**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 20 (1947)

**Artikel:** Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flächen.

Autor: Le-Van, Thiem

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-18063

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 25.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flächen\*)

Von LE-VAN, THIEM, Zürich

### § 1. Einleitung

- 1. Jede einfach zusammenhängende, offene Riemannsche Fläche läßt sich bekanntlich eindeutig und konform auf einen Kreis  $|z| < R \le \infty$  abbilden. Je nachdem  $R < \infty$  oder  $R = \infty$  ist, heißt sie vom hyperbolischen oder vom parabolischen Typus. Im Anschluß an die Nevanlinnasche Wertverteilungslehre hat man speziell diejenigen Flächen  $W_q$  behandelt, welche Überlagerungsflächen der Riemannschen Kugel sind und deren Windungspunkte nur über endlich vielen Grundpunkten liegen 1).
- 2. Die topologische Struktur dieser Flächen kann folgendermaßen erklärt werden:

Man ziehe durch die Grundpunkte  $a_1, a_2, \ldots, a_q$  eine geschlossene Jordan-Kurve L, welche die Riemannsche Kugel in zwei einfach zusammenhängende Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  zerlegt. Denkt man sich die Fläche längs L aufgeschnitten, so zerfällt sie in endlich oder unendlich viele, untereinander kongruente Exemplare  $G_1$  bzw.  $G_2$ . Die Randpunkte dieser Halbblätter oder Polygone  $a_1, \ldots, a_q$  mögen Ecken, die Bogen  $(a_1 a_2), \ldots, (a_q a_1)$  Seiten heißen.

Die Eckpunkte  $a_1, \ldots, a_q$  eines gegebenen Polygons  $G_{\nu}$  ( $\nu=1,2$ ) sind von dreierlei Art: 1. Windungspunkte unendlicher Ordnung, an welche unendlich viele Blätter  $G_1+G_2$  grenzen, 2. Windungspunkte (m-1)-ter Ordnung, wo eine endliche Anzahl m>1 von Blättern  $G_1+G_2$  zyklisch vereinigt sind, 3. uneigentliche Eckpunkte, wo die Fläche schlicht verläuft.

Um die Fläche W darzustellen, denkt man sich eine Anzahl von Kurvenpolygonen  $G^{\mu}_{\nu}$  ( $\nu = 1, 2; \mu = 1, 2, 3...$ ), die mit  $G_{\nu}$  topologisch

<sup>\*)</sup> Für das Zustandekommen der vorliegenden Abhandlung bin ich in erster Linie den Herren Prof. R. Nevanlinna und Dr. H. Wittich für die liebenswürdige Unterstützung, die sie mir während der Ausarbeitung zuteilkommen ließen, zu tiefstem Dank verpflichtet.

Meine Arbeit bei Herrn Prof. R. Nevanlinna wurde durch die Jubiläumsstiftung der Universität Zürich ermöglicht, der mein weiterer Dank gilt.

<sup>1)</sup> Am Ende der Arbeit findet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis.

äquivalent sind und die auf ein schlichtes Gebiet, etwa die endliche z-Ebene, nebeneinander so gelagert werden, daß sie dieses Gebiet schlicht und lückenlos ausfüllen und daß zwei Polygone  $G_2^{\mu}$ ,  $G_2^{\mu}$  dann und nur dann längs einer Seite  $(a_i a_{i+1})$  zusammenhängen, wenn die zugeordneten Polygone  $G_1$ ,  $G_2$  die entsprechende "Bildseite" gemeinsam haben.

Das entstehende Polygonnetz nennt man den Graphen der Fläche  $W_q$ . Die inneren Eckpunkte des Graphen sind entweder uneigentliche Eckpunkte, an welche 2 Polygone, oder eigentliche Eckpunkte (m-1)-ter Ordnung, an welche m Polygone  $G_1$  und m Polygone  $G_2$  grenzen. Die Eckpunkte unendlicher Ordnung sind Randpunkte des Graphen. Dieser Graph soll die Fläche  $W_q$  darstellen.

3. Nehmen wir nun in jedem Polygon G einen inneren Punkt, und verbinden wir diesen Knotenpunkt durch insgesamt q punktfremde Strecken  $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_{q1}$  mit den Knotenpunkten der unmittelbar angrenzenden Polygone G, so daß  $S_{\nu},_{\nu+1}$  über die Seite  $(a_{\nu}, a_{\nu+1})$  zu dem Knotenpunkt des an diese Seite grenzenden "Nachbarpolygons" führt, so entsteht ein System von punktfremden Strecken, das man den  $Streckenkomplex^2$ ) von  $W_g$  nennt.

Durch den Streckenkomplex zerfällt die Ebene in Teilgebiete, sog. "Elementargebiete" der *Riemann*schen Fläche. Sie sind den Windungspunkten (eigentlichen oder uneigentlichen) der Fläche eineindeutig zugeordnet: Einem Windungspunkt (m-1)-ter Ordnung  $(1 \le m \le \infty)$  entspricht ein Elementargebiet mit 2m Ecken und Seiten.

4. Diejenigen Flächen  $W_q$ , die nur über den gegebenen Stellen verzweigt sind, unterscheiden sich bei festgehaltener Zerschneidungskurve L allein durch die Verheftungsvorschrift der "Halbblätter" G. Die letztere ist durch den Komplex festgestellt. Folglich ist eine Fläche  $W_q$  durch  $a_1, \ldots, a_q$ , L und ihren Streckenkomplex eindeutig bestimmt.

Die Eigenschaften der Fläche hängen im allgemeinen von der Lage der Punkte  $a_1, a_2, \ldots, a_q$  ab. Man beweist aber: Zwei Flächen  $W_q$  mit gleichen Streckenkomplexen sind vom gleichen Typus<sup>3</sup>). Es folgt erstens daraus, daß der Typus durch den Komplex eindeutig bestimmt ist, zweitens, daß es bei der Typenbestimmung genügt, eine besondere Lage der Grundpunkte zu betrachten (vgl. Fußnote 12).

