachten wir, außer dem charakteristischen Hyperkegel ( $\Gamma^4$ )  $\Gamma^4(z^4, \zeta^4) = 0$ , noch eine weitere Hyperfläche  $(\tilde{F}^4)\Gamma^4(z^4, \zeta^4) = \gamma$  ( $\gamma$  sehr klein, positiv). Wir schneiden diese beiden Hyperflächen mit  $\Sigma^4$ ; es seien die (zweidimensionalen) Schnitte

$$(\tilde{F}^4 \times \Sigma^4) = S ; \quad (\Gamma^4 \times \Sigma^4) = T .$$

Durch die Punkte von  $T$  legen wir jetzt Parallele zur  $x_4$ -Axe; damit erhalten wir einen (dreidimensionalen) Zylinder ( $\tau$ ), dessen Mantellinien parallel zur  $x_4$ -Axe sind, und dessen (zweidimensionale) „Leitkurve“ auf  $\Sigma^4$   $T$  ist. ( $\tau$ ) zerlegt  $\Sigma^5$ , d. h. den Teil im Innern von  $\Gamma^5$ , so in zwei Teile  $\Sigma'^5$  und  $\Sigma''^5$ , daß die Parallelen zur  $x_4$ -Axe durch die Punkte des einen derselben — es sei dies  $\Sigma'^5$  —  $\Gamma^5$  unter nicht-verschwindenden Winkel schneiden.

Es ist

$$\overline{\int_{\Sigma^5} \Phi(z, \zeta) dZ w(\zeta)} = \overline{\int_{\Sigma'^5} \Phi(z, \zeta) dZ w(\zeta)} + \overline{\int_{\Sigma''^5} \Phi(z, \zeta) dZ w(\zeta)} ;$$

das Integral über  $\Sigma'^5$  werde mit  $f'$ , dasjenige über  $\Sigma''^5$  mit  $f''$  bezeichnet. Nach I, 4a erhalten wir für  $f'$  :

$$f' = \int_{\Sigma'^4} \left[ \int_{-V\sqrt{\frac{4}{\Gamma}}}^{+V\sqrt{\frac{4}{\Gamma}}} \frac{e^{K\xi_4}}{\left\{ \Gamma^4(z, \zeta) - \xi_4^2 \right\}^{3/2}} d\xi_4 dZ w(\zeta) \right] = -\frac{\pi}{2} K^2 \int_{\Sigma'^4} j' \left( \frac{K^2}{4} \Gamma^4(z, \zeta) \right) dZ w(\zeta).$$

In dieser Form können wir für  $f'$  den Limes  $T \rightarrow S$ , also  $\Sigma'^4 \rightarrow \Sigma^4$  durchführen. Um das Integral über  $\Sigma''^5$  auszuwerten, führen wir neue Koordinaten ein :

1. In  $S$  (Schnitt von  $\Gamma^4$  und  $\Sigma^4$ ) : Die beiden (beliebigen) Parameter  $\beta_1, \beta_2$ .
2. In  $\Sigma''^4$  :  $\beta_1, \beta_2$  und  $\Gamma^4$ .
3. In  $\Sigma''^5$  :  $\beta_1, \beta_2, \Gamma^4$  und  $\xi_4$ .

Es wird jetzt

$$dZ^5 = d\xi_4 d\sigma^4 \sum_{k=0}^3 c_k \pi_k \quad (\text{da auf } \Sigma^5 \pi_4 = 0) ,$$

$$d\sigma^4 = d\beta_1 d\beta_2 d\Gamma^4 \cdot \Delta \quad (\Delta \text{ ist die Funktionaldeterminante um zu den neuen Parametern auf } \Sigma''^4 \text{ überzugehen}).$$

Wir setzen

$$dS_\gamma^4 = \frac{dZ^4}{d\Gamma^4} = d\beta_1 d\beta_2 \Delta \sum_{k=0}^3 c_k \pi_k ,$$

und

$$dZ^5 = d\xi_4 d\Gamma^4 dS_\gamma^4 .$$

Wie schon bemerkt, können wir in  $\Sigma''^5$  nicht direkt nach  $\xi_4$  integrieren, hingegen nach  $\Gamma^4$ , d. h. wir integrieren längs Kurven  $l$  : ( $\beta_1 = \text{const.}$ ,