5 Es sollen nun einige "Knotenfunktionen" definiert werden, die mit dem Komplex verbunden sind und die von Wichtigkeit für die Typenfrage sind.

<sup>2)</sup> A. Speiser (1), R. Nevanlinna (2), G. Elfving (1).

<sup>3)</sup> O. Teichmüller (1).

Man nehme ein beliebiges  $G^0$  der Polygone des Graphen G, füge jeder Seite von  $G^0$  das unmittelbar angrenzende Polygon  $G^1$  (erste Generation) an, dann sämtlichen freien Seiten der Polygone  $G^1$  wieder die unmittelbaren Nachbarpolygone  $G^2$  (zweite Generation) usw. Wir wiederholen diese kranzförmige Erweiterung n-mal und bezeichnen mit  $G_n$  den aus den Generationen  $G^0, G^1, \ldots, G^n$  bestehenden Teil des Graphen und mit  $S_n$  den betreffenden Teil des Komplexes.

Nun hat  $S_n$  einen "Rand", welcher von allen denjenigen Knotenpunkten von  $S_n$  gebildet wird, die von dem unendlich fernen Punkte durch keine Streckenzüge von  $S_n$  getrennt werden. Die Anzahl dieser "Randknoten" von  $S_n$  sei  $\sigma(n)$ . Weiter bezeichnen wir mit  $\mu(n)$  die Anzahl der Knotenpunkte der n-ten Generation. Es gilt offenbar:

$$\mu(n) \leqslant \sigma(n) \leqslant 1 + \mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)$$
.

Es stellt sich die Frage, inwiefern der Typus der hier betrachteten Flächen  $W_q$  vom Verhalten der Funktionen  $\sigma(n)$  und  $\mu(n)$  abhängt. I. A. begünstigt eine schwache "Verzweigtheit" der Fläche, d. h. ein langsames Anwachsen jener Funktionen, den parabolischen Fall.

6. Das bis jetzt schärfste Ergebnis in dieser Richtung ist das Nevanlinna-Wittich'sche Kriterium 4):

Wenn die Reihe 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)}$$

divergiert, dann gehört die Fläche zum parabolischen Typus.

Das Beispiel der Fläche:  $w = e^{e^z}$  zeigt, daß die Divergenz dieser Reihe keine notwendige Bedingung für den parabolischen Fall ist (Fig. 1).

7. Entsprechende allgemeine, hinreichende Kriterien für den hyperbolischen Typus besitzt man noch nicht. Dafür sind verschiedene, für spezielle Fälle gültige Kriterien bekannt<sup>5</sup>).

Nach neueren Ergebnissen hängt der Flächentypus, außer von der Verzweigungsstärke, noch von anderen Eigenschaften des Komplexes, wie von ihrer Symmetrie bzw. Asymmetrie ab <sup>6</sup>).

8. Wir beschränken uns hier auf eine Klasse  $w_q$  von Flächen  $W_q$ , und werden dafür hinreichende Bedingungen zum hyperbolischen Typus aufstellen. Für die Definition von  $w_q$  sind folgende Bezeichnungen zweckmäßig:

<sup>4)</sup> H. Wittich (2), R. Nevanlinna (5).

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>) Kakutani (1), Teichmüller (2), Kobayaschi (3), Speiser (3), C. Blanc (2).

<sup>6)</sup> Myberg (2), C. Blanc (4).

Jeder Knotenpunkt des Komplexes hat zwei oder  $\nu > 2$  "Nachbarn". Wir sagen, er sei im ersten Falle unverzweigt, im zweiten Falle  $\nu$ -fach verzweigt.

Eine unendliche Folge von benachbarten, unverzweigten Knotenpunkten nennen wir mit Speiser 7) ein logarithmisches Ende der Fläche.

Die universelle Überlagerungsfläche  $^8$ )  $w_q^0$  der q-fach punktierten Ebene, d. h. diejenige Fläche, die über den q Grundpunkten lauter Windungspunkte unendlicher Ordnung besitzt, ist die am stärksten verzweigte aller Flächen  $W_q$ . Die Knotenpunkte ihres Komplexes sind alle q-fach verzweigt, an jeden grenzen q Elementargebiete mit unendlich vielen Ecken und Seiten an. Im Fall q=3 haben wir die von der elliptischen Modulfunktion erzeugte Fläche (Modulfläche: Fig. 2).

- 9. Definition der Flächenklasse  $w_q$ : Es handelt sich um Flächen mit nachstehenden Eigenschaften:
- a) Die Fläche besitzt nur Windungspunkte nullter oder unendlicher Ordnung.
  - b) Logarithmische Enden sind nicht vorhanden.
  - c) Die Knoten sind alle entweder unverzweigt oder q-fach verzweigt.

Der Komplex einer solchen Fläche  $w_q$  ist, abgesehen von den unverzweigten Knotepunkten, mit dem Komplex der universellen Überlagerungsfläche  $w_q$  topologisch äquivalent (Fig. 3).

Diese letztere ist bekanntlich auf den Einheitskreis konform abbildbar, und zwar so, daß die "Normalpolygone"  $G^n$  von q sich einander berührenden Orthogonalkreisbogen berandet werden. Die  $q(q-1)^{k-1}$  Polygone  $G^k$  der k-ten Generation wollen wir noch mit  $i=1,2,\ldots,q(q-1)^{k-1}$  numerieren.

Mit  $s_{ki}$  bezeichnen wir den Flächeninhalt des Polygons (ki), d. h. des i-ten Polygons der k-ten Generation (Fig. 4).

Einem Polygon (ki) entspricht ein Knotenpunkt des Komplexes  $w_q^0$  und damit ein verzweigter Knotenpunkt des Komplexes  $w_q$ , den wir wieder mit (ki) bezeichnen. Mit diesem Knotenpunkt (ki) von  $w_q$  ist ein und nur ein Knotenpunkt (k-1,i') verbunden, und zwar durch einen Streckenzug, der aus einer endlichen Anzahl von abwechselnd einfachen und (q-1)-fachen Strecken besteht. Sei  $l_{ki}$  diese Streckenanzahl. Wir sagen, der zugehörige Streckenzug hat die "Länge"  $l_{ki}$ . Die Zahlenfolge  $l_{ki}$  bestimmt den Komplex eindeutig.