$\beta_2 = \text{const.}, \xi_4 = \text{const.}$ ), die je einen Punkt von  $\overset{5}{\Gamma}$  auf  $\overset{5}{\Sigma}$  mit einem Punkt von  $(\tau)$  verbinden und  $\overset{5}{\Gamma}$  unter einem *nicht-verschwindenden* Winkel schneiden <sup>26)</sup>.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$dS_\gamma w(\zeta) = F(\beta_1, \beta_2, \overset{4}{\Gamma}) .$$

Zuerst integrieren wir längs der Kurven  $l$ :

$$\int_{\xi_4^2}^{\gamma} \frac{d\overset{4}{\Gamma}}{(\overset{4}{\Gamma} - \xi_4^2)^{3/2}} d\xi_4 e^{K\xi_4} F(\beta_1, \beta_2, \overset{4}{\Gamma}) = - \left. \frac{2e^{K\xi_4} F}{\sqrt{\overset{4}{\Gamma} - \xi_4^2}} \right|_{\xi_4^2}^{\gamma} + 2e^{K\xi_4} \int_{\xi_4^2}^{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \overset{4}{\Gamma}} \frac{d\overset{4}{\Gamma}}{\sqrt{\overset{4}{\Gamma} - \xi_4^2}} .$$

Das zweite Glied (das Integral) verschwindet im Limes  $\gamma \rightarrow \xi_4^2$ , d. h. im Limes, den wir berechnen wollen:  $T \rightarrow S$ . Im ersten Glied haben wir den singulären Beitrag der Grenze  $\xi_4^2$  wegzustreichen (gebrochene Singularität; „partie finie“). Somit erhalten wir

$$f'' = -2 \int \int_{-V\gamma}^{+V\gamma} \frac{e^{K\xi_4} \cdot F}{\sqrt{\gamma - \xi_4^2}} d\xi_4 ;$$

unter dieser Form kann nach  $\xi_4$  integriert werden, das ergibt (I, 4a)

$$f'' = -2\pi \int j\left(\frac{K^2}{4}\gamma\right) F .$$

Hier können wir den Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  ausführen. Es gilt  $j(0) = 1$ ; also erhalten wir

$$p(z) = \frac{K^2}{8\pi} \int_{\overset{4}{\Sigma}} j' \left( \frac{K^2}{4} \overset{4}{\Gamma} \right) d\overset{4}{Z} w(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_S dS_\gamma w(\zeta) .$$

Damit ist das Problem,  $w(z)$  aus seinen Randwerten auf  $\overset{4}{\Sigma}$  zu berechnen, gelöst, da wir  $w$  als  $w(z) = \overset{4}{D} p(z)$  erhalten.

<sup>26)</sup> Dies ist möglich, da  $\gamma$  sehr klein gewählt werden soll, siehe auch Hadamard, S 295.

**2. Hauptsatz:** Es seien gegeben ein Bereich  $\overset{4}{B}$  des  $\overset{4}{R}$  und eine räumlich orientierte Hyperfläche  $\overset{4}{\Sigma}$ , die den folgenden Bedingungen genügen: Ist  $\overset{4}{z}$  ein Punkt aus  $\overset{4}{B}$ , so liegt das Innere und die Oberfläche des charakteristischen Hyperkegels (bezüglich der Gleichung  $\overset{4}{\mathfrak{F}}(u) = 0$ )  $\overset{4}{\Gamma}$  dieses Punktes  $\overset{4}{z}$  (genauer, dessen entsprechender Teil zwischen  $\overset{4}{\Sigma}$  und der Spitze  $\overset{4}{z}$ ) ganz in  $\overset{4}{B}$ .

Ist dann  $w(\overset{4}{z})$  eine in  $\overset{4}{B}$  und auf  $\overset{4}{\Sigma}$  linksreguläre  $e$ -Funktion, so gilt für jeden Punkt  $\overset{4}{z}$  aus  $\overset{4}{B}$ :

$$w(\overset{4}{z}) = \overline{D}^{\overset{4}{\Gamma}} p(\overset{4}{z}) ,$$

wobei die  $e$ -Funktion — das  $e$ -Potential von  $w$  — sich folgendermaßen aus den Randwerten von  $w$  auf  $\overset{4}{\Sigma}$  berechnen läßt:

$$p(\overset{4}{z}) = \frac{K^2}{8\pi} \int_{\overset{4}{\Sigma}} j' \left( \frac{K^2}{4} \overset{4}{\Gamma} \right) d\overset{4}{Z} w(\overset{4}{\zeta}) - \frac{1}{2\pi} \int_S dS_\gamma w(\overset{4}{\zeta}) .$$

Es bedeutet hierin:

1.  $S$  den (2-dim.) Schnitt von  $\overset{4}{\Gamma}$  mit  $\overset{4}{\Sigma}$ .
2.  $\overset{4}{\Sigma}$  das von  $\overset{4}{\Gamma}(\overset{4}{z}, \overset{4}{\zeta}) = 0$  ausgeschnittene Stück der Hyperfläche  $\overset{4}{\Sigma}$ .
3.  $d\overset{4}{Z}$  das gerichtete Hyperflächenelement von  $\overset{4}{\Sigma}$ :

$$d\overset{4}{Z} = d\sigma \cdot \sum_{k=0}^3 c_k \pi_k ;$$

( $d\sigma$  Hyperflächenelement von  $\overset{4}{\Sigma}$ ,  $\pi_k$   $x_k$ -Komponente der innern Normalen bezüglich  $\overset{4}{B}$ ).

4.  $dS_\gamma$  das gerichtete (2-dimensionale) Flächenelement auf dem Schnitt  $S$

$$dS_\gamma = \frac{d\sigma}{d\overset{4}{\Gamma}} \cdot \sum_{k=0}^3 c_k \pi_k .$$

Damit ist der zweite Integralsatz aufgestellt, und wir sind nunmehr in der Lage, eine gegebene linksreguläre  $e$ -Funktion aus ihren Randwerten auf einer räumlich orientierten Fläche zu berechnen. Die in der endgültigen Formel auftretenden Funktionen kommen auch in der „solution

élémentaire“ der Differentialgleichung  $\mathfrak{G}^4(v) = 0$  vor. Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes<sup>27)</sup>.

Bis jetzt sind wir immer von einer gegebenen, linksregulären  $e$ -Funktion ausgegangen, im nächsten Kapitel werden wir die Randwerte auf einer Hyperfläche  $\Sigma^4$  vorgeben und nach der Existenz einer linksregulären  $e$ -Funktion, die auf  $\Sigma^4$  diese Randwerte annimmt, fragen.

#### IV. Das Randwertproblem der linksregulären $e$ -Funktionen; die Randwerte des $e$ -Potentials

**3. Hauptsatz:** *Es sei gegeben eine (genügend reguläre) räumlich orientierte Hyperfläche  $\Sigma^4$ .  $B$  sei der in III, 3 definierte Bereich der Punkte  $z^4$ . Weiter seien auf  $\Sigma^4$  vier (reelle oder komplexe) Funktionen  $r_h(x_0, x_1, x_2, x_3)$  ( $h = 0, 1, 2, 3$ ) gegeben. Dann existiert in  $B$  genau eine linksreguläre  $e$ -Funktion  $w(z^4)$ , die auf  $\Sigma^4$  die Randwerte*

$$w(z^4) = \sum_{h=0}^3 r_h e_h$$

annimmt.

Die  $e$ -Funktion  $w(z^4)$  läßt sich in der folgenden Weise aus den gegebenen Randwerten  $r_h$  auf  $\Sigma^4$  berechnen:

Es sei

$$p(z^4) = \frac{K^2}{8\pi} \int_{\Sigma^4} j' \left( \frac{K^2}{4} \Gamma^4 \right) dZ^4 \sum_{h=0}^3 r_h e_h - \frac{1}{2\pi} \int_S dS_\gamma \sum_{h=0}^3 r_h e_h,$$

dann ist

$$w(z^4) = \bar{D}^4 p(z^4).$$

Bezeichnungen, siehe 2. Hauptsatz.

*Beweis:*

1. Es kann höchstens eine Lösung  $w(z^4)$  mit diesen Randwerten auf  $\Sigma^4$  geben; hätten wir zwei solche Funktionen  $w$  und  $w_1$ , so würde für

---

<sup>27)</sup> Hadamard, S. 311.

beide der 2. Hauptsatz gelten bezüglich derselben Randhyperfläche und mit denselben Randwerten  $\sum_{h=0}^3 r_h e_h$  auf  $\Sigma^4$ . Somit sehen wir, daß  $w \equiv w_1$  sein müßte.

2. Wir bilden mit den gegebenen Randwerten  $r_h$  die  $e$ -Funktion  $\sum_{h=0}^3 r_h e_h$ , die nur auf  $\Sigma^4$  definiert ist. Nun gehen wir in derselben Weise, wie in III, 3 zu einer Hyperfläche  $\Sigma^5$  über und bilden die  $e$ -Funktion

$$p^5(z) = p^4(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\int_{\Sigma^5} \Phi(z, \zeta) dZ^5 \sum_{h=0}^3 r_h e_h};$$

es gilt natürlich  $\frac{\partial p}{\partial x_4} \equiv 0$ ;  $\Phi$  und  $dZ^5$  sollen die bekannte Bedeutung haben.