Wir setzen noch: 
$$l_k = \underset{i=1,2...}{\operatorname{Max}} \cdot l_{ki}, \ L_k = \underset{h \leqslant k}{\operatorname{Max}} \cdot l_h$$
.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>) Speiser (1).

<sup>8)</sup> R. Nevanlinna (4).

10. Für diese Flächenklasse  $w_q$  hat Kobayaschi  $^{9}$ ) den folgenden Satz bewiesen :

Satz. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kL_k}{(q-1)^k}$$

so ist die Fläche w<sub>q</sub> vom hyperbolischen Typus.

11. In der vorliegenden Arbeit sollen folgende drei Sätze bewiesen werden:

Satz A. Konvergiert die Reihe:

$$\sum_{k} \sum_{i} l_{ki} s_{ki}$$
  $(k = 1, 2, ..., \infty; i = 1, 2, ..., 3 \cdot 2^{k-1})$ ,

so ist die Fläche wa vom hyperbolischen Typus.

Satz B. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k} \frac{l_k}{(q-1)^k} ,$$

so ist die Fläche  $w_q$  vom hyperbolischen Typus.

Satz C. Sei  $l_{ki}$  von i unabhängig und in k monoton wachsend. Die Fläche  $w_q$  ist dann und nur dann vom hyperbolischen Typus, wenn die Reihe

$$\sum_{n}\frac{1}{\sigma(n)}$$

konvergiert.

Der zweite Teil des Satzes C ist in dem Nevanlinna-Wittichschen Kriterium enthalten.

12. Offenbar ist der Satz B eine Verschärfung des Satzes von Kobayaschi. Er enthält aber nicht den Satz A, denn man kann eine Folge von  $s_{ki}$  mit wachsendem k angeben, die schneller als  $\frac{1}{(q-1)^k}$  gegen null streben 10). Gibt man dann den zugehörigen Streckenzügen die "Länge"  $(q-1)^k$  für gerades q und  $(q-1)^k+1$  für ungerades q und den übrigen Streckenzügen die "Länge" 1, so konvergiert die Reihe  $\sum \sum l_{ki} s_{ki}$ , während die Reihe

$$\sum_{k} \frac{l_k}{(q-1)^k} \geqslant \sum_{k} \frac{(q-1)^k}{(q-1)^k}$$

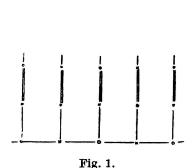
divergiert.

<sup>9)</sup> Kobayaschi (3).

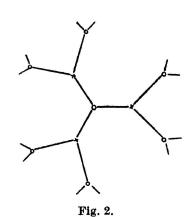
<sup>10)</sup> Man nehme z. B. in jeder Generation das Polygon (k, i) kleinsten Flächeninhalts.

Andererseits ist der Satz B auch nicht eine Folge von A, denn falls  $l_{ki}$  unabhängig von i ist,  $l_{ki} = l_k$ , so wird

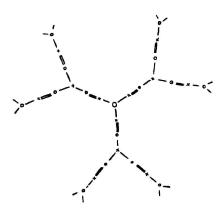
$$\sum_{k} \sum_{i} l_{ki} \, s_{ki} = \sum_{k} l_{k} \sum_{i} s_{ki} \geqslant \sum_{k} rac{l_{k}}{k^{3}} \; .$$



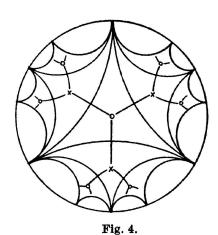
Die Fläche  $w = e^{e^z}$ 



Die Modulfläche  $w_q^0 (q=3)$ 



Fläche  $w_q$  mit q=3  $(l_{ki}=3)$ 



Einteilung des Einheitskreises in Normalpolygone (ki)

## § 2. Hilfssätze über schlichte und quasikonforme Abbildungen

13. Bei der Untersuchung des Typenproblems ist es manchmal vorteilhaft, neben konformen Abbildungen noch allgemeinere, schlichte Abbildungen heranzuziehen<sup>11</sup>).

Wir betrachten im folgenden ausschließlich jene Klasse von Abbildungen, die eindeutig, stetig und bis auf isolierte Punkte oder Linien stetig differenzierbar sind. Wir nennen der Kürze halber eine solche Abbildung "differenzierbar".

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>) Für diesen Paragraph vgl. Lawrentieff (1), Grötsch (1), Teichmüller (1).

14. Ein Gebiet der z-Ebene sei schlicht und differenzierbar auf der w-Ebene abgebildet, vermöge  $u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ \mathrm{mit}\ z=x+iy,$  w=u+iv und  $|u_xv_y-u_yv_x|>0$ . Die Ausdrücke  $\left|\frac{dw}{dz}\right|$  bzw.  $|u_xv_y-u_yv_x|$  stellen das Verhältnis der Linienelemente bzw. der Flächenelemente dar. Wir setzen ferner

$$K_{w/z} = rac{u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2}{\mid u_x v_y - u_y v_x \mid} \ .$$

Es gilt dann

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqslant K_{w/z} \left| u_x v_y - u_x v_y \right| . \tag{1}$$

Denn es ist

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \frac{(u_x^2 + v_x^2) dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y) dx dy + (u_y^2 + v_y^2) dy^2}{dx^2 + dy^2},$$

und der Beweis jener Ungleichheit führt auf das Problem der Bestimmung der Hauptachsen einer Ellipse zurück.

Es ist ferner

$$K_{w/z} \geqslant 2$$
 , (2)

mit Gleichheitszeichen nur für konforme Abbildungen.

Wenn  $K_{w/z}$  gleichmäßig beschränkt ist, so sagt man, die Abbildung sei "quasikonform".

Für umgekehrte Abbildungen hat man

$$K_{z/w} = K_{w/z} ; (3)$$

ist insbesondere die Abbildung quasikonform, so ist die inverse Abbildung auch quasikonform.

Schließlich gilt für zusammengesetzte Abbildungen

$$K_{w/\zeta} \leqslant K_{w/z} \cdot K_{z/\zeta} . \tag{4}$$

Der Beweis folgt aus der Schwarzschen Ungleichung.

15. Satz 1. Ist die punktierte Ebene  $z \neq \infty$  auf den Einheitskreis |w| < 1 differenzierbar und schlicht abgebildet, so divergiert das Integral

$$\int_{|w| < I} K_{w/z}(w) df_w ,$$

 $wobei \ df_w \ das \ Fl\"{a}chenelement \ der \ w\text{-}Ebene \ bedeutet.$ 

Beweis. Wir können annehmen, daß die Nullpunkte sich entsprechen. Dann ist das Bild des Kreises  $z=r\leqslant r_0$  eine einfache, geschlossene Kurve des w-Gebietes, die den Punkt w=0 umgibt und deren kürzester Abstand vom Nullpunkt  $\varrho_0>0$  sein möge. Ihre Länge ist also größer als

$$2\,\pi\,arrho_0 \leqslant \int\limits_0^{2\,\pi} \left|rac{dw}{dz}
ight| r\,darphi \;\; .$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$4\,\pi^2\,arrho_0^2 \leqslant \int\limits_0^{2\,\pi} r\,darphi \int\limits_0^{2\,\pi} \left|rac{dw}{dz}
ight|^2 r\,darphi = 2\,\pi\,r\!\int\limits_0^{2\,\pi} \left|rac{dw}{dz}
ight|^2 r\,darphi \;\;.$$

Division durch  $2\pi r$  und Integration nach dr von  $r_0$  bis r ergeben

$$2\pi \varrho_0^2 (\log r - \log r_0) \leqslant \int\limits_{r_0 < |z| < r} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 df_z$$
,

wobei  $df_z=rdrd\varphi$  das Flächenelement der z-Ebene ist. Nach (1) haben wir schließlich

$$2\pi \varrho_0^2 (\log r - \log r_0) \leqslant \int_{r_0 < |z| < r} K_{w/z} |u_x v_y - u_y v_x| \, df_z < \int_{\varrho_0 < w < 1} K_{w/z}(w) \, df_w \, .$$

Lassen wir r ins Unendliche wachsen, so ergibt sich die Behauptung 12).

16. Satz 2. Ist die punktierte Ebene  $z \neq \infty$  auf den Halbstreifen

$$\xi \leqslant 0$$
,  $0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$ 

derart abgebildet, daß zwei Randpunkte des  $\zeta$ -Gebietes ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) mit gleichen  $\xi$  demselben z entsprechen, so divergiert das Integral

$$\int_{\xi_0 < \xi < 0} K_{\xi/z}(\zeta) df_{\zeta}$$

 $f\ddot{u}r \ jedes \ \xi_0 < 0$ .

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>) Dieser Satz ist eine Erweiterung eines von *Teichmüller* (2) bewiesenen Satzes. Der Beweis stützt sich auf Längen- bzw. Flächenabschätzungen, die zuerst von W. Groβ, R. Courant, später von Grötzsch (1), L. Ahlfors (1) u. a. in den Fragen der konformen Abbildungen angewandt worden sind.

Aus diesem Satz folgt die Invarianz des Typus bei quasikonformen Abbildungen und damit die Behauptungen aus Nr. 4 (vgl. Teichmüller (2)).

Beweis. Bilden wir das  $\zeta$ -Gebiet vermöge  $w = e^{\zeta}$  auf den Kreis |w| < 1 ab, so muß nach Satz 1 das Integral

$$\int\limits_{e^{\frac{\zeta}{\xi_0}} < |w| < 1} K_{w/z}(w) \ df_w = \int\limits_{\xi_0 < \xi < 0} K_{w/z}(w) \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2 df_{\zeta}$$

divergieren. Es ist nun

$$\frac{df_w}{df_{\zeta}} = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2 = |w|^2 \leqslant 1$$

und nach (2), (4)  $K_{w/z} \leqslant K_{w/\zeta} \cdot K_{\zeta/z} = 2 \, K_{\zeta/z}$ , woraus unsere Behauptung folgt.

16. Es ist klar, daß bei den Sätzen 1 und 2 die endliche z-Ebene durch eine *Riemann* sche Fläche vom parabolischen Typus ersetzt werden könnte.

Unsere Aufgabe besteht dann im folgenden darin, Bedingungen aufzustellen, damit eine Abbildung der hier betrachteten Art existiert, welche die Fläche  $w_q$  auf den Einheitskreis abbildet und für welche das Integral  $\int\limits_{|w|<1} K(w)\,df_w$  konvergiert.

Um eine solche Abbildung zu gewinnen, machen wir von der sogenannten "Faltungsfläche" der *Riemann*schen Fläche wesentlich Gebrauch<sup>13</sup>).

18. Quasikonforme Abbildung der Fläche wa auf ihre "Faltungsfläche".

Diese Abbildung kann man nach R. Nevanlinna<sup>13</sup>) folgendermaßen herstellen:

Sei die Fläche  $w_q$  über der Riemannschen Kugel ausgebreitet. Wir können nach Nr. 4 annehmen, daß die Grundpunkte  $a_1, \ldots, a_q$  in den Ecken eines regulären Polygons des Äquatorialkreises liegen. Man grenze um jeden Windungspunkt  $a_\nu$  der Fläche eine Umgebung  $Q_\nu$  ab, welche aus allen Flächenpunkten besteht, deren auf der Fläche gemessener sphärischer Abstand von  $a_\nu$  kürzer als die Abstände von den übrigen Windungspunkten ist.  $Q_\nu$  wird von einer Anzahl von Großkreisbogen B berandet, deren Punkte von mindestens zwei Windungspunkten  $a_\nu$ ,  $a_\mu$  die gleiche Entfernung haben. Das derart entstehende sogenannte KobayachiNetz ist mit dem Streckenkomplex, abgesehen von den mehrfachen Strecken, topologisch äquivalent.