Wir behaupten, daß

$$w^5(z) = w^4(z) = \bar{D}^5 p^5(z) = \bar{D}^4 p^4(z)$$

die verlangten Eigenschaften hat. Auch  $w$ , wie  $p$ , ist von  $x_4$  unabhängig.  $w$  ist linksregulär; unter dem Integral ist nur  $\Phi$  von  $z$  abhängig, somit gilt:

$$\bar{D}^4 w^4(z) = \bar{D}^5 w^5(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\int_{\Sigma^5} \left[ \bar{D}^5(z) \bar{D}^5(z) \Phi(z, \zeta) \right] dZ^5 \sum_{h=0}^3 r_h e_h}.$$

Es ist  $\bar{D}^5 \bar{D}^5 = \mathfrak{F}^5$  (siehe II, 4); die „solution élémentaire“  $\Phi(z, \zeta)$  ist als Funktion von  $z$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\mathfrak{F}^5(z)(\Phi) = 0$ , also verschwindet der Integrand, und es gilt:

$$\bar{D}^4 w^4(z) = 0,$$

d. h.  $w^4(z)$  ist linksregulär.

Ebenso einfach erledigt sich das Randwertproblem; es ist

$$4\pi^2 w^4(z) = \sqrt{\int_{\Sigma^5} \left[ \bar{E}^5(\zeta) \Phi(z, \zeta) \right] \cdot dZ^5 \cdot \sum_{h=0}^3 r_h e_h}. \quad (\text{Siehe III, 3}).$$

Lassen wir nun  $\overset{4}{z}$  gegen  $\overset{4}{\Sigma}$  streben, so ist das Integral auf der rechten Seite beinahe dasselbe wie dasjenige über  $(\tau)$  (III, 3); nur lassen wir hier  $\overset{4}{z}$  gegen  $\overset{4}{\Sigma}$  konvergieren und nicht umgekehrt, weiter ist noch die Normalenrichtung umgekehrt. Das ändert — bis auf das Vorzeichen — nichts an den dortigen Berechnungen, da ja  $\overset{4}{\Sigma}$  und die Funktionen  $r_h$  genügend regulär vorausgesetzt werden. Damit erhalten wir

$$4\pi^2 \lim_{\overset{4}{z} \rightarrow \overset{4}{\Sigma}} w(\overset{4}{z}) = 4\pi^2 \sum_{h=0}^3 r_h e_h ,$$

und der 3. Hauptsatz ist bewiesen. Im letzten Teil des Beweises wurde wesentlich vorausgesetzt, daß  $\overset{4}{\Sigma}$  räumlich orientiert ist, für zeitlich orientierte Hyperflächen sind diese Berechnungen im allgemeinen nicht gültig.

Wir wollen auch noch die Randwerte des  $e$ -Potentials  $p(\overset{4}{z})$  studieren: hierüber gibt vollständig Aufschluß der

**4. Hauptsatz:** *Jede Komponente des  $e$ -Potentials  $p(\overset{4}{z})$  ist eine Lösungsfunktion von*

$$\overset{4}{\mathfrak{G}}(u) = 0 .$$

*Auf der betrachteten Fläche  $\overset{4}{\Sigma}$  verschwindet das  $e$ -Potential, und seine ersten Ableitungen sind durch die Bedingungen*

$$\overline{D} p(\overset{4}{z}) = \sum_{h=0}^3 r_h e_h \quad (\text{auf } \overset{4}{\Sigma})$$

*verknüpft; die Funktionen  $r_h$  sind die Randwerte der entsprechenden Komponenten der linksregulären  $e$ -Funktion  $w(\overset{4}{z})$ , die durch  $p(\overset{4}{z})$  erzeugt wird.*

*Beweis:* Der erste Teil des Satzes ist klar; zweitens sind die Randwerte von  $p(\overset{4}{z})$  null, da

$$\Phi \sim r^{-3} \quad \text{und} \quad dZ \sim r^4 \quad \text{sind für} \quad \overset{4}{z} \rightarrow \overset{4}{\Sigma} .$$

Daß drittens auf  $\overset{4}{\Sigma}$   $\overline{D} p(\overset{4}{z}) = \sum_{h=0}^3 r_h e_h$  gilt, haben wir beim Beweis des 3. Hauptsatzes eingesehen.

(Eingegangen den 20. März 1947.)