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>) Kobayaschi (1), (2); Kakutani (1); R. Nevanlinna (4).

Unter der obigen Annahme liegen sämtliche Ecken des Netzes über dem Nord- bzw. Südpole der Kugel.

Sei  $P_w$  ein von diesen Ecken verschiedener Punkt von B, der also zu 2 Polygonen  $Q_v$ ,  $Q_\mu$  gehört. Bewegt sich  $P_w$  auf B, so drehen sich die Großkreisbogen  $(a_v P_w)$ ,  $(a_\mu P_w)$  um gleiche Winkel und auf einem Bogenelement |dw| ist die Zunahme jenes Winkels

$$d\tau(P_w) = \left| d \arg \frac{1 + \overline{a}w}{w - a} \right| ,$$

wobei für a entweder  $a_{\nu}$  oder  $a_{\mu}$  zu setzen ist.

Ist  $P_0$  derjenige Punkt von B, der dem Nullknotenpunkt des Komplexes entspricht und  $P_w$  ein beweglicher Punkt auf B, so haben wir in

$$\tau(P_w) = \int_{P_0 P_w} d\tau(P_w') \geqslant 0 ,$$

wobei  $P'_w$  auf B von  $P_0$  bis  $P_w$  läuft, eine eindeutige stetige Funktion des Netzpunktes  $P_w$ . Diese Funktion kann man in jeden inneren Punkt der Fläche folgendermaßen fortsetzen: Gehört  $P_w$  zu einem Polygon  $Q_v$ , so verlängert man den Großkreisbogen  $(a_v P_w)$  bis zum Punkt  $P'_w$  des Randes von  $Q_v$  und setzt  $\tau(P_w) = \tau(P'_w)$ .

Definieren wir noch durch

$$\sigma(P_w) = \log \left| \frac{1 + \overline{a}w}{w - a} \right|$$

eine weitere Funktion von  $P_w$ , und führen wir die komplexe Veränderliche  $t=\sigma+i~\tau$  ein, so erhalten wir als konformes Abbild der Fläche  $w_q$  eine über der oberen Halbebene  $\tau\geqslant 0$  gelagerte, vielblättrige Fläche  $\Phi_t$ , die mit Faltungen versehen ist, welche von zweierlei Art sind:

- a) Faltungen, die den Großkreisbogen entsprechen, welche die Windungspunkte  $a_{\nu}$  mit den Ecken des zugehörigen Polygons  $Q_{\nu}$  verbinden. Sie sind parallel zur  $\sigma$ -Achse und den verzweigten Knotenpunkten (ki) des Komplexes  $w_q$  eindeutig zugeordnet. Der Abstand einer solchen Faltung von der  $\sigma$ -Achse ist gleich  $n\pi$ , oder, nach einer Ähnlichkeitstransformation gleich n, wenn der entsprechende Knotenpunkt zur n-ten Generation gehört.
- b) Faltungen, die den Netzbogen B entsprechen. Sie sind den Streckenzügen (ki) (Verbindungslinien von 2 verzweigten Knotenpunkten) eindeutig zugeordnet. Die Spur einer solchen Faltlinie auf der t-Ebene ist

eine Kurve  $\sigma = f(\tau)$ ,  $k_1 \leqslant \tau \leqslant k_2$ , wobei  $k_2 - k_1 = l_{ki}$  die Länge des entsprechenden Streckenzuges bedeutet.

Die Funktion  $f(\tau)$  ist beschränkt und verschwindet für ganzzahlige  $\tau$ , insbesondere für  $\tau=k_1$  oder  $k_2$ . Sie hat auch eine beschränkte Ableitung  $f'(\tau)$ , denn der Winkel, den die Faltlinie mit einer Geraden  $\tau=$  konstant bestimmt, ist gleich jenem durch den entsprechenden Netzbogen und einem Großkreisbogen  $(a_{\nu}P_{\omega})$  gebildeten Winkel und ist damit von 0 und  $\pi$  verschieden.

An eine solche Faltlinie grenzen zwei übereinanderliegende Gebiete  $\sigma \geqslant f(\tau), \ k_1 \leqslant \tau \leqslant k_2$ , der Faltungsfläche. Jene Gebiete können wir auf den Halbstreifen  $\sigma_1 \geqslant 0$ ,  $k_1 \leqslant \tau_1 \leqslant k_2$ , quasikonform abbilden, vermöge  $\sigma_1 = \sigma - f(\tau), \ \tau_1 = \tau$ . In der Tat ist K beschränkt

$$K_{t_1/t} = 2 + f'^2(\tau)$$
.

Nachdem wir alle solche Gebiete in Streifen transformiert haben, erhalten wir eine neue Fläche, die nun mit wagrechten (parallel zur  $\sigma$ -Achse) und senkrechten Faltungen versehen ist, und die wir "Faltungsfläche"  $F_t$  der Riemannschen Fläche nennen. Sie besteht aus Halbstreifen, die paarweise an eine senkrechte Faltlinie grenzen. Jedes solche Streifenpaar ist einem Streckenzug (ki) des Komplexes zugeordnet und hat die Breite  $l_{ki}$ . Wir bezeichnen es auch mit (ki).

Insbesondere haben alle Streifen der Faltungsfläche  $F_{t_0}$  der universellen Überlagerungsfläche  $w_q^0$  die Breite 1.

## § 3. Beweis des Satzes A 14)

19. Es sei  $w_q$  eine Riemannsche Fläche unserer Klasse. Wir bilden die zugehörige Faltungsfläche  $F_t$  auf die Faltungsfläche  $F_{t_0}$  der universellen Überlagerungsfläche  $w_q^0$  ab, indem wir jeden Streifen der Breite  $l_{ki}$  in  $F_t$  auf die Breite 1 reduzieren, vermöge der Transformation  $\sigma_0 = \sigma$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{l_{ki}}$ . Dabei ist

$$K_{t_0/t} = l_{ki} + \frac{1}{l_{ki}} \leqslant 2 \, l_{ki} \quad . \tag{5}$$

Bei der quasikonformen Abbildung von  $F_{t_0}$  auf  $w_q^0$ , dann von  $w_q^0$  auf den Einheitskreis |w| < 1, gehen die Streifen (ki) in Orthogonalkreisbogenpolygone  $s'_{ki}$  über, deren Inhalte wir ebenfalls mit  $s'_{ki}$  bezeichnen wollen (Fig. 5).

<sup>14)</sup> Für die Beweismethode vgl. Teichmüller (2), Speiser (3).

Es resultiert eine Abbildung von  $w_q$  auf dem Kreis |w| < 1 mit

$$K(w) \leqslant M l_{ki} \quad \text{für } w \text{ in } s'_{ki} ,$$
 (6)

wobei M eine endliche Konstante bedeutet.

Wäre  $w_q$  vom parabolischen Typus, so müßte nach Satz 1 § 2 das Integral

$$\int\limits_{|w|<1} K(w) df_w \leqslant M \sum\limits_{k} \sum\limits_{i} l_{ki} s'_{ki}$$

divergieren. Es folgt nun aus elementaren Abschätzungen

$$s'_{ki} < m s_{ki}$$
 ,

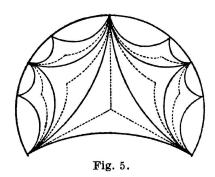
wobei m eine Konstante bedeutet. Hieraus ergibt sich der

Satz A. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k} \sum_{i} l_{ki} s_{ki} ,$$

so gehört die Fläche  $w_{q}$  zum hyperbolischen Typus.

Die Größen  $l_{ki}$  und  $s_{ki}$  haben die in Nr. 9 erklärten Bedeutungen.



Die Polygone  $s_{ki}$  und  $s'_{ki}$  (punktierter Rand)

## § 4. Beweis des Satzes B 15)

20. Im folgenden setzen wir der Bequemlichkeit halber q=3. Die nachstehenden Ausführungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall q>3 übertragen.

Um den Hauptgedanken der Beweisführung besser hervortreten zu lassen, wollen wir zuerst einige einfache Transformationen zusammenstellen.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>) Für die Beweismethode vgl. Kakutani (1), Kobayaschi (3).

Transformation I. Abbildung des Dreieckes mit den kartesischen Eckpunktskoordinaten  $(0,0),\ (b,0),\ (0,b)$  der t-Ebene  $(t=\sigma+i\tau)$  auf das Dreieck  $(0,0),\ (1,\frac{1}{2}),\ (1,0)$  der w-Ebene (w=u+iv) vermöge  $u=\frac{\sigma+\tau}{b},\ v=\frac{\sigma}{2\,b}$ . Dabei ist

$$K_{t/w} \leqslant \frac{9}{2} . (7)$$

Transformation II. Abbildung des Viereckes (Trapezoids) (c, 0), (0, c), (0, c + d), (c + d, 0) auf das Viereck (0, 1), (0, 0), (1, 0),  $(1, \frac{1}{2})$ , vermöge  $u = \frac{\sigma + \tau - c}{d}$ ,  $v = \frac{\sigma}{c + du} \left(1 - \frac{u}{2}\right)$ . Hier ist

$$K_{t/w} \leqslant 9\left(\frac{c+du}{d} + \frac{d}{c+du}\right)$$
 (8)

Bei diesen Transformationen ist die Randzuordnung linear.

21. Wir kommen zum Beweis des Satzes B. Für q=3 stimmt die universelle Überlagerungsfläche  $w_q^0$  mit der Modulfläche überein. Seien  $F_{t_0}$  und  $F_t$  die Faltungsflächen der Fläche  $w_q^0$  bzw. der Fläche  $w_q$ .

Wie beim Beweis des Satzes A bilden wir zunächst  $F_t$  auf  $F_{t_0}$  (quasi-konform) ab (Nr. 19). Auf den Streifen (ki) der k-ter Generation von  $F_{t_0}$  gilt wegen (5)

$$K_{t/t_0} \leqslant 2 \cdot l_{ki} \leqslant 2 \cdot l_k , \qquad (9)$$

wo  $l_{ki}$  und  $l_k$  wie in Nr. 9 definiert sind.

Die Menge aller Punkte  $\tau_0 + \sigma_0 = k$   $(k \ge 1)$  der über der  $t_0$ -Ebene gelagerten Faltungsfläche  $F_{t_0}$  bildet eine aus geradlinigen Strecken zusammengesetzte, geschlossene Kurve  $C_k$  (Fig. 6). Sei  $D_k$  das zwischen  $C_k$  und  $C_{k+1}$  liegende "Ringgebiet".  $D_k$  wird durch die Faltungen in Teilgebiete zerlegt, auf welche wir nun die Transformationen I bzw. II ausüben. Diese Teilgebiete sind:

- 1)  $3 \cdot 2^k$  Dreiecken, welche dem in der Transformation I betrachteten Dreieck kongruent sind, wenn wir b = 1 setzen. Nach (7) ist  $K_{t_0/w_0} \leqslant \frac{9}{2}$ .
- 2)  $3 \cdot 2^k$  Vierecke (Trapezoide) von der in der Transformation II geschilderten Art mit d = 1,  $1 \le c \le k$ . Für  $3 \cdot 2^{k-m}$  von diesen Vierecken (m = 1, 2, ..., k) ist der zugehörige Wert von c gleich m, so daß für sie gilt nach (8), da  $u_0 \le 1$ , d = 1 ist,

$$K_{t_0/w_0} \leqslant 27 \cdot m . \tag{10}$$

Nachdem wir die Dreiecke und Vierecke auf diese Weise deformiert haben, verheften wir sie nach der Art und Weise wie sie auf  $D_k$  nebeneinanderliegen zu einem Rechteck  $S_k^0$  der  $w_0$ -Ebene zusammen  $^{16}$ ).  $S_k^0$  hat die Breite 1 und die Höhe  $3 \cdot 2^k$ . Auf  $S_k^0$  üben wir die (konforme) Transformation  $w = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} w_0$  aus, die zu einem Rechteck  $S_k$  der w-Ebene mit der Breite  $\frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$  und der Höhe  $\pi$  führt. Schließlich werden alle  $S_k(k=1,2,\ldots,\infty)$  zu einem Rechteck  $S_w$  der w-Ebene  $^{16}$ ) verheftet, dessen Breite endlich und gleich  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^k}$  ist.

Es folgt eine Abbildung der Fläche  $w_q$  auf den in Satz 2 § 2 Nr. 16 betrachteten Streifen, mit

$$K(w) < M \cdot K_{t/t_0} \cdot K_{t_0/w_0} , \qquad (11)$$

wobei  $K_{t/t_0}$  und  $K_{t_0/w_0}$  den Ungleichungen (9) bzw. (10) genügen. Wäre nun die Fläche vom parabolischen Typus, so müßte nach Satz 2 Nr. 16 das Integral  $\int_{S_w} K(w) df_w$  divergieren. Es gilt aber

$$\int_{S_{w}} K(w) df_{w} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_{k}} K(w) df_{w} 
\leq M \cdot \sum_{S_{k}} \int_{K_{t/t_{0}}} K_{t_{0}/w_{0}} df_{w} \leq M \sum_{k=1}^{\infty} L_{k+1} \int_{S_{k}} K_{t_{0}/w_{0}} df_{w} ,$$
(12)

denn das "Ringgebiet"  $D_k$  von  $F_{t_0}$  enthält nur Punkte der Streifen der k+1 ersten Generationen, so daß, nach (9), auf  $D_k$  gilt

$$K_{t/t_0} < 2 \max_{h \leq k+1} \cdot l_h = 2 L_{k+1}$$
.

Ferner ist

$$df_w = \left(rac{\pi}{3\cdot 2^k}
ight)^2 \! df_{w_0} \ .$$

Die Dreiecke und Trapezoide von  $S_k^0$  haben je einen Flächeninhalt kleiner als 1, so daß

$$\int\limits_{S_k} K_{t_0/w_0} df_w = \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^k}\right)^2 \int\limits_{S_k^0} K_{t_0/w_0} df_{w_0} \leqslant M_1 \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \sum\limits_{S_k^0} K_{t_0/w_0} ,$$

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup>) Die hier ausgeübten Verheftungen gelingen ohne weiteres, weil die Randzuordnung bei den Transformationen I, II linear war (Nr. 20).

wobei die Summe über alle Dreiecke und Trapezoide von  $S_k$  zu erstrecken ist. Gemäß (10) gilt weiter

$$\sum_{S_{k}^{0}} K_{t_{0}/w_{0}} \leqslant 27 \cdot \sum_{m=1}^{k} 3 \cdot 2^{k-m} \cdot m \leqslant M_{2} 2^{k}$$

und schließlich gemäß (12)

$$\int_{S_w} K(w) df_w < M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_{k+1}}{2^k} = 2 M_3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{L_k}{2^k}.$$

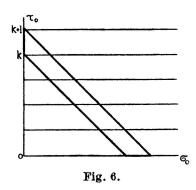
Nun ist aber

$$\sum \frac{L_k}{2^k} \leqslant \sum \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_k}{2^k} = \sum l_k \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots \right) = 2 \sum \frac{l_k}{2^k}$$

und damit haben wir den

Satz B. Konvergiert die Reihe  $\sum\limits_{k=1}^{\infty} rac{l_k}{2^k}$ , so gehört die Fläche  $w_q$  für q=3 zum hyperbolischen Typus.

Die Größe  $l_k$  hat die in Nr. 9 erklärte Bedeutung. Für q>3 ist diese Reihe durch  $\sum \frac{l_k}{(q-1)^k}$  zu ersetzen.



Spur auf der  $t_0$ -Ebene von  $C_k$ ,  $C_{k+1}$  und  $D_k$ 

## § 5. Beweis des Satzes C

22. Es ist zu erwarten, daß gleichzeitig notwendige und hinreichende Kriterien für einen bestimmten Flächentypus aufgestellt werden könnten, wenn wir den Streckenkomplex hinreichend einschränkenden Symmetriebedingungen unterwerfen würden. Dies wird durch den Satz C bestätigt.

Wir setzen also voraus, der Komplex der Fläche sei "symmetrisch", d. h.  $l_{ki}$  sei unabhängig von i,  $l_{ki} = l_k$ . Es sei ferner

$$n_k = l_1 + l_2 + \cdots + l_k .$$

Hier sind die Knoten einer bestimmten Generation entweder alle unverzweigt oder alle verzweigt. "Verzweigt" sind die  $n_k$ -ten Generationen.

23. Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. Ist die Fläche  $w_q$  mit q=3 im obigen Sinne symmetrisch und konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{n_{\kappa}}{l_k} , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log l_k}{2^k} ,$$

so gehört sie zum hyperbolischen Typus.

Beweis. Die waagrechten Faltungen der Fläche  $F_t$  liegen jetzt nur über den Geraden  $\tau=n_k$   $(k=1,2,\ldots)$ . Wir betrachten das zwischen den geschlossenen Kurven  $C_{n_k}$  und  $C_{n_{k+1}}$  (vgl. Nr.21) liegende "Ringgebiet"  $D_k'\cdot D_k'$  wird durch die Faltungen in Teilgebiete zerlegt, und zwar in

- 1)  $3 \cdot 2^k$  Dreiecke von der in der Transformation I betrachteten Art :  $b = 1_k$ .
- 2)  $3 \cdot 2^k$  Trapezoide von der in der Transformation II betrachteten Art mit  $d = l_{k+i}$ ,  $1 \leqslant c \leqslant n_k$ , so daß gemäß (8), da  $u_0 \leqslant 1$  ist,

$$K_{t/w_0} < 9\left(\frac{n_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{l_{k+1}}{1 + l_{k+1}u_0}\right) \tag{13}$$

Nach den Transformationen I und II verheften wir die Dreiecke und Trapezoide wie in Nr. 21 zu einem Rechteck  $S_k^0$  der  $w_0$ -Ebene, das dann vermöge  $w = \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} w_0$  auf das Rechteck  $S_k$  der w-Ebene abgebildet wird.

Wir fügen schließlich alle  $S_k$  zu einem einzigen Rechteck  $S_w$  zusammen.

Bei der Abbildung von  $w_q$  auf  $S_w$  ist  $K(w) \leqslant M \cdot K_{t/w_0}$ , wobei  $K_{t/w_0}$  der Ungleichung (13) genügt. Es folgt

$$\int_{S_w} K(w) df_w < M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} K_{t/w_0} df_w < M \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \right)^2 \int_{S_k^0} K_{t/w_0} df_{w_0} . \quad (14)$$

Da  $df_{w_0} = du_0 dv_0$  ist, so gilt nach (13)

Schließlich wird gemäß (14)

$$\int_{S_{-n}} K(w) df_w < M\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{n_{k+1}}{l_{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log l_{k+1}}{2^k}\right) = 2 \cdot M\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{n_k}{l_k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log l_k}{2^k}\right).$$

Wäre die Fläche vom parabolischen Typus, so müßte die rechte Seite nach Satz 2, § 2, divergieren. Hieraus ergibt sich das Lemma.

- 24. Wenn speziell  $l_k$  in k monoton wachsend ist, so wird  $n_k \leqslant k l_k$ , und die Reihe  $\sum \frac{1}{2^k} \frac{n_k}{l_k}$  ist konvergent. Die zweite Reihe  $\sum \frac{\log l_k}{2^k}$  fällt aber bei den "symmetrischen" Komplexen, bis auf einen konstanten Faktor, mit der Nevanlinna-Wittichschen Reihe  $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$  (Nr. 6) zusammen. Damit haben wir den
- Satz C. Sei  $l_{ki}$  unabhängig von i und in k monoton wachsend. Die Fläche  $w_q$  ist dann und nur dann vom hyperbolischen Typus, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)}$$

konvergiert.

Die Randknotenanzahl  $\sigma(n)$  und die Größen  $l_{ki}$  haben die in Nr.5 bzw. Nr. 9 angegebene Bedeutung.

(Eingegangen den 4. Februar 1947.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- Ahlfors, L.: (1) Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachteten Klasse transzendenter Funktion. Acta Math. 58 (1932).
  - (2) Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Comment. math. Helv. 3 (1931).
  - (3) Sur le type d'une surface de Riemann. C. R. Ac. Sc. Paris 201 (1935).
- Blanc, C.: (1) Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. Comment. math. Helv. 9 (1937).
  - (2) Les demi-surfaces de Riemann. Application au problème du type. Ebenda 10 (1938).
- Drape, E.: (1) Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe. Deutsche Math. 3 (1938).

- Elfving, G.: (1) Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta soc. sc. Fenn. N. S. 2 (1934).
  - (2) Über Riemannsche Flächen und Annäherung von meromorphen Funktionen. 8. Congr. Math. scand. Stockholm (1934).
- Garwick, J. v.: (1) Über das Typenproblem. Arch. Math. Nat. 43 (1940).
- Grötzsch: (1) Ber. Sächs. Acad. 80-84 (1928-1933).
- Kakutani, S.: (1) Applications of the theory of pseudo-regular functions to the type-problem of Riemann surfaces. Jap. J. Math. 13 (1936).
- Kobayaschi, Z.: (1) Theorems on the conformal representations of Riemann surfaces. Sc. Rep. Tokyo Bunr. Daig. Sec. A Nr. 39 (1936).
  - (2) Ein Satz über ein Problem von Herrn Speiser. Ebenda (1935).
  - (3) On the Kakutani's theory of the Riemann surfaces. Nr. 76 ebenda (1940).
- Laasonen, P.: (1) Zum Typenproblem der Riemannschen Flächen. Ann. Acad. sc. Fenn. S. A. 11 (1942).
  - (2) Beiträge zur Theorie der fuchsoiden Gruppen und zum Typenproblem der Riemannschen Flächen. Ebenda 25 (1944).
- Lawrentieff: (1) Sur les surfaces de Riemann. Recueil Math. Moscou (1935).
- Myrberg, P. J.: Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Acta Math. 61 (1933).
  - (2) Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Ann. Acad. sc. Fenn. A 45 (1935).
- Nevanlinna, R.: (1) Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. int. Math. Kongreß I Zürich (1932).
  - (2) Ein Satz über die konforme Abbildung von Riemannschen Flächen. Comment. Math. Helv. 5 (1932).
  - (3) Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta Math. 58 (1932).
  - (4) Eindeutige analytische Funktionen. Berlin: Springer (1936).
  - (5) Ein Satz über offene Riemannsche Flächen. Ann. Acad. sc. Fenn. 54 (1940).
- Speiser, A.: (1) Über Riemannsche Flächen. Comment. Math. Helv. 2 (1930).
  - (2) Über beschränkte automorphe Funktionen. Ebenda 4 (1932).
  - (3) Riemannsche Fläche vom hyperbolischen Typus. Ebenda 10 (1938).
- Teichmüller, O.: (1) Eine Anwendung quasikonformer Abbildungen auf das Typenproblem. Deutsche Math. 2 (1937).
  - (2) Untersuchung über konforme und quasikonforme Abbildungen. Ebenda 3 (1938).
- Ullrich, E.: (1) Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen N. F. 1 Nr. 9 (1936).
  - (2) Flächenbau und Wertverteilung. 9. Congr. Math. scand. (1939).
  - (3) The Problem of the type for a certain class of Riemann surfaces. Duke math. J. 5 (1939).
- Wagner, H.: (1) Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. J. reine u. angew. Math. 175 (1936).
- Wittich, H.: (1) Ein Kriterium zur Bestimmung des Typus Riemannscher Flächen. Mh. Math. Phys. 44 (1936).
  - (2) Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Z. 45 (1939).